

*Není-li stanoveno jinak, dostává první, kdo odevzdá správně vyřešený úkol, uvedený počet bodů, každý další vždy o bod méně než předchozí.*

1. (5b.) Dokažte, že pro každé liché prvočíslo  $p$  existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$ , splňujících  $p \mid n \cdot 2^n + 1$ . (**body přiděleny**)
2. (2b. — *pouze pro prvního v pořadí*) Najděte nejmenší prvočíslo tvaru  $n \cdot 2^n + 1$ . (**vyřešeno** —  $n = 141$ )
3. (3b.) Nechť  $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ , kde  $(a, m) = 1$ . Dokažte, že je-li řád čísla  $a$  modulo  $m$  roven  $r$ , je pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  řád čísla  $a^n$  modulo  $m$  roven  $\frac{r}{(r, n)}$ . (**body přiděleny**)
4. (5b.) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho lichých přirozených čísel  $k$  s vlastností, že čísla  $2^{2^n} + k$  jsou složená pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .
5. (10b. — *pouze pro prvního*) Dokažte, že pro každé celé číslo  $k \neq 1$  existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$  s vlastností, že číslo  $2^{2^n} + k$  je složené.
6. (5b.) Dokažte, že pro žádné  $n \in \mathbb{N}, n > 1$  neplatí  $n \mid 2^n - 1$ .