Metoda nejmenších čtverců s dodatečnou informací

představuje postup, jak odhadnout parametry jednorovnicového regresního modelu pro případ, že jsou tyto propojeny provazujícími podmínkami.

Omezíme se případ, kdy mezi parametry regresního modelu existují jen lineární omezení tvaru

$$R_{[J,K]}.\beta_{[K,1]} = r_{[J,1]}, \qquad , \qquad \textbf{kde}$$

R **je matice rozměrů JxK koeficientů těchto lineárních omezení**
r **je vektor pravých stran soustavy omezení**
β **je vektor parametrů, které jsou těmto omezením podrobeny.**

Předpokládáme přitom, že
a) počet těchto omezení J je nanejvýš roven počtu parametrů K, tj. $J < K$
b) omezení neobsahují redundantní informaci, že jsou tedy nezávislá. Proto je hodnost matice R nejvyšší možná, tj. rovna J. tj. $h(R) = J$

Algoritmus odhadové metody OLS-AI je založen na tom, že jde o hledání vázaného extrému,. Půjde tedy o formulaci úlohy ve tvaru

(1a/b) $$Min\ S = \sum_{t=1}^{T}(y_t - X_t\beta)^2 \qquad \textbf{za podmínky} \qquad R.\beta = r$$

Standardní cestou nalezení minima funkce (1a) při omezení (1b) je nasazení techniky Lagrangeových multiplikátorů (jejich počet bude roven právě počtu lineárně nezávislých omezení, tj. J) **: Dále tedy půjde o minimalizaci výrazu**

(2) $$S = (y - X\beta)'(y - X\beta) - 2.\lambda\,(R\beta - r),$$

kde λ **je vektor Lagrangeových multiplikátorů délky J[1].**

Položíme-li rovny nule první parciální derivace výrazu (2) podle jednotlivých prvků vektoru β**, dostaneme pro odhad minimalizujícího vektoru** $\widetilde{\beta}$ **vyjádření**

(3) $$\frac{1}{2}.\frac{\partial S}{\partial \beta} = -X'y + X'X.b - R'\lambda = 0\ . \qquad \textbf{a odtud pro } \widetilde{\beta}$$

(4) $$\widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y + (X'X)^{-1}.R'\widetilde{\lambda} \qquad \textbf{neboli}$$

(5) $$\widetilde{\beta} = {}_{OLS}\hat{\beta} + (X'X)^{-1}.R'\widetilde{\lambda}$$

Tento odhad ovšem zatím není použitelný, protože se v něm vyskytují (zatím neznámé) **prvky vektoru** $\widetilde{\lambda}$ **. Abychom tento vektor eliminovali, postupujeme následovně:**

Vztah (5) vynásobíme zleva maticí R. Po tomto vynásobení obdržíme:

(6) $$R.\widetilde{\beta} = R._{OLS}\hat{\beta} + R(X'X)^{-1}.R'\widetilde{\lambda}$$

Na levé straně se nám objevuje levá strana omezujících podmínek, takže do ní můžeme dosadit z (1b). Dostaneme:

---

[1] Dvojnásobek vektoru λ se ve (2) objevuje jen proto, abychom s ním nemuseli operovat dále: po přechodu k (3) již se zde objevují jen výrazy s jedničkovými koeficienty.

(7) $$r = R._{OLS}\hat{\beta} + R(X'X)^{-1}.R'\tilde{\lambda}$$

a odtud pak hodnotu vektor Lagrangeových multiplikátorů minimalizujících kriteriální funkci (2)

$$\tilde{\lambda} = \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r - R_{OLS}\hat{\beta})$$

Dosadíme-li nyní tento výraz zpětně do vztahu (5), dostaneme výsledný výraz pro $\tilde{\beta}$

(9) $$\tilde{\beta} = {}_{OLS}\hat{\beta} + (X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r - R._{OLS}\hat{\beta})$$

Ze vztahu (9) je zřejmé, že odhadová funkce OLS-AI se liší od odhadové funkce OLS tím, že se ke každé složce vektoru ${}_{OLS}\hat{\beta}$ připočte korekce obsahující lineární funkci typu $r - R_{OLS}\hat{\beta}$. Jinak by odhadová funkce OLS nesplňovala omezující podmínky.
Abychom vyšetřili, zda je nalezená odhadová funkce nestranná, dosadíme nejdříve do (9) známý vztah

$${}_{OLS}\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \quad .$$ Dostaneme:

$$\tilde{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + (X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left[(r - R\beta) - R(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right] =$$

(10) $$= \beta + \left\{I_K - (X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

V odvozování jsme použili dosazení $r - R\beta = 0$.
Že je tato odhadová funkce přinejmenším nestranná, se lze snadno přesvědčit :

(11) $$\begin{aligned} E\tilde{\beta} &= E\beta + E\left\{I_K - (X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\right\}(X'X)^{-1}X'\varepsilon \\ &= \beta + \left\{I_K - (X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}(X'X)^{-1}X'E\varepsilon = \beta. \end{aligned}$$

Kovarianční matici této (nestranné) odhadové funkce můžeme odvodit následovně :

$$Cov(\tilde{\beta}) = E\left[(\tilde{\beta} - E\tilde{\beta}).(\tilde{\beta} - E\tilde{\beta})'\right] = E\left[(\tilde{\beta} - \beta).(\tilde{\beta} - \beta)'\right] =$$
$$= E\left[\left\{I_K - (X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}\left\{I_K - \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X\right.\right.$$

(12)
$$= \sigma^2(X'X)^{-1}\left\{I_K - R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}\right\} = \Sigma - \Sigma R'(R\Sigma R')^{-1}R\Sigma \quad ,$$

kde ${}_{OLS}\Sigma$ označuje kovarianční matici vektoru ${}_{OLS}\hat{\beta}$, tedy ${}_{OLS}\Sigma = \sigma^2(X'X)^{-1}$

Všimneme-li si blíže výrazu (12), můžeme konstatovat následující :

Matice R' je typu KxJ a má podle předpokladu o nezávislosti omezení hodnost J . Proto i matice $R'\Sigma R$ a $(R'\Sigma R)^{-1}$ jsou pozitivně definitní. Odtud plyne, že i odečítaná matice na pravé straně výrazu (12) $\Sigma R'(R'\Sigma R)^{-1}R\Sigma$ je kladně semidefinitní. Každý její diagonální prvek je tedy nanejvýš roven stejnolehlému prvku na hlavní diagonále matice Σ.

Odtud tedy plyne, že rozptyl každého prvku vektoru $\tilde{\beta}$ je menší nebo nanejvýš roven odpovídajícímu prvku matice $_{OLS}\hat{\beta}$. Lze i obecně ukázat – *viz H.Theil* - že prvky tohoto vektoru mají nejmenší rozptyl uvnitř třídy nestranných odhadových funkcí.

<u>Podrobné odvození tvaru kovarianční matice</u>

$$Cov(\tilde{b}) = E\left[(\tilde{b} - E\tilde{b}).(\tilde{b} - E\tilde{b})'\right] = E\left[(\tilde{b} - \beta).(\tilde{b} - \beta)'\right] =$$

$$= E\left[\left\{I_K - (X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}\left\{I_K - R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}\right\}\right]$$

$$= E\left[(X'X)^{-1}X' I_K\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}\right]$$

$$-E\left[\left\{(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}I_K\right]$$

$$-E\left[I_K\,(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}\right]$$

$$-E\left[\left\{(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}\left\{R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}\right\}\right]$$

$$= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_K X(X'X)^{-1}$$

$$-(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\,(X'X)^{-1}X'\sigma^2\,X(X'X)^{-1}$$

$$-(X'X)^{-1}X'\sigma^2\,X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}$$

$$+(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\,(X'X)^{-1}X'\sigma^2 X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2(X'X)^{-1}$$

$$-\sigma^2\,(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\,(X'X)^{-1}$$

$$-\sigma^2(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}$$

$$+\sigma^2(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\,(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2(X'X)^{-1}$$

$$-2\sigma^2\,(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\,(X'X)^{-1}$$

$$+\sigma^2(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2(X'X)^{-1}$$

$$-\sigma^2\,(X'X)^{-1}.R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\,(X'X)^{-1} = \sigma^2\,(X'X)^{-1}\{I_K - R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\,(X'X)^{-1}\}$$

<u>Příklady zápisu dodatkové informace :</u>

(1) apriorní znalost hodnoty některých koeficientů , např. $\beta_1 = \beta_1^*$

zápis omezení : $\quad r = \left[\beta_1^*\right] \qquad R = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots.. & 0\end{bmatrix}$

(2) apriorní znalost podílů hodnot některých prvků vektoru β, např. $\beta_1/\beta_2 = c_1$ **,** $\beta_3/\beta_2 = c_2$

zápis omezení : $\quad r = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix}1 & -c_1 & 0 & 0 & \ldots.. & 0\\ 0 & -c_2 & 1 & 0 & \ldots... & 0\end{bmatrix}$

(3) apriorní znalost hodnoty lineární kombinace hodnot prvků vektoru β, např.

$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k = 1$

zápis omezení : $r = [\,1\,]$ $R = [1 \quad 1 \quad 1 \quad ..... \quad 1]$