D) Odhady vektoru parametrů $\beta$ pomocí metody nejmenších čtverců a metody maximální věrohodnosti jsou identické

$$\left[b_{OLS} = b_{ML}\right]$$

důkaz : Již jsme ukázali, že $b_{OLS} = (X'X)X'y$ .

Ukážeme, že odhad metodou maximální věrohodnosti, má stejný tvar :

Vyjdeme ze sdružení hustoty vektoru náhodných poruch, který má tvar :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sigma^n} \cdot \exp\left( - \frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2} \right) \qquad \text{pro } \varepsilon \sim N(0 : \sigma^2 I)$$

Věrohodnostní funkci, jejíž maximum hledáme, zapíšeme ve tvaru

$$f^*(\beta, \sigma^2; y, X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sigma^n} \cdot \exp\left( - \frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{2\sigma^2} \right)$$

Ekvivalentně minimalizujeme logaritmus $f^*(\beta, \sigma^2, y, X)$ :

$$L(\beta, \sigma^2; y, X) = \log f^*(\beta, \sigma^2, y, X) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)$$

Dále maximalizujeme $L(\beta, \sigma^2; y, X)$ vzhledem k $\beta$ a $\sigma^2$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sigma^2}(-X'y + X'X\beta) = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(y - X\beta)'(y - X\beta) = 0 \qquad (**)$$

Zřejmě, řešením $(*)$ dostaneme $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$,

řešením $(**)$ potom získáme (po dosazení $b_{ML} = (X'X)^{-1}X'y$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(y - X(X'X)^{-1}X'y\right)\left(y - X(X'X)^{-1}X'y\right) = 0 \qquad / 2\sigma^2$$

$$-n + \frac{1}{\sigma^2}e'e = 0 \Rightarrow e'e = \sigma^2 n \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n}$$

tedy $\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{n-k}{n}\hat{\sigma}_{OLS}$ $\leftarrow$ tzn. odhady $\sigma^2$ metodou OLS a metodou ML identické nejsou (oba jsou však asymptoticky nestranné ( ……….)