

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory

I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 4

Obsah přednášky

- 1 Čísla
- 2 Přirozená čísla
- 3 Další číselné množiny

Čísla – znalosti ze SŠ

■ Číselné množiny

- přirozená čísla $N = \{0, 1, \dots\}$
- celá čísla $Z = N \cup \{-1, -2, \dots\}$
- racionální čísla $Q = \{r/s \mid r, s \in Z \wedge s \neq 0\}$
- reálná čísla – „celá číselná osa“
- komplexní čísla – „pokrývají rovinu“

■ Náš cíl

- všechny objekty v matematice jsou množiny
- \rightarrow definice čísel s pomocí množin
- definice číselných operací

Přirozená čísla

- Přirozená čísla
 - formálně definována jako objekt splňující nějaké axiomy
 - tzv. Peanova aritmetika
- Axiomy přirozených čísel
 - existuje nula
 - každé číslo x má následníka $S(x)$
 - nula není následníkem žádného čísla
 - různá čísla mají různé následníky:
 $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$
 - všechna čísla jsou "potomky" nuly



Axiomy přirozených čísel

■ Ve formální logice

- $\exists x(x = 0)$
- $\forall x(\exists y(y = S(x)))$
- $\forall x(0 \neq S(x))$
- $\forall a, b(a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b))$
- $\forall K(0 \in K \wedge \forall x(x \in K \Rightarrow S(x) \in K) \Rightarrow \forall y(y \in K))$



Konstrukce přirozených čísel

- Definujeme množinový systém, který splňuje Peanovy axiomy
 - $0 \equiv \emptyset$
 - $S(x) \equiv x \cup \{x\}$
- Jak tedy čísla vypadají?
 - $0 \equiv \emptyset$
 - $1 = \{\emptyset\}$
 - $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - atd. – vždy $n = \{0, \dots, n - 1\}$

Číselné operace

- Definovány induktivně

- Sčítání

- $a + 0 = a$

- $a + S(b) = S(a + b)$

- Násobení

- $a * 0 = 0$

- $a * S(b) = (a * b) + a$

Příklad – sčítání podle definice

■ Definice sčítání

- $a + 0 = a$
- $a + S(b) = S(a+b)$

■ $1 + 2$

- $1 = S(0), 2 = S(1) = S(S(0))$

■ $1 + 2$

- $1 + S(1)$
- $S(1 + 1)$
- $S(1 + S(0))$
- $S(S(1 + 0))$
- $S(S(1))$
- $S(S(S(0)))$
- $= 3$

Další číselné množiny

- Jsou konstruovány s využitím dvojic a ekvivalencí
 - pojmy, které „neznáme“
 - → v následujících přednáškách