Modely s rozloženými zpožděními II

1) Koyckův model [Koyck L, M.1954]

je (naopak) **příkladem modelu s rozloženým zpožděním o nekonečné délce. Má-li být zachována možnost statisticky odhadnout parametry takovýchto modelů, musí být dáno nějaké pravidlo o souvislostech mezi nimi. V případě modelu navrženého Koyckem klesají váhy u jednotlivých vysvětlujících zpožděných proměnných podle schématu popsaného geometrickou posloupností.**

Zapíšeme-li základní rovnici modelu s nekonečně rozloženým zpožděním ve tvaru

(1.1) $$Y_t = \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \beta_k X_{t-k} + \ldots + \varepsilon_t$$

neboli ve zkráceném zápisu $$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_i X_{t-j} + \varepsilon_t ,$$

je ihned patrné, že takto obecně vyjádřený model nelze prakticky použít (nelze odhadnout nekonečný počet parametrů). Dle Koyckem navržené konkretizace přijímají parametry tuto apriorní váhovou strukturu :

(1.2) $$\beta_j = b.\, w_j \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \ldots$$ **kde**

váhy/koeficienty w_j jsou prvky geometrické posloupnosti

(1.2a) $$w_j = (1-q)\, .\, q^j \qquad 0 < q < 1 ,$$

která je pro danou hodnotu kvocientu q klesající.

Tímto způsobem lze převést původně nekonečný počet parametrů pouze na dva parametry b a **q , přičemž v konečné podobě model nabude tvar**

(1.3) $$Y_t - q.Y_{t-1} = b\,(1-q)\,X_t + (\varepsilon_t - q.\,\varepsilon_{t-1}) ,$$

což lze upravit na

(1.4) $$Y_t = q.Y_{t-1} + b.\,(1-q)\,X_t + v_t ,$$

který je nazýván autoregresním tvarem modelu (nekonečného) rozloženého zpoždění. Všimněme si zde zejména dvou věcí :

a) do modelu se na pravou stranu dostala (jediná) zpožděná <u>závisle</u> proměnná (se zpožděním o 1 krok)

b) náhodné složky modelu $v_t = \varepsilon_t - q.\,\varepsilon_{t-1}$ již (bohužel) nebudou vzájemně nekorelované, a to ani tehdy, jestliže jsme předpokládali nekorelovanost původních náhodných složek ε_t. Příčinou toho je skutečnost, že „nová" vysvětlující proměnná Y_{t-1} není nekorelovaná s náhodnými složkami v_t.

Platí totiž :

$$E[Y_{t-1}.(\varepsilon_t - q.\,\varepsilon_{t-1})] = E[\varepsilon_{t-1}.(\varepsilon_t - q.\,\varepsilon_{t-1})] = E[\varepsilon_{t-1}.\,\varepsilon_t] - E[\varepsilon_{t-1}(q.\,\varepsilon_{t-1})] = -\,q.\sigma^2$$

kde σ^2 je rozptyl náhodných složek ε_t . Oproti klasickému lineárnímu regresnímu modelu tedy zde zřejmě nejsou splněny dva předpoklady :

- vysvětlující proměnná Y_{t-1} není nekorelovaná s náhodnou složkou v_t
- vysvětlující proměnná Y_{t-1} není nestochastická (její součástí je náhodná složka ε_{t-1}), což je hned vidět, zapíšeme-li model se zpožděním o 1 krok.

Odhad parametrů Koyckovy rovnice (v autoregresním tvaru) je jinak technicky **velmi jednoduchý – jde o regresní model se dvěma regresory bez jedničkového vektoru – snadno proveditelný metodou OLS, která však bude postrádat optimální vlastnosti (stejně jako např. odhad pomocí WLS).**
Odhadnutými parametry budou q* (přímý odhad q) **a c*= b*(1-q*)** (odkud odhad b* snadno určíme jako **b* = c*/(1-q*)** .)

Z uvedených důvodů nemohou mít odhady parametrů (provedené obyčejnou metodou nejmenších čtverců) uspokojivé vlastnosti, nemusí být dokonce ani konzistentní. Literatura uvádí pro tuto a podobné situace některé speciální odhadové postupy (vedoucí ke konzistentním, případně i vydatným odhadům parametrů). Předpoklady o chování náhodných složek podmiňující nasazení těchto postupů jsou však obvykle málo realistické .

S ohledem na vlastnosti geometrického rozdělení přijatého v Koyckově modelu činí průměrná délka zpoždění hodnotu q/(1-q) a rozptyl $q/(1-q)^2$.

Při q = 1/3 bude EX = 1/3 : 2/3 = 1/2
Při q = 1/2 bude EX = 1/2 : 1/2 = 1
Při q = 2/3 bude EX = 2/3 : 1/3 = 2

Interpretačně to znamená, že agregovaný účinek všech v modelu uvažovaných zpožděných vysvětlujících veličin (jichž je nekonečně mnoho) se projeví zhruba stejně jako jediná zpožděná vysvětlující proměnná, která bude mít zpoždění 0,5 roku resp. 1 rok, resp. 2 roky.

Následující trojice modelů s rozloženými zpožděními si vydobyla již tradiční postavení v ekonomických aplikacích. Jejich společným znakem je, že s určitými obměnami navazují na Koyckův model (geometricky rozloženého zpoždění). Jmenovitě se jedná o :

1) Model částečného přizpůsobení [Nerlove M. 1958]

Základní rovnicí modelu je vztah představující hypotézu, že požadovaná (rovnovážná resp. optimální) úroveň vysvětlované proměnné (značené obvykle Y_t* , která není měřitelná, je lineární funkcí vysvětlující nezávisle proměnné X_t (nezpožděné). Příslušná rovnice má tedy tvar

(2.1) $$Y_t^* = \gamma_0 + \beta_0 X_{t} + \varepsilon_t$$

přičemž skutečná změna závisle proměnné od období t-1 k období t tj. rozdíl $Y_t - Y_{t-1}$ je v důsledku procesu částečného přizpůsobení úměrná proporcionální změně $Y_t^* - Y_{t-1}$. Zapsáno relací

(2.2) $$Y_t - Y_{t-1} = d \, . \, (Y^*_t - Y_{t-1}) \qquad 0 < d \leq 1$$

kde d je konstanta (*míra reakce na žádanou změnu*) nazývaná <u>koeficient adaptace/přizpůsobení</u>. Zřejmě, v případě d=1 by šlo o úplné přizpůsobení.

Příkladem modelu typu (2.1) může být sledování vývoje vybavenosti domácností určitým předmětem dlouhodobé spotřeby. Pak hodnota Y^*_t může představovat "optimální úroveň vybavenosti" , tedy aproximativně vyjádřenou, neměřitelnou veličinu. Za vysvětlující proměnnou X_t pak můžeme považovat úroveň příjmu této domácnosti. Je přitom realistické očekávat, že v libovolném čase t **se hladina vybavenosti nepřizpůsobí změně příjmu ihned, takže optimální úrovně se nedosáhne ihned, ale až s určitým prodlením. Příčiny mohou být nejrůznější : nedocenění užitné hodnoty předmětu, neuvědomění spotřebitele přiměřené optimální úrovně, nedostatečná nabídka v sortimentu na trhu, setrvačnost v dosavadním spotřebním chování u domácností apod.**

Rovnici (2.2) lze alternativně vyjádřit jako

(2.3) $$Y_t = d . Y_t^* + (1 - d) Y_{t-1}$$

což lze interpretovat tak, že dosažená úroveň vybavenosti statkem Y v čase t je váženým průměrem optimální úrovně vybavenosti v témže čase Y_t^* a úrovně skutečné vybavenosti v období t-1 tj. Y_{t-1}, váhy jsou použity v poměru d vůči 1-d .

Dosadíme-li (2.1) do (2.3) dospěje se po jednoduché úpravě

$$Y_t - Y_{t-1} = d \, . \, (\gamma_0 + \beta_0 X_{t} + \varepsilon_t - Y_{t-1})$$

k autoregresnímu tvaru modelu částečného přizpůsobení

(2.4) $$Y_t = \gamma_0 . d + \beta_0 . d \, X_t + (1- d) Y_{t-1} + v_t \qquad , \text{ kde } v_t = d . \varepsilon_t$$

Jak patrno, formální zápis modelu (2.4) je v podstatě shodný se zápisem modelu Koyckova. Má však jednodušeji specifikovanou náhodnou složku.

Náhodné složky v_t zde nejsou závislé na svých zpožděných hodnotách, tj. budou sériově nekorelované. Metoda OLS poskytne v takovém případě konzistentní odhady parametrů [$c_1 = \gamma_0.d$, $c_2 = \beta_0. d$, $c_3 = (1- d)$] , z nichž postupně snadno odvodíme hodnoty d , β_0 a γ_0 . Rovněž další příznivé vlastnosti těchto odhadů (nestrannost, vydatnost) budou v tomto případě zajištěny.

Strukturu náhodných složek v_t lze vyvodit ze vztahu (2.4). Opakovanými substitucemi (dosazováním za Y_{t-1} ,Y_{t-2} , ... ,Y_{t-m} dostaneme

$$v_t = d.\varepsilon_t + (1-d)\, d.\varepsilon_{t-1} + (1-d)^2\, d.\varepsilon_{t-2} + \,.......\, = d. \sum_{j=0}^{\infty} (1-d)^j \varepsilon_{t-j}$$

Ze statistického hlediska lze rozdíl mezi Koyckovým modelem a modelem částečného přizpůsobení spatřovat v tom, že struktura náhodných složek modelu částečného přizpůsobení je generována procesem klouzavých součtů (*moving average*) původní náhodné složky. V Koyckově modelu sledují náhodné složky autoregresní posloupnost.

2) <u>Model adaptivních očekávání</u> [Cagan P.1956]

Tento model je uveden regresní specifikací

(3.1) $$Y_t = \gamma_0 + \beta_0 X_t^* + \varepsilon_t$$

a byl v původním uvedení spojen se spotřební funkcí tvaru

(3.1A) $$C_t = \gamma_0 + \beta_0 M_t^* + \varepsilon_t,$$ **s významem veličin**

C_t .... objem spotřebních výdajů domácností
M_t^*...... očekávaná výše důchodů/příjmů
ε_t .... náhodná složka s obvyklými vlastnostmi

Jde o formulaci konformní s *Friedmanovou hypotézou permanentního důchodu* (HDP) : spotřebitelé v čase, kdy realizují své nákupy, zpravidla ještě neznají skutečnou výši příjmů, které obdrží ve stejném období; své spotřební zvyklosti tedy řídí dle očekávaného důchodu M_t^*, *až na výjimky ne nutně totožného se skutečným M_t .*

Očekávanou výši *permanentního* důchodu však nelze určit pozorováním (tato proměnná je „latentní“) , definujeme ji tedy nepřímo pomocí vztahu vyjadřujícího přizpůsobení důchodu :

(3.2) $$X_t^* - X_{t-1}^* = g \,.\, (X_t - X_{t-1}^*) \qquad 0 < g \le 1$$

neboli jinak zapsáno

(3.3) $$X_t^* = g.X_t + (1-g).X_{t-1}^*$$

Konstanta g se nazývá <u>*koeficientem adaptivních očekávání*</u>. Rovnici (3.3) lze interpretovat tak, že ekonomické subjekty přizpůsobují svá očekávání

ve vztahu k X na základ zkušenosti z minulosti. Postupují přitom tak, že skutečnou hodnotu X (v kterémkoliv období t) porovnávají s hodnotou X*, která byla očekávána. Přitom se řídí logickou úvahou

a) Je-li skutečná hodnota X_t oproti očekávané X_t* větší, přizpůsobují svá očekávání stejným směrem (nahoru)
b) Je-li skutečná hodnota X_t oproti očekávané X_t* menší, přizpůsobují svá očekávání také stejným směrem (dolů) .

Čím je koeficient g blíže k 1, tím je větší míra přizpůsobení.

Ze zápisu (3.3) plyne, že očekávaná („permanentní") výše důchodu je váženým průměrem skutečné hodnoty tohoto důchodu X_t a jeho očekávané úrovně X_{t-1}* v předchozím období (váhy jsou g resp. 1-g). Znamená to tedy, že

a) Při g = 1, pak $X_t^* = X_t$, tzn. domácnosti se řídí skutečnou výši aktuálního důchodu

b) Pokud by g = 0, pak $X_t^* = X_{t-1}^*$, tzn. domácnosti by se nepřizpůsobily vůbec (skutečnému důchodu není přisouzen žádný význam) a očekávání mají statický charakter (nemění se , zůstávají na úrovni očekávání z času t-1).

Dosazením ze vztahu (3.3) do (3.1) dostaneme

(3.4) $$Y_t = \gamma_0 + \beta_0 . g.X_t + \beta_0.(1-g) X_{t-1}^* + \varepsilon_t$$

Jestliže nyní vyjádříme výchozí specifikaci modelu pro období t-1, tzn.

(3.4A) $$Y_{t-1} = \gamma_0 + \beta_0 . g.X_{t-1} + \beta_0.(1-g) X_{t-2}^* + \varepsilon_{t-1}$$

a po jejím vynásobení hodnotou 1-g odečteme od (3.4), dospějeme k výsledné rovnici <u>autoregresního modelu adaptivních očekávání</u>

(3.5) $$Y_t = \beta_0 . g + \beta_1 . g X_t + (1-g) Y_{t-1} + u_t \text{, kde}$$

(3.5a) $$u_t = \varepsilon_t - (1-g) \varepsilon_{t-1}$$

Jak patrno, formálně je model vyjádřen stejným zápisem jako má Koyckův model, dokonce shodným jaký má i model částečného přizpůsobení, avšak má jinou specifikaci náhodných složek a jinak jsou též interpretovány jeho parametry.

<u>Poznámka</u> : formální shoda všech dosud uvedených dynamických modelů zapsaných v autoregresním tvaru je dána tím, že všechny vycházejí ze stejného apriorního omezení časové struktury rozložených zpoždění, která je reprezentována geometricky klesajícími váhovými koeficienty.

<u>Variantní specifikace modelu adaptivních očekávání :</u>

Spočívá v tom, že se na pravé straně vztahu (3.2) použije místo X_t hodnota

X_{t-1}. Obdrží se vztah

$$(3.6) \qquad X_t^* - X_{t-1}^* = g \,.\, (X_{t-1} - X_{t-1}^*) \qquad 0 < g \le 1$$

Podnětem pro tuto obměnu je skutečnost, že při specifikaci očekávání v běžném období t zpravidla ještě neznáme přesně X_t , ale pouze předchozí hodnotu X_{t-1}.

Kvantifikace parametrů takto upraveného modelu je spojena se stejnými problémy jako u Koyckova modelu, protože náhodné složky u_t jsou opět sériově zkorelovány. Aplikovat metodu OLS přímo na takovýto model vede k nekonzistentním a vychýleným odhadům. Jedním z možných způsobů řešení je nasazení metody *instrumentálních proměnných (IV)*. Odhady nemusí být vydatné, ale budou aspoň **konzistentní. Jinou možností je použití *nelineární metody nejmenších čtverců (NLLS)* .**

Kombinací modelu částečného přizpůsobení a adaptivních očekávání lze dospět k obecnějšímu modelu (geometricky) rozloženého zpoždění : Modelovou hypotézu propojující regresním vztahem obě nepozorované proměnné Y^*_t a X^*_t zapíšeme jako

$$(3.7) \qquad Y^*_t = c_0 + c_1 X^*_t + \varepsilon_t$$

K vyjádření obou přímo nepozorovatelných proměnných užijeme vztahy

$$(2.2) \qquad Y_t - Y_{t-1} = d \,.\, (Y^*_t - Y_{t-1}) \qquad 0 < d \le 1$$

z modelu částečného přizpůsobení resp.

$$(3.3) \qquad X_t^* = g.X_t + (1-g).X_{t-1}^* \qquad 0 < g \le 1$$

z modelu adaptivních očekávání

Spojením (3.7), (2.2) a (3.3) dostaneme kombinovaný model, který již neobsahuje přímo neměřitelné veličiny :

$$(3.8) \qquad Y_t = c_0.d.g + c_1.d.g\, X_t + [(1-g) + (1-d)]\, Y_{t-1} - [(1-g)\,.\,(1-d)]\, Y_{t-2} + [d\, \varepsilon_t + d.(1-g)\, \varepsilon_{t-1}]$$

,

neboli jinak zapsaný

$$(3.9) \qquad Y_t = a_0 + a_1.\, X_t + a_2.\, Y_{t-1} + a_3\, Y_{t-2} + \eta_t \qquad ,$$

Tento model je lineární v parametrech a_0 , a_1 , a_2 , a_3 ale nelineární v původních parametrech c_0, c_1, d, g. Regresní rovnice (3.9) popisuje závislost Y_t na X_t , Y_{t-1} a Y_{t-2}. Jednoznačně však nelze určit odhady d a g, protože odhadnout lze vždy jen kombinace těchto parametrů (vyskytují se symetricky)**. *Model není* v těchto parametrech *identifikován*. Odhady parametrů c_0 , c_1** oproti tomu **nečiní problém. Náhodná složka je generována procesem MA(1),** tedy **procesem klouzavých součtů/průměrů 1. řádu.**

1) Model racionálních očekávání [Jorgenson D.W. 1966]

Empiricky bylo zjištěno, že *„mechanický přístup"* k formulaci budoucích očekávání (na základě hypotézy adaptivních očekávání) vede k předpovědím, které jsou obvykle zatíženy systematickou chybou (nadhodnocováním nebo podhodnocováním)

Uvedené obtíže do určité míry překonává hypotéza obsažená v modelu *racionálních očekávání* . Obecný podtext tohoto modelu je spojen s úvahou, že ekonomické subjekty (domácnosti, firmy) tvoří svá individuální očekávání tak, že využívají veškeré jim dostupné , podstatné a účelné informace, v důsledku čehož jejich budoucí chování bude vycházet z obecně platných postulátů ekonomické teorie, disponibilních informací o tvaru modelových vztahů a dat spolehlivé datové základny.

Součástí těchto podstatných informací je též znalost cílů hospodářské politiky vlády. Změny vládní makroekonomické politiky se projeví na změnách individuálních očekávání , a protože existuje zpětná vazba mezi očekáváním ekonomických subjektů a jejich následným chováním přestává být ekonometrický model adekvátním prostředkem popisu chování reálného ekonomického systému (národní ekonomiky). To má dopad jednak na zhoršení predikční schopnosti modelu, ale i na užitečnost jeho použití při posouzení odezev chování ekonomických subjektů na změny vládní hospodářské politiky. *Jinými slovy, pokud do modelu nezahrnujeme též informaci týkající se změn ekonomické politiky, a zamýšlených dopadů do procesu formování subjektivních očekávání, bude to mít za důsledek neracionální chování ekonomických subjektů.*

Pro formální vyložení použijme zjednodušené schéma

(4.1) $$X_t = p_0 + p_1 Z_{t-1} + p_2 Z_{t-2} + w_t$$ **, kde**

- X_t **je vysvětlovaná endogenní proměnná**
- Z_{t-1} **je zpožděná exogenní proměnná**
- w_t **je náhodná složky s obvyklými vlastnostmi**

Podstata rozhodování spočívá mj, v tom, že v období t-1 ekonomický subjekt odhaduje očekávanou hodnotu X^*_t , která se značí $E_{t-1}(X_t)$ na základě vztahu

(4.2) $$E_{t-1}(X_t) = X_t = p_0 + p_1 Z_{t-1} + p_2 Z_{t-2} = X^*_t ,$$

takže subjektivní očekávání $E_{t-1}(X_t)$ je skutečně shodné s objektivní předpovědí proměnné X pro běžné období získanou modelu (4.1) na základě informací dostupných v předchozího období t-1. Vlastnost racionality zde spočívá v tom, že takto formované očekávání či předpovědi není zatíženo systematickou chybou.

Chyba předpovědi je zde dána rozdílem

(4.3) $$X_t - X^*_t = w_t$$

Náhodná složka w_t není zkorelována s X^*_t . Abychom se vyhnuli vzniku systematických chyb v procesu generování očekávaných hodnot proměnné

X, musí mít chyba předpovědi nulovou střední hodnotu a nesmí být korelována se svými předchozími hodnotami. Nesmí navíc existovat ani systematický vztah mezi X^*_t a libovolnými proměnnými, jichž se týká disponibilní informace z období t-1. Jinými slovy : chyba předpovědi nesmí být predikovatelná.

V ekonometrické analýze se často hypotéza racionálních čekání užívá jako alternativa k hypotéze adaptivních očekávání. Uvažujeme-li závislost spotřeby C_t na očekávaném/permanentním důchodu M_t^*v podobě (3.1), můžeme přizpůsobovací proces adaptivních očekávání nahradit vztahem pro racionální očekávání : dosazením $E_{t-1}(M_t)$ za M^*_t dostaneme vztah

(4.4) $$C_t = \gamma_0 + \beta_0 E_{t-1}(M_t) + \varepsilon_t,$$ **s významem veličin**

Racionální očekávání $E_{t-1}(M_t)$ však není měřitelné, proto postup při odhadu parametrů modelu (4.2) spočívá zpravidla ve vylučování znamenajících očekávání z modelu a v následném odhadu ekvivalentního modelu, který obsahuje jen pozorovatelné veličiny. Taková eliminace je jednoduchá, pokud jde o lineární model obsahující jen očekávání běžných hodnot vysvětlovaných proměnných (ne hodnot budoucích) .

Postup, který uplatnil McCallum [1976] je dvoustupňový a je obdobou *techniky instrumentálních proměnných* (nejprve se nahradí $E_{t-1}(M_t)$ ze vztahu (4.1) metodu OLS přibližnou hodnotu $E^*_{t-1}(M_t)$, kterou představuje odhad M^*_t. V dalším kroku po nahrazení $E^*_{t-1}(M_t)$ vyrovnanou hodnotou M^*_t se již dospěje pomocí OLS k odhadům obou parametrů γ_0, β_0 .

Z aplikačních oblastí pro modely racionálních očekávání jsou především modely inflačních očekávání, zaměstnanosti , poptávky po penězích apod.
Z posledních prací se testování této hypotéza zabývají např. M.C.Lovell [1986], S. Figlewski a P. Wachtel [1981] , B.M. Friedman[1980] , J.E. Pesando[1975] .

Model racionálních očekávání formuloval D.W.Jorgenson v obecné podobě

(4.5) $$a_0Y_t + a_1Y_{t-1} + a_2Y_{t-2} + \dots + a_rY_{t-r} = b_0X_t + b_1X_{t-1} + b_2X_{t-2} + \dots + b_sX_{t-s} + \varepsilon_t.$$

Opět se zde střetáváme s problémem odhadu parametrů. I když budou náhodné složky ε_t rozděleny nezávisle, náhodné složky v_t , kde

(4.6) $$v_t = \varepsilon_t - a_1\varepsilon_{t-1} .$$

budou sériově zkorelovány, což má opět nepříznivý dopad na vlastnosti výsledných odhadů parametrů (srovnatelně s Koyckovým modelem). Vztah (4.6) pro náhodné složky představuje autoregresní schéma 1. řádu .

<u>Poznámka</u> : Model přechází při omezení hloubky zpoždění na r = 1, s = 0 v Koyckův model *(pokud v něm vynecháme úrovňovou konstantu)* .