9. Neparametrické testy o mediánech

9.1. Motivace

Při používání t-testů či analýzy rozptylu by měl být splněn předpoklad normality dat. Pro výběry větších rozsahů ($n \geq 30$) nemá mírné porušení normality závažný dopad na výsledky. Někdy se však setkáváme s výběry malých rozsahů, které pocházejí z výrazně nenormálních rozložení. Pro práci s nimi byly vytvořeny tzv. neparametrické testy, které nevyžadují předpoklad o konkrétním typu rozložení (např. normálním), stačí např. předpokládat, že distribuční funkce rozložení, z něhož náhodný výběr pochází, je spojitá.

Tyto neparametrické testy se rovněž používají v situacích, kdy zkoumaná data nemají intervalový či poměrový charakter, ale pouze ordinální charakter.

Ve srovnání s klasickými parametrickými testy jsou však neparametrické testy slabší, tzn., že nepravdivou hypotézu zamítají s menší pravděpodobností než testy parametrické.

V této kapitole se omezíme na ty neparametrické testy, které jsou založeny na pořadí a týkají se mediánů. Nazývají se pořadové testy.

9.2. Uspořádaný náhodný výběr, vektor pořadí a jeho vlastnosti

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr.

a) Vektor $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})$, kde $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$ se nazývá uspořádaný náhodný výběr a statistika $X_{(i)}$ se nazývá i-tá pořádková statistika, $i = 1, ..., n$.

b) Pořadím R_i statistiky X_i rozumíme počet těch náhodných veličin $X_1, ..., X_n$, které nabývají hodnoty menší nebo rovné X_i, tj. $R_i = \mathrm{card}\{j; X_j \leq X_i\}$. Zavedeme-li funkci $u(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } x \geq 0 \\ 0 \text{ pro } x < 0 \end{cases}$, pak $R_i = \sum_{j=1}^{n} u(X_i - X_j)$. Náhodný vektor $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_n)$ se nazývá vektor pořadí.

c) Pokud neuvažujeme shodná pozorování (tj. když náhodný výběr pochází ze spojitého rozložení – pak se shodná pozorování vyskytují s pravděpodobností 0), je vektor pořadí permutací posloupnosti (1, ..., n) a má rovnoměrné diskrétní rozložení na množině všech permutací posloupnosti (1, ..., n). Náhodná veličina R_i má rovnoměrné diskrétní rozložení na množině $\{1, \dots, n\}$, tedy $E(R_i) = (n+1)/2$, $D(R_i) = (n^2-1)/12$.

Upozornění: V praxi se může stát, že některá pozorování jsou si rovna a vytvářejí skupiny shodných čísel. Pak těmto shodným číslům přiřadíme průměrné pořadí odpovídající takové skupině.

9.3. Jednovýběrové pořadové testy (neparametrické obdoby jednovýběrových a párových t-testů)

9.3.1. Znaménkový test

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení se spojitou distribuční funkcí $\Phi(x)$. Nechť $x_{0,50}$ je mediánem tohoto rozložení, tj. $\Phi(x_{0,50}) = 0,5$. Nechť c je reálná konstanta. Testujeme hypotézu H_0: $x_{0,50} = c$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq c$ (resp. proti levostranné alternativě H_1: $x_{0,50} < c$ resp. proti pravostranné alternativě H_1: $x_{0,50} > c$). Utvoříme rozdíly $Y_i = X_i - c$, $i = 1, ..., n$. (Jsou-li některé rozdíly nulové, pak za n bereme jen počet nenulových hodnot.)

Zavedeme statistiku S_Z^+, která udává počet těch rozdílů, které jsou kladné. Platí-li H_0, pak $S_Z^+ \sim Bi(n,½)$, tedy $E(S_Z^+) = n/2$, $D(S_Z^+) = n/4$. Kritický obor budou tvořit ty hodnoty testové statistiky S_Z^+, které jsou blízké 0 nebo n, tedy $W = \langle 0, k_1 \rangle \cup \langle k_2, n \rangle$. Pro $n \leq 20$ a $\alpha = 0{,}05$ či $0{,}01$ jsou tabelované kritické hodnoty k_1, k_2. H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $S_Z^+ \in W$.

Pro velká n (prakticky $n > 20$) lze využít asymptotické normality statistiky S_Z^+. Testová statistika $U_0 = \dfrac{S_Z^+ - E(S_Z^+)}{\sqrt{D(S_Z^+)}} = \dfrac{S_Z^+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$ má za platnosti H_0 asymptoticky rozložení N(0,1). Kritický obor pro oboustrannou alternativu má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$. (Analogicky pro jednostranné alternativy.) H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Aproximace rozložením N(0,1) se zlepší, když použijeme tzv. korekci na nespojitost. Testová statistika pak má tvar $U_0 = \dfrac{S_Z^+ - \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$, přičemž ½ přičteme, když $S_Z^+ < n/2$ a odečteme v opačném případě.

Postup při párovém testu: Nechť $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n Y_n)$ je náhodný výběr ze spojitého dvourozměrného rozložení. Testujeme H_0: $x_{0,50} - y_{,50} = c$ proti H_1: $x_{0,50} - y_{0,50} \neq c$ (resp. proti jednostranným alternativám). Utvoříme rozdíly $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \ldots, n$ a testujeme hypotézu o mediánu $z_{0,50}$, tj. H_0: $z_{0,50} = c$ proti H_1: $z_{0,50} \neq c$.

Příklad: K zjištění cenových rozdílů mezi určitými dvěma druhy zboží bylo náhodně vybráno 15 prodejen. Na hladině významnosti 0,05 je třeba testovat hypotézu, že medián cenových rozdílů činí 3 Kč.

č. prodejny	cena zboží A	cena zboží B	rozdíl	rozdíl-medián
1	10,00	11,00	1,00	-2,00
2	11,00	14,00	3,00	0,00
3	8,60	11,40	2,80	-0,20
4	9,50	13,00	3,50	0,50
5	8,50	11,00	2,50	-0,50
6	9,00	10,00	1,00	-2,00
7	9,00	11,90	2,90	-0,10
8	8,50	10,50	2,00	-1,00
9	11,00	12,00	1,00	-2,00
10	9,40	11,50	2,10	-0,90
11	10,50	13,50	3,00	0,00
12	10,20	13,60	3,40	0,40
13	12,00	14,70	2,70	-0,30
14	15,00	18,60	3,60	0,60
15	12,20	14,40	2,20	-0,80

Řešení: Jedná se o párový test. Testová statistika S_Z^+ nabývá hodnoty 3, počet nenulových rozdílů je 13. Ve statistických tabulkách najdeme pro $n = 13$ a $\alpha = 0{,}05$ kritické hodnoty $k_1 = 2$, $k_2 = 11$. Protože kritický obor $W = \langle 0,2 \rangle \cup \langle 11,13 \rangle$ neobsahuje hodnotu 3, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05.

9.3.2. Jednovýběrový Wilcoxonův test

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení s hustotou $\varphi(x)$, která je symetrická kolem mediánu $x_{0,50}$, tj. $\varphi(x_{0,50} + x) = \varphi(x_{0,50} - x)$. Nechť c je reálná konstanta. Testujeme hypotézu H_0: $x_{0,50} = c$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq c$ (resp. proti levostranné alternativě H_1: $x_{0,50} < c$ resp. proti pravostranné alternativě H_1: $x_{0,50} > c$).

Utvoříme rozdíly $Y_i = X_i - c$, $i = 1, ..., n$. (Jsou-li některé rozdíly nulové, pak za n bereme jen počet nenulových hodnot.)

Absolutní hodnoty $|Y_i|$ uspořádáme vzestupně podle velikosti a spočteme pořadí R_i.

Zavedeme statistiku $S_W^+ = \sum_{Y_i>0} R_i^+$, což je součet pořadí přes kladné hodnoty Y_i.

Analogicky zavedeme statistiku $S_W^- = \sum_{Y_i<0} R_i^-$, což je součet pořadí přes záporné hodnoty Y_i. Přitom platí, že součet $S_W^+ + S_W^- = n(n+1)/2$. Za platnosti H_0 statistika S_W^+ má střední hodnotu $E(S_W^+) = n(n+1)/4$ a rozptyl $D(S_W^+) = n(n+1)(2n+1)/24$.

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když testová statistika je menší nebo rovna tabelované kritické hodnotě. Testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-)$ pro oboustrannou alternativu, = S_W^+ pro levostrannou alternativu, = S_W^- pro pravostrannou alternativu.

Pro $n \geq 30$ lze využít asymptotické normality statistiky S_W^+. Platí-li H_0, pak

$U_0 = \dfrac{S_W^+ - E(S_W^+)}{\sqrt{D(S_W^+)}} = \dfrac{S_W^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \approx N(0,1)$. Kritický obor pro oboustrannou alternativu má tvar: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$. (Analogicky pro jednostranné alternativy.) H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Jednovýběrový Wilcoxonův test lze snadno modifikovat i na test párový stejným způsobem jak bylo popsáno u znaménkového testu.

Ve srovnání se znaménkovým testem je Wilcoxonův test silnější. Hodí se však jen pro výběr ze symetrického rozložení.

Příklad: Pro data z předešlého příkladu použijte párový Wilcoxonův test.

Řešení:

č. prodejny	cena zboží A	cena zboží B	rozdíl	|rozdíl-medián|	pořadí
1	10,00	11,00	1,00	2,00	12
2	11,00	14,00	3,00	0,00	-
3	8,60	11,40	2,80	0,20	2
4	9,50	13,00	3,50	**0,50**	**5,5**
5	8,50	11,00	2,50	0,50	5,5
6	9,00	10,00	1,00	2,00	12
7	9,00	11,90	2,90	0,10	1
8	8,50	10,50	2,00	1,00	10
9	11,00	12,00	1,00	2,00	12
10	9,40	11,50	2,10	0,90	9
11	10,50	13,50	3,00	0,00	-
12	10,20	13,60	3,40	**0,40**	**4**
13	12,00	14,70	2,70	0,30	3
14	15,00	18,60	3,60	**0,60**	**7**
15	12,20	14,40	2,20	0,80	8

Tučně jsou vytištěna pořadí pro kladné hodnoty rozdíl-medián.

$S_W^+ = 16{,}5$, $S_W^- = 74{,}5$, $n = 13$, $\alpha = 0{,}05$, tabelovaná kritická hodnota = 17, testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(16{,}5; 74{,}5) = 16{,}5$. Protože $16{,}5 \le 17$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

9.4. Dvouvýběrové pořadové testy (neparametrické obdoby dvouvýběrového t-testu)

9.4.1. Dvouvýběrový Wilcoxonův test

Nechť $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ jsou dva nezávislé náhodné výběry ze dvou spojitých rozložení, jejichž distribuční funkce se mohou lišit pouze posunutím. Označme $x_{0,50}$ medián prvního rozložení a $y_{0,50}$ medián druhého rozložení. Testujeme hypotézu, že distribuční funkce těchto rozložení jsou shodné neboli mediány jsou shodné proti alternativě, že jsou rozdílné.

Všech n + m hodnot $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ uspořádáme vzestupně podle velikosti. Zjistíme součet pořadí hodnot $X_1, ..., X_n$ a označíme ho T_1. Součet pořadí hodnot $Y_1, ..., Y_m$ označíme T_2. Vypočteme statistiky $U_1 = mn + n(n+1)/2 - T_1$, $U_2 = mn + m(m+1)/2 - T_2$. Přitom platí $U_1 + U_2 = mn$. Pokud $\min(U_1,U_2) \le$ tabelovaná kritická hodnota (pro dané rozsahy výběrů m, n a dané α), pak nulovou hypotézu o totožnosti obou distribučních funkcí zamítáme na hladině významnosti α.

Pro velká n, m (prakticky n, m > 30) lze využít asymptotické normality statistiky U_1. V případě platnosti H_0 má statistika $U_0 = \dfrac{U_1 - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}$ asymptoticky rozložení N(0,1). Kritický obor pro oboustrannou alternativu má tvar: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$. (Analogicky pro jednostranné alternativy.) H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Příklad: Bylo vybráno 10 polí stejné kvality. Na čtyřech z nich se zkoušel nový způsob hnojení, zbylých šest bylo ošetřeno starým způsobem. Pole byla oseta pšenicí a sledoval se její hektarový výnos. Je třeba zjistit, zda nový způsob hnojení má týž vliv na průměrné hektarové výnosy pšenice jako starý způsob hnojení.
hektarové výnosy při novém způsobu: 51 52 49 55
hektarové výnosy při starém způsobu: 45 54 48 44 53 50

Řešení:

usp. hodnoty	44	45	48	**49**	50	**51**	**52**	53	54	**55**
pořadí x-ových hodnot				4		6	7			10
pořadí y-ových hodnot	1	2	3		5			8	9	

$T_1 = 4 + 6 + 7 + 10 = 27$, $T_2 = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 9 = 28$
$U_1 = 4.6 + 4.5/2 - 27 = 7$, $U_2 = 4.6 + 6.7/2 - 28 = 17$
Kritická hodnota pro $\alpha = 0{,}05$, min(4,6) = 4, max(4,6) = 6 je 2. Protože min(7,17) > 2, nemůžeme na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že nový způsob hnojení má na hektarové výnosy pšenice stejný vliv jako starý způsob.

Upozornění: Ve STATISTICE je dvouvýběrový Wilcoxonův test uveden pod názvem Mannův – Whitneyův test.

9.4.2. Waldův – Wolfowitzův test

Nechť $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ jsou dva nezávislé náhodné výběry ze dvou spojitých rozložení. Testujeme hypotézu, že oba výběry pocházejí z téhož rozložení proti alternativě, že pocházejí z různých rozložení.

Všech n + m hodnot $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ uspořádáme vzestupně podle velikosti. Testovou statistikou je počet itercí R, tj. počet posloupností za sebou následujících hodnot patřících do téhož výběru. Jestliže R ≤ tabelovaná kritická hodnota (pro dané n,m a α), pak nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α.

Pro větší rozsahy výběrů (n, m > 20) lze využít asymptotické normality statistiky R. Platí-li nulová hypotéza, pak

$E(R) = \frac{2nm}{n+m} + 1$, $D(R) = \frac{2nm(2nm - n - m)}{(n+m)^2 (n+m-1)}$ a $U_0 = \frac{R - E(R)}{\sqrt{D(R)}} \approx N(0,1)$. Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \geq u_{1-\alpha/2}$.

Ve srovnání s dvouvýběrovým Wilcoxonovým testwm je Waldův – Wolfowitzův test slabší, ale dá se použít i v situacích, kdy se obě rozložení liší nejenom posunutím, ale např. také variabilitou, šikmostí či špičatostí.

Příklad: Jsou dány dva nezávislé náhodné výběry o rozsazích 10 a 12.
Hodnoty 1. výběru: 5 5 7 7 8 10 11 15 18 101
Hodnoty 2. výběru: 12 12 13 13 13 14 17 22 23 24 28 30.
Na hladině významnosti 0,05 rozhodněte Waldovým – Wolfowitzovým testem, zda oba výběry pocházejí z téhož rozložení.

Řešení:

Usp.h.	5	5	7	7	8	10	11	12	12	13	13	13	14
Č.výb.	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Č.iter.	1							2					

Usp.h.	15	17	18	22	23	24	28	30	101
Č.výb.	1	2	1	2	2	2	2	2	1
Č.iter.	3	4	5	6					7

Počet iterací: R = 7, n =10, m = 12, α = 0,05, tabelovaná kritická hodnota = 7. Protože testová statistika je rovna kritické hodnotě, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že oba výběry pocházejí z téhož rozložení.

9.4.3. Dvouvýběrový Kolmogorovův - Smirnovův test

Nechť $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ jsou dva nezávislé náhodné výběry ze dvou spojitých rozložení, jejichž distribuční funkce se mohou lišit nejenom posunutím, ale také tvarem. Testujeme hypotézu, že distribuční funkce těchto rozložení jsou shodné, tj., že všech n+m veličin pochází z téhož rozložení proti alternativě, že distribuční funkce jsou rozdílné.

Nechť $F_1(x) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{i; X_i \leq x\}$ je empirická distribuční funkce 1. výběru a $F_2(y) = \frac{1}{m}\mathrm{card}\{i; Y_i \leq y\}$ je empirická distribuční funkce 2. výběru. Jako testová statistika slouží $D = \max_{-\infty<x<\infty} |F_1(x) - F_2(x)|$. H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $D \geq D_{n,m}(\alpha)$, kde $D_{n,m}(\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota. Pro větší rozsahy n,m lze kritickou hodnotu aproximovat vzorcem $\sqrt{\frac{n+m}{2nm}\ln\frac{2}{\alpha}}$.

9.5. Kruskalův – Wallisův test a mediánový test (neparametrické obdoby analýzy rozptylu jednoduchého třídění)

9.5.1. Formulace problému

Nechť je dáno r nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, \dots, n_r$. Předpokládáme, že tyto výběry pocházejí ze spojitých rozložení. Označme $n = n_1 + \dots + n_r$. Chceme testovat hypotézu, že všechny tyto výběry pocházejí z téhož rozložení.

9.5.2. Kruskalův – Wallisův test

Všech n hodnot seřadíme do rostoucí posloupnosti a určíme pořadí každé hodnoty. Označme T_j součet pořadí těch hodnot, které patří do j-tého výběru, j = 1, ..., r (kontrola: musí platit $T_1 + \dots + T_r = n(n+1)/2$). Testová statistika má tvar: $Q = \frac{12}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{r}\frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1)$. Platí-li H_0, má statistika Q asymptoticky rozložení $\chi^2(r-1)$. H_0 tedy zamítneme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \geq \chi_{1-\alpha}^2(r-1)$.

9.5.3. Mediánový test

Testová statistika má tvar $Q_M = 4\sum_{j=1}^{r}\frac{P_j^2}{n_j} - n$, kde P_j je počet hodnot v j-tém výběru, které jsou větší nebo rovny mediánu vypočtenému ze všech n hodnot. Platí-li H_0, má statistika Q_M asymptoticky rozložení $\chi^2(r-1)$. H_0 tedy zamítneme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q_M \geq \chi_{1-\alpha}^2(r-1)$.

9.5.4. Metody mnohonásobného porovnávání

Zamítneme-li H_0, zajímá nás, které dvojice náhodných výběrů se liší na zvolené hladině významnosti.

a) Neményiho metoda

Používá se v případě, že všechny výběry mají týž rozsah p. Je-li $|T_l - T_k| \geq$ tabelovaná kritická hodnota (pro dané p, r, α), pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení.

b) Obecná metoda mnohonásobného porovnávání

Jestliže $|T_l - T_k| \geq \sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n_l}+\frac{1}{n_k}\right)n(n+1)h_{KW}(\alpha)}$, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení. Kritickou hodnotu $h_{KW}(\alpha)$ najdeme ve speciálních statistických tabulkách. Při větších rozsazích výběrů je možno ji nahradit kvantilem $\chi_{1-\alpha}^2(r-1)$.

9.5.5. Příklad

V roce 1980 byly získány tři nezávislé výběry obsahující údaje o průměrných ročních příjmech (v tisících dolarů) čtyř sociálních skupin ve třech různých oblastech USA.
jižní oblast: 6 10 15 29
pacifická oblast: 11 13 17 131
severovýchodní oblast: 7 14 28 25
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že příjmy v těchto oblastech se neliší. Zamítnete-li nulovou hypotézu, vyšetřete, které dvojice výběrů se od sebe liší na hladině významnosti 0,05.

Řešení:
Kruskalův – Wallisův test

Usp.hodnoty	6	7	10	11	13	14	15	17	25	28	29	131
Pořadí 1.výběru	1		3				7				11	
Pořadí 2.výběru				4	5			8				12
Pořadí 3.výběru		2				6			9	10		

$T_1 = 22$, $T_2 = 29$, $T_3 = 27$, $Q = \frac{12}{12 \cdot 13}\left(\frac{22^2}{4} + \frac{29^2}{4} + \frac{27^2}{4}\right) - 3 \cdot 13 = 0,5$, $\chi_{0,95}{}^2(2) = 5,991$.

Protože $Q < 5,991$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05. Rozdíly mezi průměrnými ročními příjmy v uvedených třech oblastech se neprokázaly.

Mediánový test

Medián všech 12 hodnot je 14,5. V 1. výběru leží nad mediánem 2 hodnoty, ve 2. výběru 2 hodnoty, ve 3. výběru 2 hodnoty. $Q_M = 4\left[\frac{1}{4}\left(2^2 + 2^2 + 2^2\right)\right] - 12 = 0$, $\chi_{0,95}{}^2(2) = 5,991$. Protože $Q_M < 5,991$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklady k 9. kapitole

Příklad 1.: U 10 náhodně vybraných vzorků benzínu byly zjištěny následující hodnoty oktanového čísla: 98,2 96,8 96,3 99,8 96,9 98,6 95,6 97,1 97,7 98,0. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že medián oktanového čísla je 98 proti oboustranné alternativě.

Řešení:

Znaménkový test

rozdíly $x_i - 98$: 0,2 -1,2 -1,7 1,8 -1,1 0,6 -2,4 -0,9 -0,3 0,0

$S_Z^+ = 3$, nenulových rozdílů je 9. Ve statistických tabulkách najdeme pro n = 9 a $\alpha = 0{,}05$ kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = \langle 0,1 \rangle \cup \langle 8,9 \rangle$ neobsahuje hodnotu 3, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05.

Wilcoxonův test

usp. $\lvert x_i - 98 \rvert$	**0,2**	0,3	**0,6**	0,9	1,1	1,2	1,7	**1,8**	2,4
pořadí	**1**	2	**3**	4	5	6	7	**8**	9

$S_W^+ = 12$, $S_W^- = 33$, n = 9, $\alpha = 0{,}05$, tabelovaná kritická hodnota = 5, testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(12,33) = 12$. Protože 12 > 5, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 2.: Výrobce určitého výrobku se má rozhodnout mezi dvěma dodavateli polotovarů vyrábějících je různými technologiemi. Rozhodující je procentní obsah určité látky.

1\. technologie: 1,52 1,57 1,71 1,34 1,68

2\. technologie: 1,75 1,67 1,56 1,66 1,72 1,79 1,64 1,55

Na hladině významnosti 0,05 posuďte pomocí dvouvýběrového Wilcoxonova testu, zda je oprávněný předpoklad, že obě technologie poskytují stejné procento účinné látky.

Řešení:

usp.h.	**1,34**	**1,52**	1,55	1,56	**1,57**	1,64	1,66	1,67	**1,68**	**1,71**	1,72	1,75	1,79
pořadí	**1**	**2**	3	4	**5**	6	7	8	**9**	**10**	11	12	13

$T_1 = 1 + 2 + 5 + 9 + 10 = 27$, $T_2 = 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 11 + 12 + 13 = 64$

$U_1 = 5.8 + 5.6/2 - 27 = 28$, $U_2 = 5.8 + 8.9/2 - 64 = 12$

Kritická hodnota pro $\alpha = 0{,}05$, min(5,8) = 5, max(5,8) = 8 je 6. Protože min(28,12) > 2, nemůžeme na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že obě technologie poskytují stejné procento účinné látky.

Příklad 3.: Výrobce koláčů v prášku má 4 nové recepty a chce zjistit, zda se jejich kvalita liší. Upekl proto 5 koláčů z každého druhu a dal je porotě k ohodnocení.

recept A: 72 88 70 87 71, recept B: 85 89 86 82 88, recept C: 94 94 88 87 89, recept D: 91 93 92 95 94.

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že recepty se neliší.

Řešení: Použijeme Kruskalův – Wallisův test. Všech 20 hodnot uspořádáme vzestupně podle velikosti a stanovíme součet pořadí pro recepty A, B, C, D: $T_1 = 23{,}5$, $T_2 = 37{,}5$, $T_3 = 66$, $T_4 = 83$. Testová statistika:

$$Q = \frac{12}{20 \cdot 21}\left(\frac{23{,}5^2}{5} + \frac{37{,}5^2}{5} + \frac{66^2}{5} + \frac{83^2}{5}\right) - 3 \cdot 21 = 12{,}45,$$ $\chi_{0,95}^2(3) = 7{,}81$. Protože $Q \geq 7{,}81$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Práce se systémem STATISTICA

Téma: Neparametrické úlohy o mediánech

Příklad 1.: Párový znaménkový test a párový Wilcoxonův test
Při zjišťování kvality jedné složky půdy se používají dvě metody označené A a B. Výsledky:

Vzorek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0,275	0,312	0,284	0,3	0,365	0,298	0,312	0,315	0,242	0,321	0,335	0,307
B	0,28	0,312	0,288	0,298	0,361	0,307	0,319	0,315	0,242	0,323	0,341	0,315

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že metody A a B dávají stejné výsledky.
Návod: Vytvořte datový soubor se dvěma proměnnými A a B a 12 případy. Statistics – Nonparametrics - Comparing two dependent samples(variables) – OK – First variable list A, Second variable list B – OK – Sign test. Ve výstupní tabulce se objeví p-hodnota 0,182422, tedy nulová hypotéza se nezamítá na hladině významnosti 0,05. Grafické znázornění výsledků: Návrat do Comparing two variables - Box & Whisker plots for all variables – OK - Box & Whisker Type: Median/Quart/Range – OK. Z krabicových diagramů je vidět, že obě metody se poněkud liší v úrovni, ale neliší se ve variabilitě.
Provedení Wilcoxonova testu: Návrat do Comparing two variables Wilcoxon matched pair test. Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky (ozn. T), hodnotu asymptotické testové statistiky U_0 a p-hodnotu pro U_0. (STATISTICA tedy nezohledňuje omezení $n \geq 30$ pro použití U_0.) V tomto případě je p-hodnota 0,038153, tedy nulová hypotéza se zamítá na hladině významnosti 0,05. Ze srovnání p-hodnot pro znaménkový test a pro Wilcoxonův test plyne, že Wilcoxonův test je silnější.

Příklad 2.: **Znaménkový test a jednovýběrový Wilcoxonův test**
Vyráběné ocelové tyče mají kolísavou délku s předpokládanou hodnotou mediánu 10 m. Náhodný výběr 10 tyčí poskytl tyto výsledky:
9,83 10,10 9,72 9,91 10,04 9,95 9,82 9,73 9,81 9,90
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že předpoklad o mediánu délky tyčí je oprávněný.
Návod: Vytvořte datový soubor se dvěma proměnnými X a Y a 10 případy. Do proměnné X napište změřené hodnoty, proměnná Y bude obsahovat konstantu 10. Provedení znaménkového a Wilcoxonova testu je nyní stejné jako v předešlém případě. Znaménkový test: p-hodnota = 0,113846, tedy nulová hypotéza se nezamítá na hladině významnosti 0,05. Wilcoxonův test: p-hodnota = 0,024933, tedy nulová hypotéza se zamítá na hladině významnosti 0,05.

Příklad 3.: **Dvouvýběrový Wilcoxonův test, Waldův – Wolfowitzův test, dvouvýběrový K-S test**
Bylo vybráno 10 polí stejné kvality. Na čtyřech z nich se zkoušel nový způsob hnojení, zbylých šest bylo ošetřeno starým způsobem. Pole byla oseta pšenicí a sledoval se její hektarový výnos. Je třeba testovat na hladině významnosti 0,05, zda nový způsob hnojení má týž vliv na průměrné hektarové výnosy pšenice jako starý způsob hnojení.
hektarové výnosy při novém způsobu: 51 52 49 55
hektarové výnosy při starém způsobu: 45 54 48 44 53 50
Návod: Vytvořte datový soubor o dvou proměnných (X a ID) a deseti případech. Do X napište výnosy pšenice při obou způsobech hnojení, do ID čtyřikrát jedničku a šestkrát dvojku. Statistics – Nonparametric – Comparing two independent samples (groups) – OK - Dependent variable X, Grouping variable ID, OK - Mann – Whitney U test. Ve výstupní tabulce jsou součty pořadí T_1, T_2, hodnota testové statistiky $\min(U_1, U_2)$ ozn. U, hodnota asymptotické testové statistiky U_0 (ozn. Z), p-hodnota pro U_0 a přesná p-hodnota (ozn. 2*1 sided exact p – ta se

používá pro rozsahy výběrů pod 30). V našem případě přesná p-hodnota = 0,352381, tedy H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Výpočet je vhodné doplnit krabicovým diagramem typu Median/Quart/Range.
Provedeme-li Waldův – Wolfowitzův test, dostaneme ve výstupní tabulce rozsahy a průměry obou výběrů, hodnotu asymptotické testové statistiky U_0 (ozn. Z), p-hodnotu pro U_0 (p = 0,888275), hodnotu asymptotické testové statistiky s opravou na spojitost (Z_{adj}), p-hodnotu pro Z_{adj}, (p = 0,833097), počet iterací (No. of Runs) a počet shodných pozorování. Ani tento test nezamítá na asymptotické hladině významnosti nulovou hypotézu.
Ve výstupní tabulce pro dvouvýběrový K-S test dostaneme maximální záporný a maximální kladný rozdíl mezi hodnotami obou výběrových distribučních funkcí, dolní omezení pro p-hodnotu (p > 0,1), průměry, směrodatné odchylky a rozsahy obou výběrů. Protože p > 0,05, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 4.: **Kruskalův – Wallisův test a mediánový test**
Voda po holení jisté značky se prodává ve čtyřech různých lahvičkách stejného obsahu. Údaje o počtu prodaných lahviček za týden v různých obchodech:
1.typ: 50 35 43 30 62 52 43 57 33 70 64 58 53 65 39
2.typ: 31 37 59 67 44 49 54 62 34 42 40
3.typ: 27 19 32 20 18 23
4.typ: 35 39 37 38 28 33.
Posuďte na 5% hladině významnosti, zda typ lahvičky ovlivňuje úroveň prodeje vyjádřenou mediánem.
Návod: Vytvořte nový datový soubor o dvou proměnných X a ID a 38 případech. Do proměnné X napište zjištěné údaje o prodeji, do proměnné ID 15 x jedničku, 11 x dvojku, 6 x trojku a 6 x čtyřku. Statistics – Nonparametrics – Comparing multiple independent samples(groups) – OK – Dependent varaible VÝKON, Grouping varaible SKUPINA – OK – Summary: Kruskal-Wallis ANOVA & Median test. Ve dvou výstupních tabulkách se objeví výsledky mediánového testu a K-W testu. Oba testy zamítají hypotézu o shodě mediánů v daných čtyřech skupinách, ale K-W test je poněkud silnější (p-hodnota = 0,0003, zatímco p-hodnota pro mediánový test je 0,0005). Grafické znázornění výsledků: návrat do Kruskal-Wallis ANOVA & Median test – Box & Whisker – Select variable X – OK - Box & Whisker Type: Median/Quart/Range – OK. Je vidět, že úroveň prodeje pro 1. typ je nevyšší, zatímco pro 3. typ nejnižší. Dále je možno vytvořit histogramy proměnné X ve všech čtyřech skupinách: návrat do Kruskal-Wallis ANOVA & Median test – Categorized histogram - Select variable X – OK.

Poznámka: STATISTICA neumožňuje provedení metody mnohonásobného porovnávání. Lze zjistit, že na hladině významnosti 0,05 se liší 1. a 3. typ, 1. a 4. typ a 2. a 3. typ.

Příklady k samostatnému řešení
1. U osmi osob byl změřen systolický krevní tlak před pokusem a po něm.

č. osoby	1	2	3	4	5	6	7	8
tlak před	130	185	162	136	147	181	128	139
tlak po	139	190	175	135	155	175	158	149

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že pokus neovlivní systolický krevní tlak

2. Majitel obchodu chtěl zjistit, zda velikost nákupů (v dolarech) placených kreditními kartami Master/EuroCard a Visa jsou přibližně stejné. Náhodně vybral 7 nákupů placených Master/EuroCard: 42 77 46 73 78 33 37 a 9 placených Visou: 39 10 119 68 76 126 53 79

102. Lze na hladině významnosti 0,05 tvrdit, že nákupů placených těmito dvěma typy karet se shodují?

3. Z produkce tří podniků vyrábějících televizory bylo vylosováno 10, 8 a 12 kusů. Byly získány následující výsledky zjišťování citlivosti těchto televizorů v mikrovoltech:
1.podnik: 420 560 600 490 550 570 340 480 510 460
2.podnik: 400 420 580 470 470 500 520 530
3.podnik: 450 700 630 590 420 590 610 540 740 690 540 670
Ověřte na hladině významnosti 0,05 hypotézu o shodě úrovně citlivosti televizorů v jednotlivých podnicích.