

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
xkovar3@fi.muni.cz

Část 1

Obsah přednášky

- 1 Informace o předmětu
- 2 Motivace
- 3 Principy matematiky

Informace o předmětu

■ Obsah předmětu

- průřez vysokoškolskou matematikou
- forma srozumitelná studentům s humanitním zaměřením (lingvistika)

■ Ukončení předmětu

- zkouška formou 2 písemek
- vnitrosemestrální písemka **8.11.** → 25 bodů
- zkoušková písemka → 75 bodů
- úspěšné ukončení → alespoň 60 bodů z písemek

■ Odpadající přednášky

- 4.10., 15.11. (reading week)

Obsah předmětu

■ Okruhy

- výroková logika, důkazy, indukce
- základy teorie množin, čísla, relace, funkce
- ekvivalence, uspořádání
- úvod do formální lingvistiky, jazyk jako množina, formální gramatika
- kombinatorika, popisná statistika



Obsah předmětu

■ Zdroje informací

- slidy a příklady ve studijních materiálech
- studijní text k předmětu
- literatura na stránce předmětu (přesahuje rámec předmětu)
- osobní konzultace (naživo i on-line)
- přednášky na YouTube z minulých semestrů

<https://youtube.com/playlist?list=PLifvhlXnhUAkVIN2Hub4BfKGrBQEjfh4d>

- diskusní fórum – současné i z časů lockdownu

<https://is.muni.cz/auth/discussion/predmetove/phil/podzim2020/PLIN004/?fakulta=1421;obdobi=7923;predmet=1298559>

Rozdíl mezi SŠ a VŠ matematikou

■ Středoškolská matematika

- = počty s čísly:
- → kolik budu platit v obchodě (sčítání)
- → jaké daně budu mít (zlomky, procenta)
- → proč, proč? (matice, integrály)

■ Vysokoškolská matematika

- = umění abstrakce + přemýšlení v obecnostech
- → zásobárna abstraktních pojmů
- → přesné definice
- → spolehlivé vyvozování závěrů (důkazy)
- → základ pro všechny technické obory

Proč potřebují lingvisté matematiku?

■ Počítačová lingvistika

- zpracování jazyka na počítačích
- potřeba spolupracovat s technicky zaměřenými lidmi
- → pochopit jejich způsob myšlení
- počítačové modely jazyka jsou založeny na matematických faktech

■ Abstraktní myšlení

- schopnost rozumově uchopit složité pojmy
- → snazší pochopení lingvistických modelů
- schopnost zobecňovat
- schopnost rozkládat složité problémy na jednodušší
- → nejsou tak důležité vědomosti samotné jako dovednosti, kterým se při jejich vstřebávání naučíte

Principy vysokoškolské matematiky

- Středoškolská matematika
 - návody, jak něco spočítat
- Vysokoškolská matematika
 - soubor poznatků o abstraktních pojmech
 - styl **definice – věta – důkaz** :
 - **definice** = vymezení pojmu
 - " celé číslo x je **sudé**, pokud

Principy vysokoškolské matematiky

- Středoškolská matematika
 - návody, jak něco spočítat
- Vysokoškolská matematika
 - soubor poznatků o abstraktních pojmech
 - styl **definice – věta – důkaz** :
 - **definice** = vymezení pojmu
 - " celé číslo x je **sudé**, pokud existuje takové celé y , že $y * 2 = x$ "

Principy vysokoškolské matematiky

- Středoškolská matematika
 - návody, jak něco spočítat
- Vysokoškolská matematika
 - soubor poznatků o abstraktních pojmech
 - styl **definice – věta – důkaz** :
 - **definice** = vymezení pojmu
 - " celé číslo x je **sudé**, pokud existuje takové celé y , že $y * 2 = x$ "
 - **věta** = formulace poznatku o definovaných pojmech
 - " 10 je sudé číslo"
 - **důkaz** = ověření pravdivosti věty krok za krokem
 - $10 = 5 * 2$ (zákl. aritmetika)
 - tedy existuje takové celé y , že $y * 2 = x$ ($y = 5$)
 - tedy 10 je sudé

Typy důkazů

■ Přímý důkaz

- použitím definic a známých faktů přímo odvodíme znění věty

■ Důkaz sporem

- předpokládáme, že věta neplatí (platí její **negace**)
- použitím definic a známých faktů odvodíme **spor**
- (např. $1 = 0$ nebo neplatnost některého z předpokladů)

■ Důkaz indukcí

- dokazujeme něco pro posloupnost objektů
- příště



Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
 - celá čísla ($1, 2, 3, \dots, 0, -1, -2, \dots$)
 - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
 - dělitele (x je dělitelem a , pokud

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
 - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
 - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
 - dělitele (x je dělitelem a , pokud existuje takové celé y , že $y * x = a$)

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
 - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
 - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
 - dělitele (x je dělitelem a , pokud existuje takové celé y , že $y * x = a$)
 - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
 - druhou mocninu ($a^2 =$

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
 - celá čísla ($1, 2, 3, \dots, 0, -1, -2, \dots$)
 - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
 - dělitele (x je dělitelem a , pokud existuje takové celé y , že $y * x = a$)
 - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
 - druhou mocninu ($a^2 = a * a$)

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
 - celá čísla ($1, 2, 3, \dots, 0, -1, -2, \dots$)
 - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
 - dělitele (x je dělitelem a , pokud existuje takové celé y , že $y * x = a$)
 - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
 - druhou mocninu ($a^2 = a * a$)
 - druhou odmocninu ($\sqrt{a} = n$, pokud

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
 - celá čísla ($1, 2, 3, \dots, 0, -1, -2, \dots$)
 - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
 - dělitele (x je dělitelem a , pokud existuje takové celé y , že $y * x = a$)
 - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
 - druhou mocninu ($a^2 = a * a$)
 - druhou odmocninu ($\sqrt{a} = n$, pokud $n * n = a$)

Ukázka důkazu

■ Věta

- pro libovolná celá x, y platí, že
- pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé



Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že y je liché

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že y je liché
 - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že y je liché
 - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
 - dosazením do původní věty dostáváme:
 - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že y je liché
 - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
 - dosazením do původní věty dostáváme:
 - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
 - dále roznásobíme závorku:
 - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že y je liché
 - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
 - dosazením do původní věty dostáváme:
 - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
 - dále roznásobíme závorku:
 - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 - vytkneme 2 z části pravé strany:
 - $2x^2 = 2 * (2k^2 + 2k) + 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že y je liché
 - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
 - dosazením do původní věty dostáváme:
 - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
 - dále roznásobíme závorku:
 - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 - vytkneme 2 z části pravé strany:
 - $2x^2 = 2 * (2k^2 + 2k) + 1$
 - odečtením výrazu $2 * (2k^2 + 2k)$ a vytknutím 2 z levé strany dostaneme:
 - $2 * (x^2 - (2k^2 + 2k)) = 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že y je liché
 - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
 - dosazením do původní věty dostáváme:
 - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
 - dále roznásobíme závorku:
 - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 - vytkneme 2 z části pravé strany:
 - $2x^2 = 2 * (2k^2 + 2k) + 1$
 - odečtením výrazu $2 * (2k^2 + 2k)$ a vytknutím 2 z levé strany dostaneme:
 - $2 * (x^2 - (2k^2 + 2k)) = 1$
 - tedy 1 je sudé číslo, což je spor.

Ukázka důkazu

- Věta
 - $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
 - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
 - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
 - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
 - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
 - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
 - $2 * s^2 = r^2$

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
 - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
 - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
 - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
 - $2 * s^2 = r^2$
 - tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c

Ukázka důkazu

■ Důkaz (sporem)

- předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
- tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
- úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
- $2 * s^2 = r^2$
- tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
- nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$

Ukázka důkazu

■ Důkaz (sporem)

- předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
- tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
- úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
- $2 * s^2 = r^2$
- tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
- nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$
- $s^2 = 2 * c^2$

Ukázka důkazu

■ Důkaz (sporem)

- předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
- tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
- úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
- $2 * s^2 = r^2$
- tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
- nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$
- $s^2 = 2 * c^2$
- tedy s je také sudé

Ukázka důkazu

■ Důkaz (sporem)

- předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
- tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
- úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
- $2 * s^2 = r^2$
- tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
- nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$
- $s^2 = 2 * c^2$
- tedy s je také sudé
- r i s jsou sudá, tedy mají společného dělitele 2, což je spor s předpokladem.