Vlny – 3

Superpozice a interference vln.

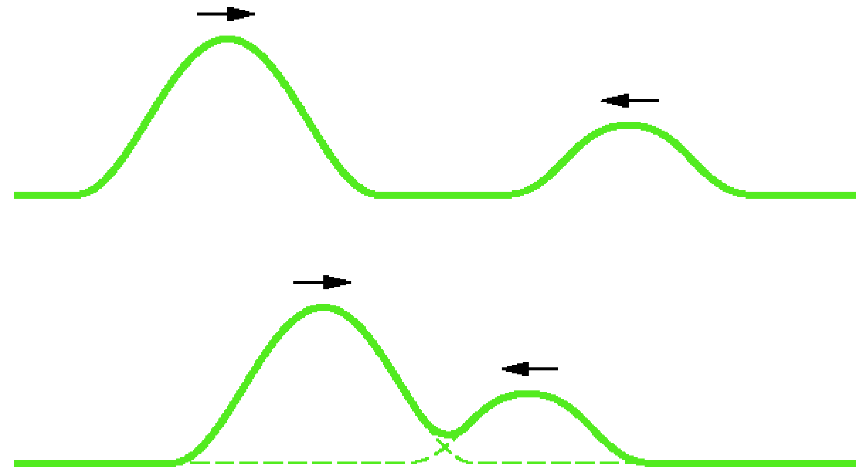
Stojaté vlny. Zázněje – rázy.

Fourierova řada, Fourierova transformace.

Dopplerův jev.

Princip superpozice

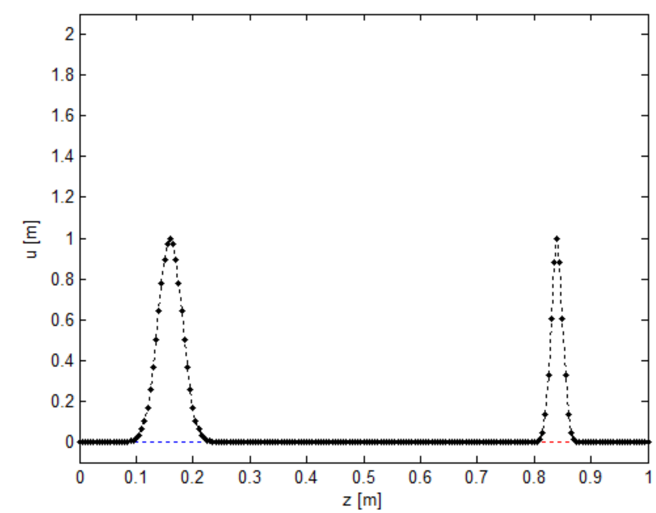
Prostředím postupují současně dvě (nebo více) různé vlny.



$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t).$$

U překrývajících se vln se výchylky algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu.

Překrývající se vlny se při svém postupu navzájem neovlivňují.



Interference vln

Dvě harmonické vlny o stejné amplitudě, stejné frekvenci a stejné vlnové délce vzájemně fázově posunuté o φ **postupující ve stejném směru**:

$$y_1(x,t) = y_m \sin(\omega t - kx) \qquad y_2(x,t) = y_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Výsledná vlna se vypočítá jako součet výchylek vstupních vln:

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = y_m \sin(\omega t - kx) + y_m \sin(\omega t - kx + \varphi) = \left(2 y_m \cos \frac{1}{2}\varphi\right) \sin\left(\omega t - kx + \frac{1}{2}\varphi\right)}$$

(užije se vzorec pro součet dvou funkcí sinus)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

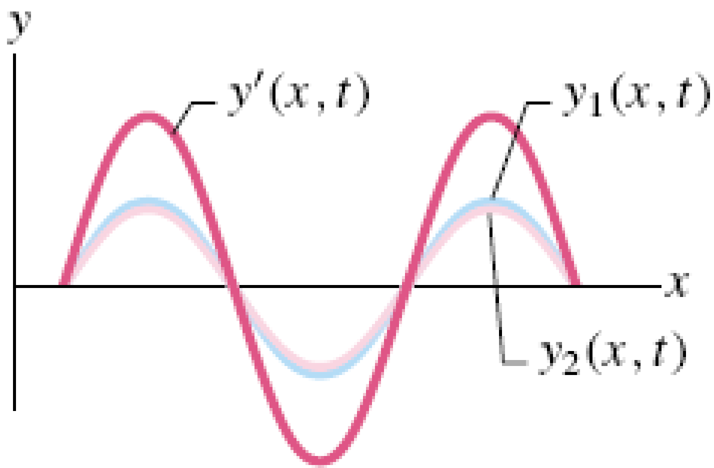
Vzniká sinusová vlna stejné frekvence (stejné ω) a vlnové délky (stejné k) postupující ve směru původních vln

Amplituda výsledné vlny: $$\boxed{y'_m = 2 y_m \cos\frac{1}{2}\varphi}$$

Závisí na vzájemném **fázovém posuvu** původních vln

Interference vln

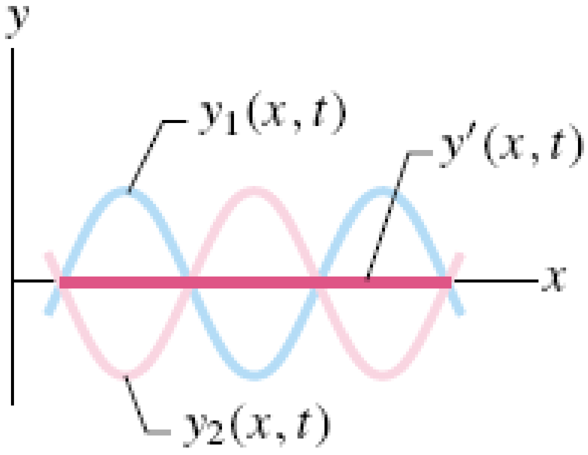
Pro $\boxed{\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$ (**vlny ve fázi**) je $y_m' = 2y_m \cos 0 = 2y_m$



(maximální zesílení)

Konstruktivní interference

Pro $\boxed{\varphi = \pi(2m+1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$ (**vlny v opačné fázi**) je



$$y_m' = 2y_m \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

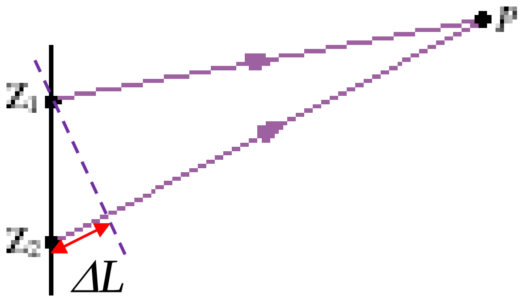
(maximální zeslabení)

Destruktivní interference

Interference vln

Fázový rozdíl může vzniknout i tak, že se **dvě vlny šíří po různě dlouhých drahách**.

Příklad – dva bodové zdroje Z_1, Z_2 zvukového vlnění o vlnové délce λ a frekvenci ω, které jsou ve fázi.



V bodě P dochází k interferenci vlnění

Platí

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}$$

ΔL je **dráhový rozdíl vln**, φ je jejich fázový rozdíl v bodě P

Konstruktivní interference

$$\boxed{\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

Destruktivní interference

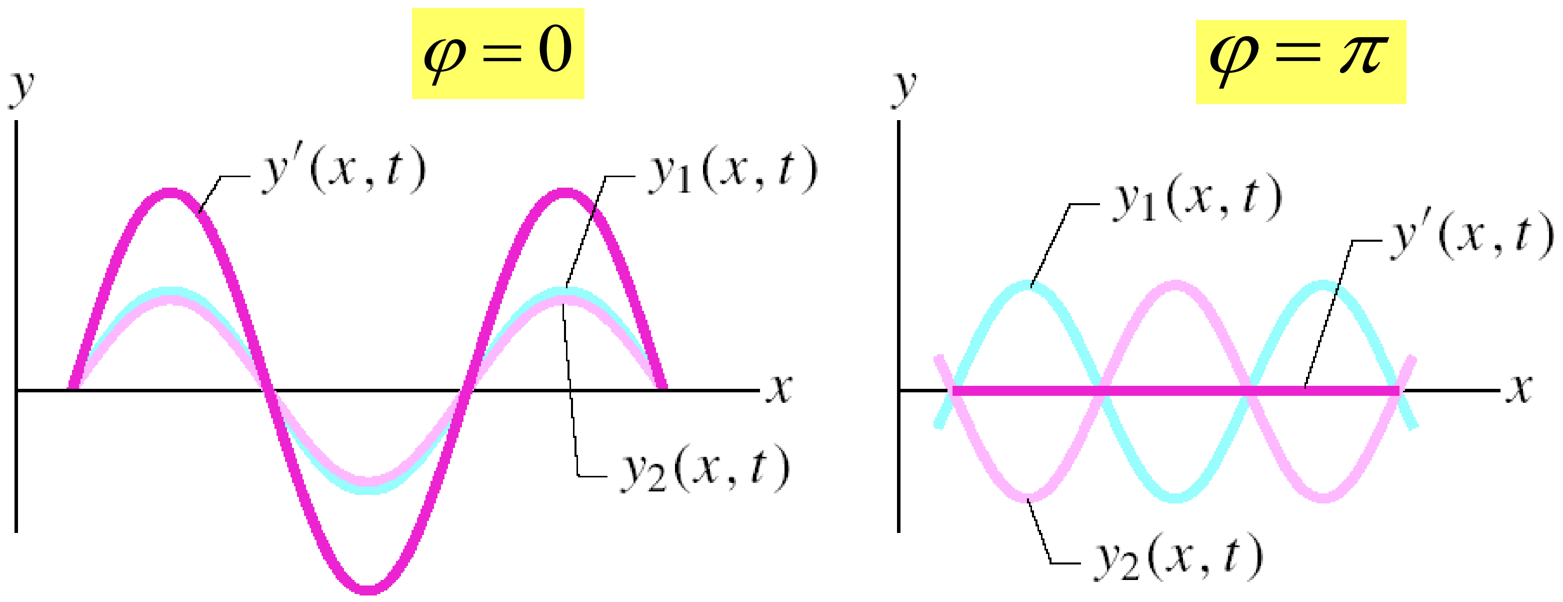
$$\boxed{\varphi = \pi(2m+1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

Interference vln

Tabulka 17.1 Fázové rozdíly a jim odpovídající druh interference[a]

Fázový rozdíl ve stupních	Fázový rozdíl v radiánech	Dráhový rozdíl ve vln. délkách	Amplituda výsledné vlny	Druh interference
0	0	0	$2y_m$	úplně konstruktivní
120	$2\pi/3$	0,33	y_m	částečná
180	π	0,50	0	úplně destruktivní
240	$4\pi/3$	0,67	y_m	částečná
360	2π	1,00	$2y_m$	úplně konstruktivní
865	15,1	2,40	$0{,}60y_m$	částečná

$$y'(x,t)=[2y_m\cos(\varphi/2)]\sin(kx-\omega t+\varphi/2)$$



Interference vln

POZNÁMKA !!

Aby **interference** vlnění byla **pozorovatelná**, je nutné, aby **rozdíl fází** interferujících vlnění byl v každém bodě interferenčního pole **konstantní,** na čase nezávislý**.**
Vlnění, která tuto podmínku splňují, nazýváme **koherentní.**

Poznámka 2:

Dojde-li k **interferenci aniž dojde k odchylce od přímočarého šíření** vlnění (v homogenním a izotropním prostředí), pak takový jev nazýváme **jevem ryze interferenčním** (světlo – interference na tenké vrstvě)

Dojde –li (v prostředí homogenním a izotropním) k **interferenci v prostoru přímočarému šíření vlnění nepřístupném** (v tzv. geometrickém stínu), nazýváme takový jev **jevem ohybovým (difrakčním)** (světlo – průchod štěrbinou).

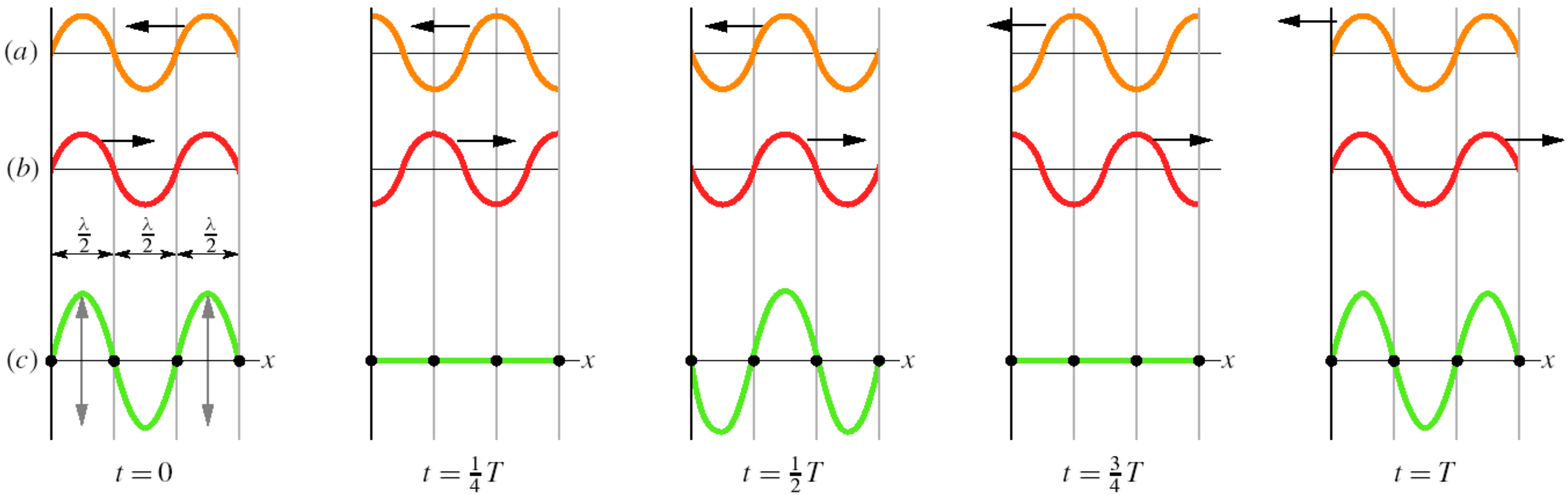
Stojaté vlny

Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně *opačným* směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$

$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y'(x,t) = (2y_m \sin kx)\cos \omega t$$



Stojaté vlny

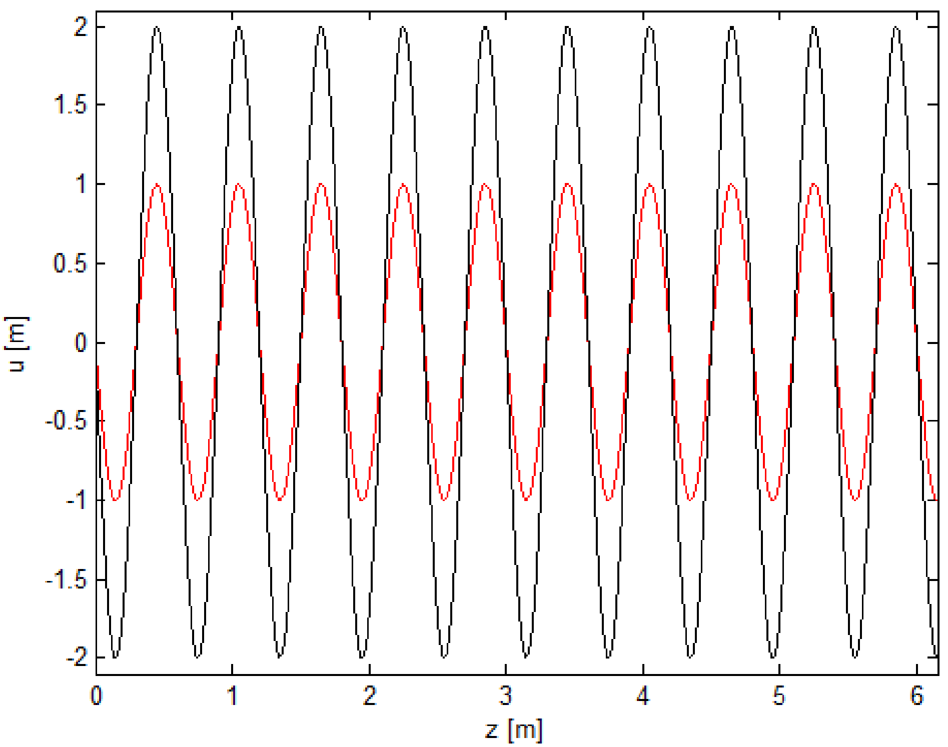
Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně *opačným* směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$
$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y'(x,t) = \underbrace{(2y_m \sin kx)}_{\text{Amplituda výchylky bodu se souřadnicí } x} \cos \omega t$$

Amplituda výchylky bodu se souřadnicí x

Všechny body prostředí kmitají se stejnou úhlovou frekvencí ω



Stojaté vlny

Odvození:

Užijeme

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$
$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$2\sin\frac{kx-\omega t + kx + \omega t}{2}\cos\frac{kx-\omega t - kx - \omega t}{2} =$$
$$= 2\sin kx \cos(-\omega t) = 2\sin kx \cos \omega t$$

Stojaté vlny

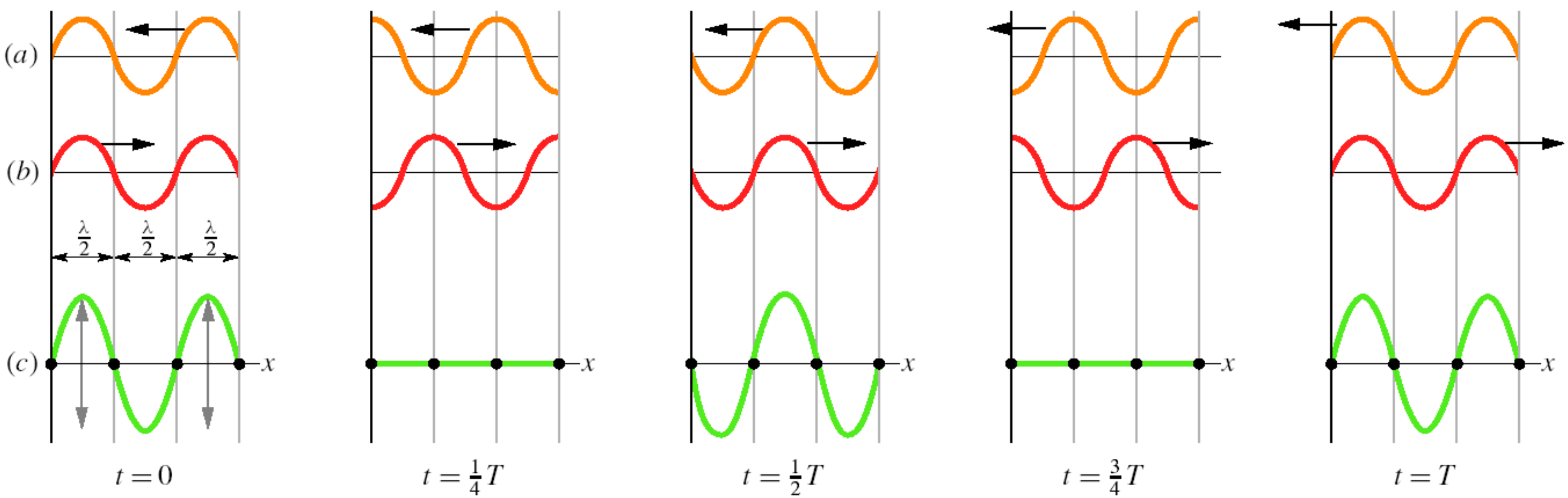
Všechny **částice** prostředí **kmitají se stejnou fází** ωt

ale **s různou amplitudou výchylky**, která závisí na x-ové souřadnici kmitající částice

$$\boxed{A(x) = 2y_m \sin kx}$$

$\sin(kx) = 0 \rightarrow$ uzly

$\sin(kx) = 1 \rightarrow$ kmitny



Stojaté vlny

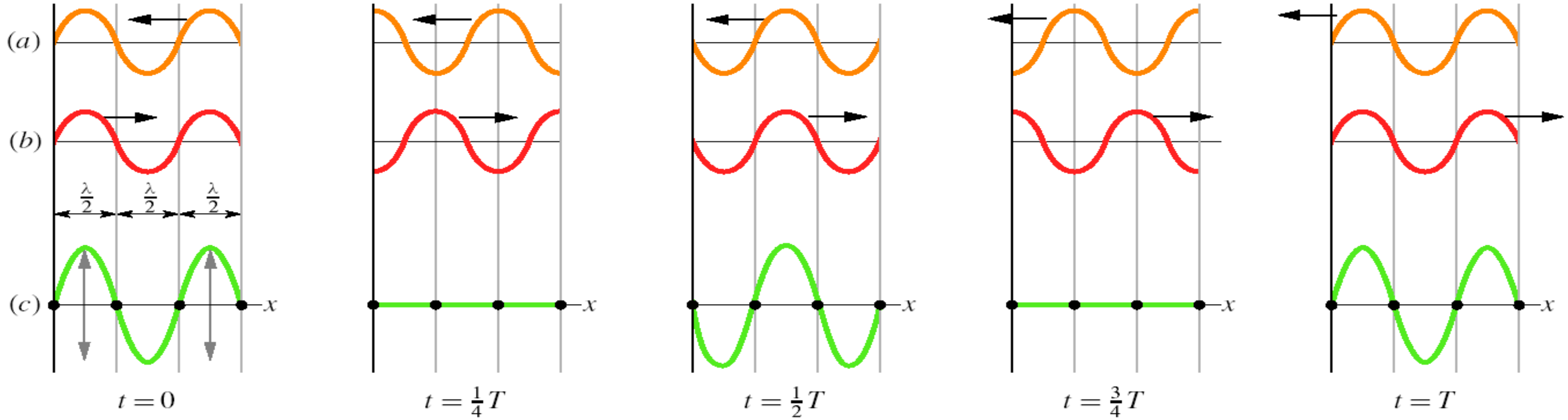
Místa se stále nulovou výchylkou – **uzly.** Jejich souřadnice x_n určíme následovně:

$$kx = n\pi \Longrightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} \rightarrow x_n = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad \text{uzly}$$

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{k} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} =$$

$$= \frac{2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{2\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{(2n+1)\pi}{\frac{4\pi}{\lambda}} \rightarrow x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad \text{kmitny}$$

Místa, která kmitají s maximální amplitudou $2y_m$ - **kmitny**

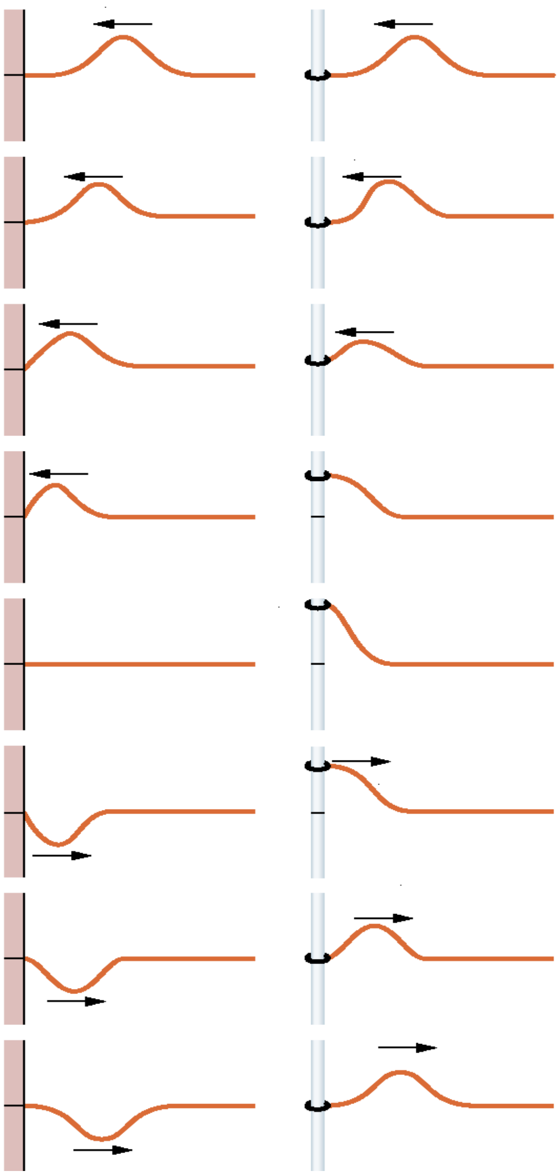


Stojaté vlny

Vznik stojaté vlny odrazem

- pevný konec - uzel - odražená vlna má opačnou fázi

- volný konec - kmitna - odražená vlna má stejnou fázi



KONTROLA 5: Uvažme interferenci dvou vln stejné amplitudy a vlnové délky. Výsledná vlna má rovnici (1) $y'(x,t) = 4\sin(5x - 4t)$, (2) $y'(x,t) = 4\sin(5x)\cos(4t)$ a (3) $y'(x,t) = 4\sin(5x + 4t)$. Která z těchto rovnic popisuje výslednou vlnu v situaci, kdy se výchozí vlny šíří (a) obě ve směru osy x, (b) obě proti směru osy x a (c) v opačných směrech?

Skládání kmitů - rázy

Prostředím postupují současně dvě zvukové vlny, které mají různou frekvenci f_1 a f_2. V místě pozorovatele (detektoru) se skládají výchylky/kmity – důsledek dvou postupných vln, které dospěly do bodu se souřadnicí *x*.
Hledáme výslednou výchylku:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1(t) = y_m \sin(\omega_1 t) \qquad y_2(t) = y_m \sin(\omega_2 t)$$

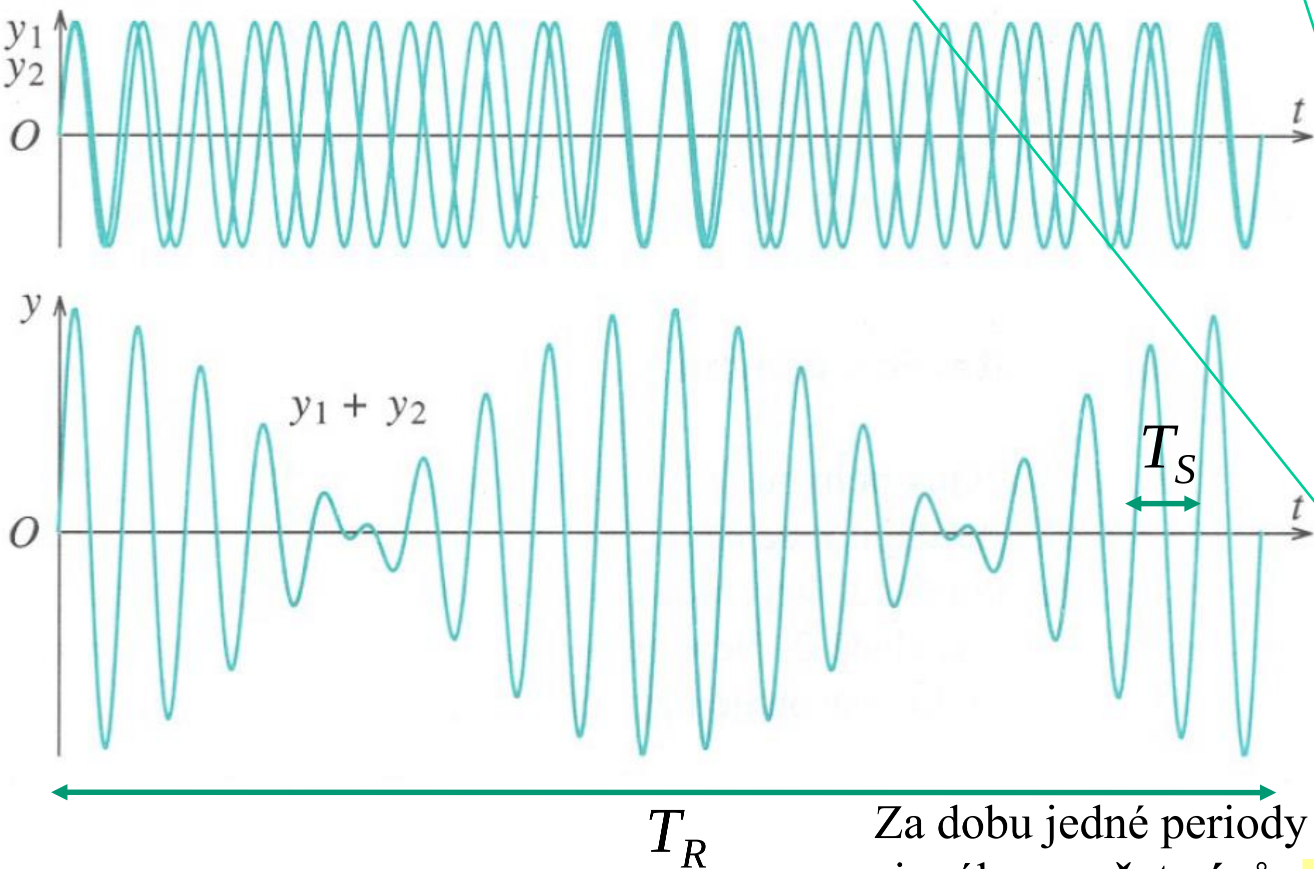
V případě, že frekvence f_1 a f_2 jsou různé, ale blízké, tj. $f_1 \neq f_2$ ale $f_1 \rightarrow f_2$ (mají „skoro“ stejnou hodnotu, neliší se o víc než 20 Hz) může dojít ke vzniku **rázů** – slyšíme **zesilování a zeslabování výsledného signálu**.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = y_m\,(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$$

$$y(t) = 2y_m \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}_{\omega_R} t\right) \sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega_S} t\right)$$

Skládání kmitů - rázy

$$y(t) = 2y_m \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}_{\omega_R} t\right) \sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega_S} t\right)$$



$\omega_1 = 2\pi f_1$

$\omega_2 = 2\pi f_2$

Frekvence výsledného signálu f_S:

$\omega_S = (\omega_1 + \omega_2)/2$

$\boxed{f_S = (f_1 + f_2)/2 = 1/T_S}$

Amplituda výsledného signálu kolísá s frekvencí f_R:

$\omega_R = (\omega_1 - \omega_2)/2$

$\boxed{f_R = (f_1 - f_2)/2 = 1/T_R}$

Za dobu jedné periody T_R slyšíme 2x nejsilnější signál → **počet rázů**: $\boxed{N = 2f_R = (f_1 - f_2)}$

Princip superpozice

Fourierova transformace

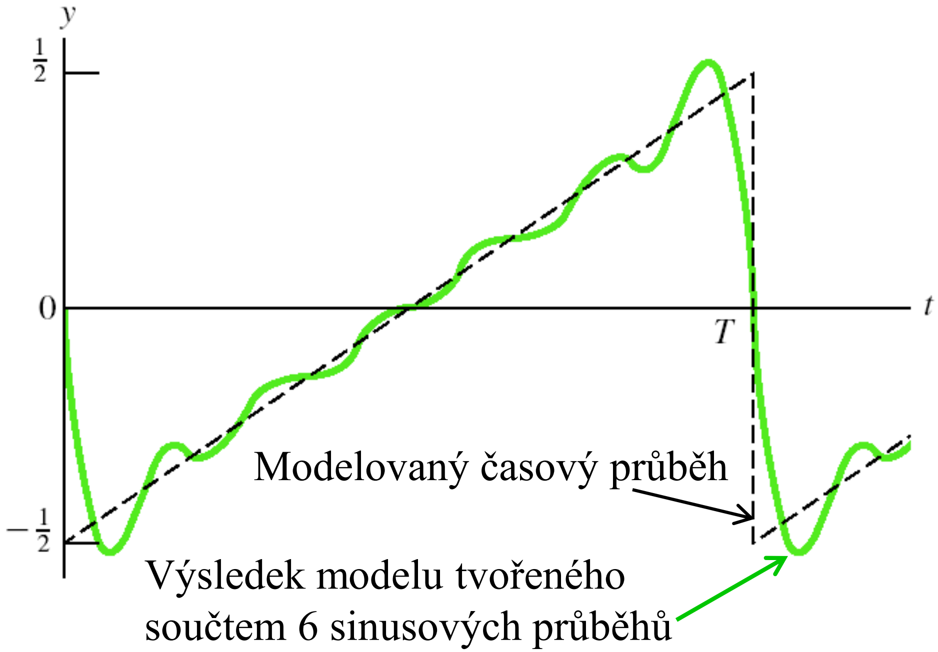
Joseph Fourier (1768-1830)

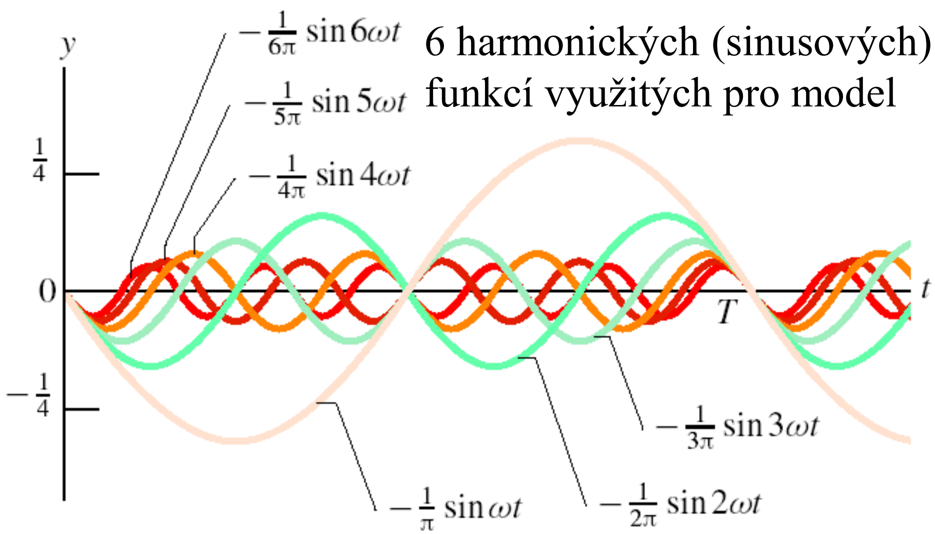
Francouzský matematik, který přišel na to, že jakýkoli impuls může být složen ze sinusových a kosinusových impulsů. Položil tak základy teorie trigonometrických řad. Nezanedbatelný byl také jeho přínos k teorii funkcí reálné proměnné. Studoval podrobně problémy matematické fyziky. V roce 1822 vytvořil matematickou teorii, která řešila diferenciální rovnice. Théorie Analytique de la Chaleur (Analytic Theory of Heat).

Fourier věřil, že mu při nějaké nemoci pomůže bylinkový zábal a takto zabalen spadl dolů ze schodů a zabil se...

Princip superpozice

Fourierova analýza





Vlnu libovolného tvaru lze vyjádřit ve tvaru **součtu velkého počtu sinusových vln**.

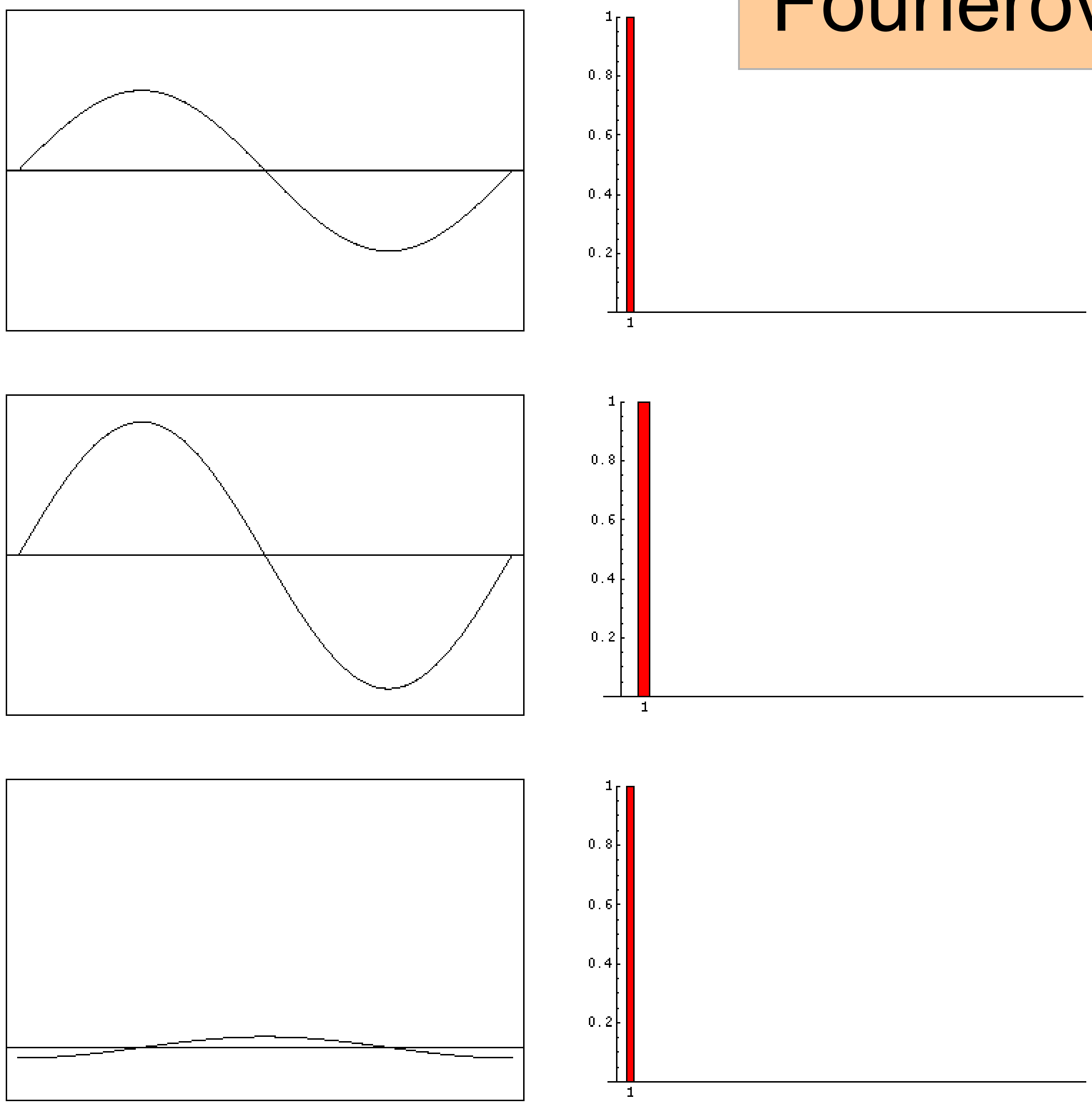
$$\omega = 2\pi/T$$

$$y = -\frac{1}{\pi}\sum_n \frac{1}{n}\sin(n\omega t)$$

Potřebujeme najít vhodnou kombinaci jejich amplitud a frekvencí. Potom dovedeme namodelovat libovolný časový průběh. Čím větší bude počet harmonických funkcí v modelu, tím přesnější výsledek dostaneme.

Princip superpozice

Fourierova analýza



Princip superpozice

Fourierova řada a transformace

řada: na konečném intervalu (sumace)
transformace: v neomezeném prostředí (integrace)

Fourierova transformace je složení obecné vlny z rovinných vln

Fourierova řada je složení konečného pulsu ze sinů a kosinů

$$f(t) = \sum_n c_n \, \mathrm{e}^{i\omega_n t}$$

$$f(x) = \sum_n c_n \, \mathrm{e}^{i k_n x}$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, \mathrm{e}^{i k x}\, dk$$

$$\psi(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}\, dk\, d\omega$$

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega$$

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, \mathrm{e}^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega(\mathbf{k})t]}\, d^3k$$

Mocninné řady funkcí e, sin, cos $\Rightarrow$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dopplerův jev

- **Dopplerův jev**
- **využití v praxi**
- **rázová vlna**

Christian Andreas Doppler (1803-1853)

Rakouský matematik a fyzik, část svého krátkého života strávil jako profesor ČVUT v Praze, později přednášel na Vídeňské polytechnice. Ve známost vešel především **objevem změny frekvence vlnění při vzájemném pohybu zdroje a pozorovatele** (Dopplerův princip). Publikoval také práce o elektřině a magnetismu, zabýval se časovou proměnností magnetické deklinace, napsal několik článků z optiky a astronomie.

Dopplerův jev

zdroj i pozorovatel v klidu

$$\boxed{f = f_0 = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}}$$

f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku

Dopplerův jev

pozorovatel se hýbe

f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku
v_D – rychlost detektoru

$$\boxed{f = \frac{v \pm v_D}{\lambda}} \Rightarrow \boxed{f = f_0 \frac{v \pm v_D}{v}}$$

Dopplerův jev

zdroj se hýbe

f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku
v_z – rychlost zdroje

$$f = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v \mp v_z)T} \Longrightarrow f = f_0 \frac{v}{v \mp v_z}$$

Dopplerův jev

zdroj i pozorovatel se hýbe

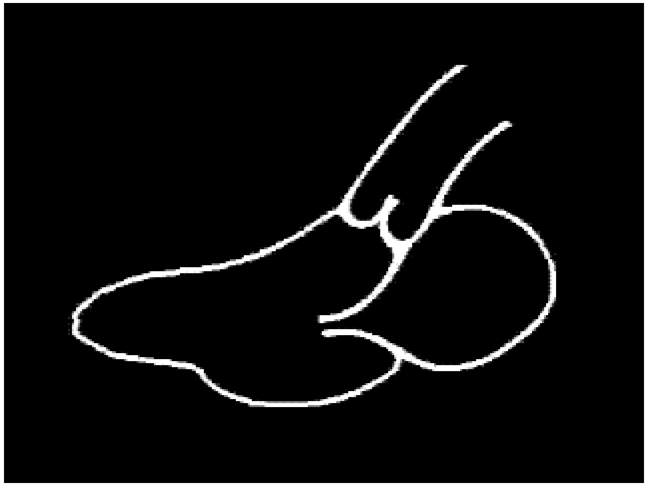
f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku
v_D – rychlost detektoru
v_Z – rychlost zdroje

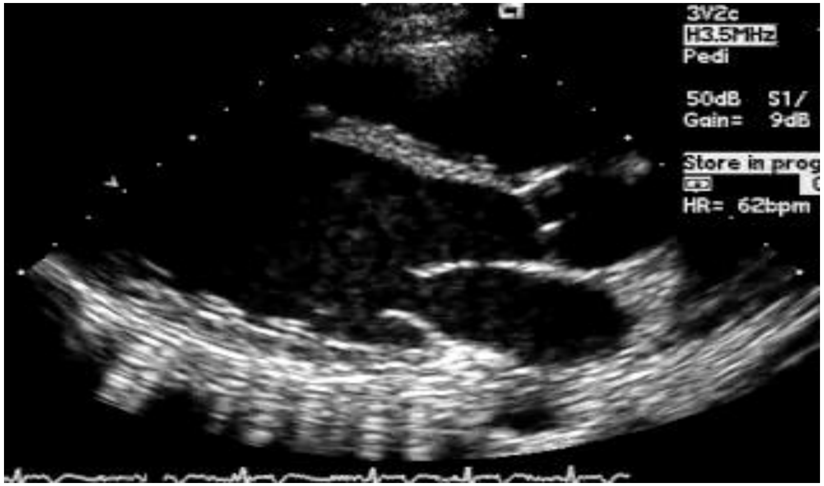
$$f = \frac{v \pm v_D}{(v \mp v_z)T} \Longrightarrow f = f_0 \frac{v \pm v_D}{v \mp v_z}$$

Dopplerův jev

využití v praxi

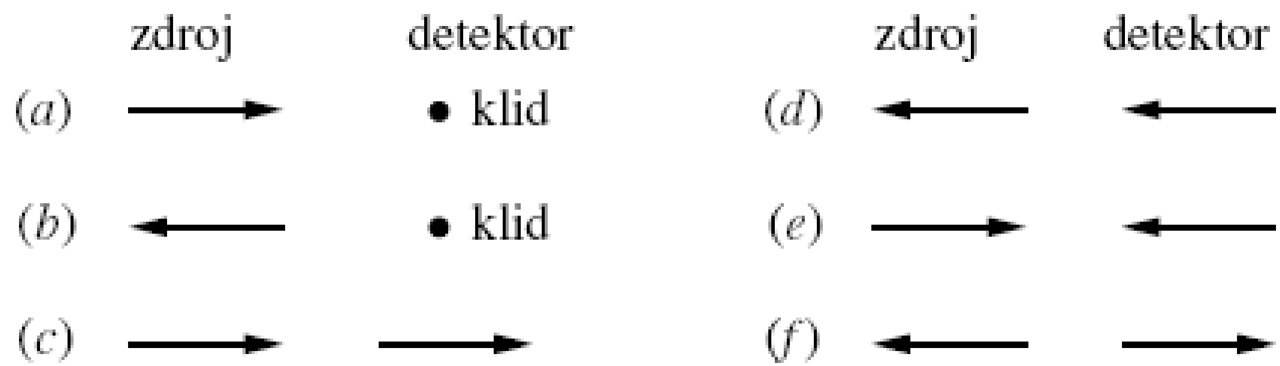
- **měření rychlosti radarem**
- **echokardiografie**
- **určování vzdáleností v astronomii**





University of Yale

KONTROLA 6: Obrázek znázorňuje pohyb detektoru a zdroje zvuku pro šest situací v klidném vzduchu.



Pro každou situaci rozhodněte, jestli bude změřena frekvence vyšší, nebo nižší než vyslaná frekvence, nebo zda to nemůžeme určit bez dalších informací.

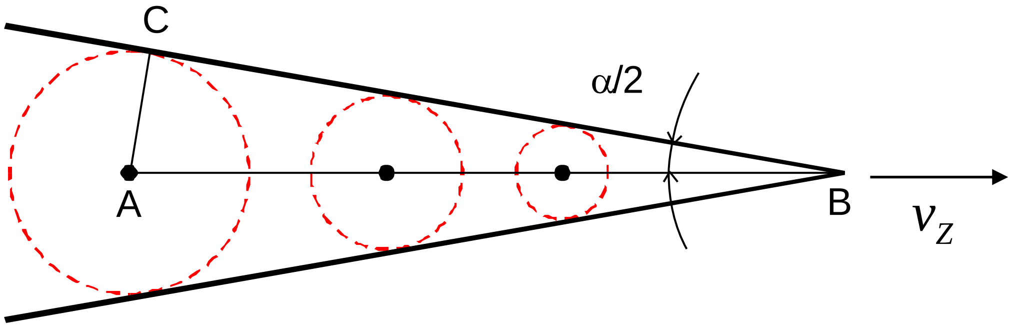
Dopplerův jev

Rázová vlna

v .. rychlost zvuku
v_Z .. rychlost zdroje

$v_z = v$

Machův kužel



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{vt}{v_z t} = \frac{v}{v_z}$$

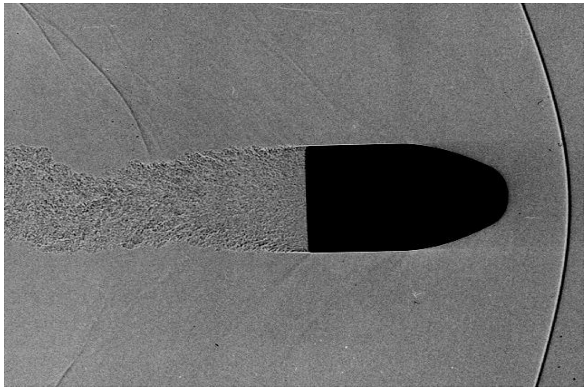
(Machův úhel)

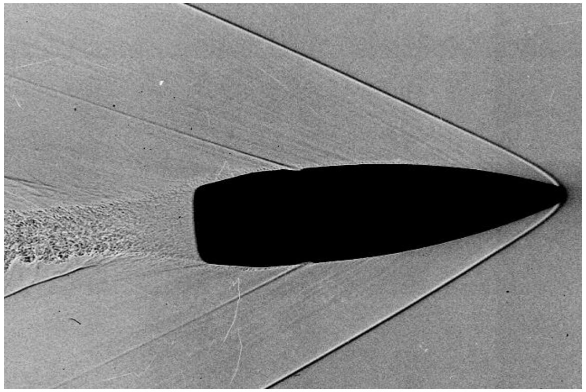
$v_z > v$

Dopplerův jev

Rázová vlna

Podzvuková a nadzvuková rychlost střely.





$$\frac{v_Z}{v} = \text{Machovo číslo}$$

Stíhačka F/A-18C Hornet při překročení zvukové bariery

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:FA-8_Hornet_breaking_sound_barrier_%287_July_1999%29.jpg