Lineární regresní model

Specifikace lineárního jednorovnicového modelu

(1) $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

definice vyrovnaných hodnot závisle proměnné **definice reziduí**

(2A) $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Xb}$ **(2B)** $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Xb}$ **neboli** $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}$

odtud vyplývá možnost zápisu závisle proměnné

(3) $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Xb} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

z porovnání (1) a (3) obdržíme vztah mezi ε **a** $\hat{\varepsilon}$ **:**

(4) $$\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Xb} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

(pokud použijeme odhad OLS, pak pravá strana $= X(X'X)^{-1}X'y + \hat{\varepsilon}$ **),**
z čehož dále plyne

(5) $$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y} - Xb = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y} = \left[\boldsymbol{I_T} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\right]\boldsymbol{y} = M\boldsymbol{y}$$

neboli platí $\hat{\varepsilon} = M\boldsymbol{y}$

(6)

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y} - Xb = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} - Xb = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\left[\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}\right] =$$

$$= \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{X\beta} - \left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\right]\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\right]\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M\varepsilon}$$

neboli platí $\hat{\varepsilon} = M\varepsilon$

Varovná poznámka :

Ze vztahů $\hat{\varepsilon} = My$ **a** $\hat{\varepsilon} = M\varepsilon$ **nelze usuzovat, že platí** $y = \varepsilon$**, neboť M je vždy singulární matice. Nelze proto nikdy psát** $\boldsymbol{y} = M^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ **a** $\boldsymbol{\varepsilon} = M^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$**.**

Hodnost matice $M = I_T - X(X'X)^{-1}X' = T - k < T$

protože $h(I_T) = T \qquad h\left(X(X'X)^{-1}X'\right) = h\left(X'X\ (X'X)^{-1}\right) = k$

Metoda nejmenších čtverců

Minimalizačním kritériem je zde součet čtverců reziduí (odhadnutých náhodných složek neboli rozdílů mezi pozorovanými a vyrovnanými hodnotami) :

$Min\, e'e = Min(y - Xb)'(y - Xb)$ **neboli v pozorovaných hodnotách**

$$Min\sum_{t=1}^{T} e_t^2 = Min\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{j=1}^{K} x_{tk} b_k\right)\left(y_t - \sum_{k=1}^{K} x_{tk} b_k\right)$$

Polohu minima (tj. bodu, ve kterém je minimalizovaný výraz nejmenší) nalezneme řešením soustavy tzv.normálních rovnic.

$$\frac{\partial e'e}{\partial b} = \frac{\partial (y - Xb)'(y - Xb)}{\partial b} = -2X'y + 2X'Xb = 0 \quad \textbf{(vektorově)}$$

tuto soustavu řešíme úpravami (vydělením 2, přesunem členů) na tvar $X'Xb = X'y$**, která má řešení pro** b **ve tvaru** $b = (X'X)^{-1}X'y$ **, ← řešení je jednoznačné, neboť vzhledem k předpokladům** $h(X) = k$**, existuje (jediná) inverzní matice k matici** $X'X$ **.**

Vyjádření minimalizace v pozorovaných hodnotách :

$$H(y, X, b) = \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{K} x_{ti} b_i\right)\left(y_t - \sum_{j=1}^{K} x_{tj} b_j\right) = \sum_{t=1}^{T} y_t^2 - \sum_{t=1}^{T} y_t\left(\sum_{j=1}^{K} x_{tj} b_j\right) - \sum_{t=1}^{T} y_t \sum_{i=1}^{K} x_{ti} b_i +$$

$$+\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{K} x_{ti} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{K} x_{tj} b_j\right)$$

$$\frac{\partial H(y, X, b)}{\partial b_j} = 0 - 2\underbrace{\sum_{t=1}^{T} X_{tj} y_t}_{-2X'y} + 2\underbrace{\sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{j=1}^{k} x_{tj} b_j}_{+2X'Xb} = 0 \quad \textbf{pro } j = 1, 2, \ldots, k$$

Prostá metoda nejmenších čtverců není jedinou používanou odhadovou metodou v prostředí standardního lineárního regresního modelu. K dalším technikám patří :

Metoda maximální věrohodnosti (**M**aximum Likelihood) **je založena na maximalizaci sdružené hustoty (tzv.věrohodnostní funkce) rozdělení náhodných složek. Lokalizuje se tedy poloha modusu pro** β **a** σ^2 **, v němž tato funkce nabývá maxima.**

Metoda nejmenších absolutních odchylek **LAD *(*****L**east **A**bsolute **D**eviations***)*** **je založena na minimalizačním kritériu tvaru**

$$\sum_{t=1}^{T}\left|\, y_t - \sum_{j=1}^{k} x_{tj}\beta_j \,\right|$$

Odhady pořízené metodou LAD nelze vyjádřit v explicitním tvaru, ale je nutno použít iterační postup (např. algoritmy R.L.Faira)