Standardní lineární regresní model

Standardní** (také klasický) **lineární regresní (jednorovnicový) model je charakterizován těmito předpoklady o vlastnostech modelových veličin :

1. ***Centrovanost náhodných složek*** $E\,\varepsilon = 0$
2. ***Diagonalita kovarianční matice náhodných složek :*** $Cov\,(\varepsilon, \varepsilon') = \sigma^2 . I_T$
   - ***2a) homoskedasticita*** ***(diagonální matice se stopou*** $T\sigma^2$***.)***
   - ***2b) neautokorelovanost náhodných složek*** $E\,(\varepsilon_t . \varepsilon_s) = \delta_{ts} . \sigma^2$
3. ***Nekorelovanost náhodných složek s nezávisle proměnnými*** $E(X'\varepsilon) = 0$.
4. ***Plná hodnost matice vysvětlujících proměnných*** $h\,(X) = k$.

Odhadová funkce obyčejné (prosté) metody nejmenších čtverců MNČ (OLS) v klasickém lineárním regresním modelu

poskytuje odhad $_{OLS}\beta^*$ regresních koeficientů β ve tvaru

$$_{OLS}\beta^* = (X'X)^{-1} X' y$$

Věta 1 (Gauss-Markovova) **. Odhad regresních koeficientů $_{OLS}\beta^*$ pořízený obyčejnou (prostou) metodou nejmenších čtverců je nejlepším nestranným lineárním odhadem vektoru parametrů β**

Důkaz: rozdělíme na několik částí

A. odhad $_{OLS}\beta^*$ je nestranný (pro libovolnou velikost vzorku T) .

ověření nestrannosti :

$$E(\beta^*) = E\,(X'X)^{-1} X'y = E\,(X'X)^{-1} X'(X\beta + \varepsilon) = E\,(X'X)^{-1} X'X\beta + E\,(X'X)^{-1} X'\varepsilon =$$
$$= (X'X)^{-1} X'X\,E\beta + (X'X)^{-1} X'\,E\varepsilon = E\beta + E\varepsilon = \beta \qquad \square .$$

Důsledek 1 : Nestranná odhadová funkce je vždy asymptoticky nestranná.
Platí-li totiž $E(^{(T)}\beta^*) = \beta$ pro každé konečné **T**, platí tentýž vztah i pro $T \to \infty$.

B. odhad β^*_{OLS} je konzistentní , tj. platí : $\text{plim}_{T\to\infty} \beta^* = \beta$

Vlastnost platí i pro případ, že matice X je stochastická matice.

ověření konzistence : lze vyvodit z následujícího tvrzení :

Tvrzení 1 : Jestliže odhadová funkce je asymptoticky nestranná a kovarianční matice této odhadové funkce konverguje při $T \to \infty$ k nulové matici, pak je tato odhadová funkce konzistentní.

Důkaz **vlastnosti B:**

a) asymptotická nestrannost OLS-odhadové funkce vyplývá z důsledku 1.
b) konvergenci kovarianční matice OLS-odhadové funkce (její tvar viz dále ad **D**) **k nulové matici ukážeme následovně :**

Dále ukážeme, že Cov (β^*) = σ_ε^2 (X´X)$^{-1}$. Definujme matici $P=(X'X)/T$ **a její** $ij-t\acute{y}$ **prvek označíme jako** p_{ij}. **Pro tento prvek platí**

$$\left|p_{ij}\right| = \left|\frac{1}{T}.\sum_{t=1}^{T} x_{ti}.x_{tj}\right| \le \xi_{ij}^{2}$$ **, přičemž tato rovnost platí pro všechna T.**

Všechny prvky této matice jsou tedy (v absolutní hodnotě) **shora omezeny hodnotou ξ^2 = max ξ^2_{ij} . Tedy, pro všechna T má matice P konečně velké prvky a je nesingulární. Zřejmě dále platí**

$$(X'X)^{-1} = P^{-1}/T \qquad \text{(neboť platí } X'X = T.P \text{)}$$

a navíc matice P^{-1} **má konečně velké prvky (** π_{ij} **) pro všechna** T**. Platí tedy**

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \text{Cov}\,({}_{OLS}\beta^*) = \operatorname*{plim}_{T\to\infty} \sigma_\varepsilon^2\,(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 \operatorname*{plim}_{T\to\infty} P^{-1}/T = 0_K \text{ , kde}$$

0_K je symetrická **matice složená ze samých nul.**

C. **<u>odhad β^*_{OLS} je lineární</u> (** vzhledem k vysvětlované proměnné **y)**,

neboť **je definován jako lineární forma pozorování závisle proměnné y :**

<u>ověření linearity :</u> **lze psát β^* = (X´X)$^{-1}$ X´y = C´y**, **kde matice C´ = (X´X)$^{-1}$ X´**

představuje koeficienty lineární formy, jejíž proměnné tvoří složky vektoru y .

Poznamenejme, že **vždy platí C´X = (X´X)$^{-1}$ X´X = I_k**, kde **I_k** je jednotková matice řádu **k**.

D. **<u>kovarianční matice</u>** příslušná odhadové funkci **β^* = (X´X)$^{-1}$ X´y má následující tvar :**

$$Cov(\beta^*) = \sigma_\varepsilon.(X'X)^{-1}\,.$$

(nestrannost β^*)

<u>ověření</u> : **Cov (β^*) = E { [β^*- E(β^*)] [β^*- E(β^*)]' } = …… = E { [β^*- β] [β^*- β] ' } =**

(dosazení za y)

E{[(X´X)$^{-1}$X´y - β] [(X´X)$^{-1}$X´y - β]'} = E{[(X´X)$^{-1}$X´(Xβ+ ε) - β].[(X´X)$^{-1}$X´(Xβ + ε)- β]' }

(X´X)$^{-1}$ X´X = I_T (vyrušení β)

= E { β + (X´X)$^{-1}$X´ε - β].[β + (X´X)$^{-1}$X´ε - β]' = E [(X´X)$^{-1}$X´ε].[(X´X)$^{-1}$X´ε] ' =

(transpozice) (vytknutí nestoch..členů před E) Eε.ε' = $\sigma_\varepsilon^2 I_T$

= E [(X´X)$^{-1}$ X' ε ε' X. (X´X)$^{-1}$] = ……….. = (X´X)$^{-1}$ X' Eε.ε' X.(X´X)$^{-1}$ = ………. =

(vytknutí skaláru σ_ε^2) (X´X)$^{-1}$ X´X = I_T

(X´X)$^{-1}$ X'σ_ε^2 I_T X.(X´X)$^{-1}$ = …….. =σ_ε^2 (X´X)$^{-1}$ X'X. (X´X)$^{-1}$ = σ_ε^2 (X´X)$^{-1}$ □.

Odtud plyne **důsledek** :

D1 <u>směrodatné odchylky</u> odhadnutých **<u>regresních parametrů</u> s_{β^*}** získáme jako

$$\sigma_{\beta_j} = \sigma_\varepsilon.\sqrt{\xi_{jj}^{\,2}}$$, kde

$\xi_{jj}^{\,2}$ je j-tý diagonální prvek inverzní momentové matice $(X'X)^{-1}$

σ_ε je směrodatná odchylka náhodných složek (stejná u všech ε_t).

E. **odhad β* je nejlepší** ve smyslu minimální kovarianční matice **Cov (β*)** , neboť **pro kovarianční matici kterékoliv jiné** (lineární) **odhadové funkce β** platí :**

$$Cov(\widetilde{\beta}) - Cov(\beta^{*}) = \Omega \ ,$$

kde Ω je nějaká ***symetrická pozitivně semidefinitní matice řádu k*** (rozměrů k x k).

ověření : Bez újmy na obecnosti **můžeme matici D´ jiné *lineární* odhadové funkce**

$\varepsilon \quad _t$ **vyjádřit ve tvaru** $D' = (X'X)^{-1}X' + G'$

Poznámka : **Vzhledem k požadavku na nestrannost β** musí** s ohledem na platnost vztahu **$D'X = (X'X)^{-1} X'X + G'X = I_K$, vždy platit $G'X = 0$.**

ověření vydatnosti:

$$\beta = E(\widetilde{\beta}) = E(D'y) = E\left[D'(X\beta + \varepsilon)\right] = ED'X\beta + ED'\varepsilon = D'X\beta + 0 = D'X\beta$$

[matice D, X jsou nestochastické]

z čehož přímo **plyne $D'X = I_K$**

Pro libovolnou jinou (lineární, nestrannou) odhadovou funkci tedy musí platit

$$\mathbf{Cov}(\widetilde{\beta}) = E\{[\widetilde{\beta} - E\widetilde{\beta}].[\widetilde{\beta} - E\xi_{jj}^{2}]'\} = E\{[D'y - \beta].[D'y - \beta]'\} =$$

$$= E\{[((X'X)^{-1}X' + G')y - \beta].\{[((X'X)^{-1}X' + G')y - \beta]'\} =$$

$$= E\{[(X'X)^{-1}X' + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta].[(X'X)^{-1}X' + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta]'\} =$$

$$= E\{[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta].[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta]'\}$$

[protože G´X = 0] [protože G´X = 0]

$$= E\{[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta].[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta]'\} =$$

$$= E\{[(X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon].[(X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon]'\} =$$

$$= E\{(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} + G'\varepsilon\varepsilon'G + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'G + G'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\} =$$

$$= (X'X)^{-1}X'E\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} + G'E\varepsilon\varepsilon'G + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon\varepsilon'G + G'E\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}] =$$

[protože X i G jsou nestochastické matice]

$$= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_T X(X'X)^{-1} + G'\sigma^2 I_T G + (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_T G + G'\sigma^2 I_T X(X'X)^{-1}] =$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} + \sigma^2 G'G + \sigma^2 (X'X)^{-1}X'G + \sigma^2 G'X(X'X)^{-1} =$$

[protože σ^2 je skalární hodnota]

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} + \sigma^2 G'G \qquad = \quad Cov(\beta^*) + \sigma^2 G'G,$$

[protože G´X = 0 a stejně X´G= 0]

kde G´G je zřejmě pozitivně semidefinitní matice. □.

F. Pro odhad rozptylu reziduí dostaneme :

$$E(e'e) = E(\varepsilon'M.M\varepsilon) = E(\varepsilon'M\varepsilon) = E\,tr(\varepsilon'M\varepsilon) = E\,tr(M\varepsilon\varepsilon') =$$

(M je idempotentní matice) (skalár je současně svou stopou) (tr A.B = tr B.A)

$$= tr\,E(M\varepsilon\varepsilon') = tr(M\,E\varepsilon\varepsilon') = tr(M\sigma_\varepsilon^2 I_T) = \sigma_\varepsilon^2\,tr(M) = \sigma_\varepsilon^2 (T-k)$$

(záměna stopy a střední hodnoty) (M je nestochastická) (σ^2 je skalární hodnota)

protože $tr(M) = tr(I_T - X(X'X)^{-1}X') = tr(I_T - X'X(X'X)^{-1}) = tr(I_T - I_K) = T - k$.

(definice M) (platí tr A.B = tr B.A) (stopa jednotkové matice je rovna její dimenzi)

G. Z tvrzení F plyne, že **nestranným odhadem rozptylu náhodných složek** σ_ε^2

T

je výraz $\hat{\sigma}_\varepsilon^{\,2} = \dfrac{e\acute{e}}{T-k}$, neboť zřejmě platí $E\,[\dfrac{\sum e_t^{\,2}}{T-k}\,] = \sigma_\varepsilon^{\,2}$.