Zobecněný lineární regresní model

Zobecněný lineární regresní (jednorovnicový) model je charakterizován následujícími vlastnostmi modelových veličin :

1. ***Centrovanost náhodných složek*** $E\varepsilon = 0$
2. ***Obecnost kovarianční matice náhodných složek :*** $Cov(\varepsilon, \varepsilon') = \Sigma$ ***(obecná, nestochastická matice)***
   - ***2a) heteroskedasticita***
   - ***2b) autokorelovanost náhodných složek***
3. ***Nekorelovanost náhodných složek s nezávisle proměnnými*** $EX'\varepsilon = 0$ **.**
4. ***Plná hodnost matice vysvětlujících proměnných*** $h(X) = k$

Odhadová funkce zobecněné metody nejmenších čtverců (GLS) v zobecněném linerním regresním modelu

(tzv. Aitkenovo zobecnění MNČ/OLS)

poskytuje odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ regresních koeficientů β ve tvaru

$$ {}_{GLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y $$

a má v zobecněném lineárním regresním modelu následující vlastnosti :

A. ***Odhad*** ${}_{GLS}\hat{\beta}$ ***je nestranný*** pro libovolnou velikost vzorku T, protože :

$$ E({}_{GLS}\hat{\beta}) = E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y = E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(X\beta + \varepsilon) = $$
$$ = E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X\beta + E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon $$
$$ = E\beta + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon = \beta + 0 = \beta $$

B. ***Odhad*** ${}_{GLS}\hat{\beta}$ ***je lineární*** **(**vůči y**)**, neboť je lineární formou pozorování závisle proměnné ${}_{GLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$ s maticí $C' = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}$ koeficientů příslušné lineární formy. Poznamenejme, že vždy platí $C'X = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X = I_k$, kde I_k je jednotková matice řádu k.

C.***Kovarianční matice*** příslušná odhadové funkci ***má tvar*** :

$$ Cov({}_{GLS}\hat{\beta}) = E\left[(\hat{\beta} - E\hat{\beta}).(\hat{\beta} - E\hat{\beta})'\right] = E\left[(\hat{\beta} - \beta).(\hat{\beta} - \beta)'\right] = $$
$$ Cov({}_{GLS}\hat{\beta}) = E\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y - \beta\right)\right]\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y - \beta\right)'\right] = $$
$$ = E\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(X\beta + \varepsilon)\right) - \beta\right].\left[\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(X\beta + \varepsilon)\right) - \beta\right]' = $$
$$ = E\left[\beta + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon - \beta\right]\left[\beta + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon - \beta\right]' = $$

$$= E\left[(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\right]\left[(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\right]'$$

$$= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\left[\varepsilon\varepsilon'\right]\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} =$$

$$= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}(X'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}X)(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$ □.

D. odhad $_{GLS}\hat{\beta}$ **je nejlepší** ve smyslu **minimální kovarianční matice** $Cov(_{GLS}\hat{\beta})$ **,**

neboť pro kovarianční matici kterékoliv jiné (lineární) odhadové funkce $\widetilde{\beta}$ platí :

$$Cov(\widetilde{\beta}) - Cov(_{GLS}\hat{\beta}) = \Omega$$

kde Ω je nějaká pozitivně semidefinitní matice řádu k (rozměrů $k \ x \ k$).

<u>ověření</u>: Bez újmy na obecnosti můžeme matici D libovolné jiné **lineární** odhadové funkce $\widetilde{\beta}$ vyjádřit ve tvaru

$$D = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G'$$

<u>Poznámka</u> : **Vzhledem k požadavku na nestrannost** $_{GLS}\hat{\beta}$ **musí s ohledem na platnost** $D'X = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X + G'X = I_T$ **, vždy platit** $G'X = 0.$

Pro libovolnou jinou (lineární, nestrannou) odhadovou funkci tedy musí platit

$$Cov(\widetilde{\beta}) = E\left[(\widetilde{\beta} - E\widetilde{\beta}).(\widetilde{\beta} - E\widetilde{\beta})'\right] = E\left[(\widetilde{\beta} - \beta).(\widetilde{\beta} - \beta)'\right] =$$

$$= \mathbf{E\ [\ (\ (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')\ y - \beta]\ .[\ (\ (\ X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')y' - \beta'\ ]'}$$

$$= \mathbf{E\ [\ (\ (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta]\ .[\ (\ (\ X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')\ (X\beta + \varepsilon) - \beta]'}$$

$$= \mathbf{E\ [\ (\ (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X\beta + G'X\beta + \varepsilon) + G'\varepsilon - \beta]\ .[\ (\ (\ X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\ X\beta + G'X\beta + + G'\varepsilon) - \beta]'}$$

……………………………………………………………………………………………………

$$= \mathbf{E\ [\ (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\ \varepsilon + G'\varepsilon]\ .\ [\ (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\ \varepsilon\ + G'\varepsilon\ ]\ ' =}$$

$$= \mathbf{E[\ (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\varepsilon'\ \Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\varepsilon\varepsilon'\ G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\ \varepsilon\varepsilon'G + G'\varepsilon\varepsilon'\ \Sigma^{-1}X\ (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}]}$$

$$= \mathbf{(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon\varepsilon'\ \Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'E\varepsilon\varepsilon'G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon\ \varepsilon'G + G'E\varepsilon\ \varepsilon'\ \Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}}$$

$$= \mathbf{(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\Sigma\ \Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\ \Sigma G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\Sigma\ G + G'\ \Sigma\ \Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} =}$$

$$= \mathbf{(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\ \Sigma G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\ G + G'\ X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}}$$

$$= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\Sigma G = Cov(_{GLS}\hat{\beta}) + G'\Sigma G,$$

kde $G'\Sigma G$ **je zřejmě pozitivně semidefinitní matice.** □.

<u>Poznámka 1:</u> Odhadová funkce zobecněné metody nejmenších čtverců $_{GLS}\hat{\beta}$ ve tvaru $_{GLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$ v situacích, kdy (což je pravidlem) neznáme přesný tvar kovarianční matice Σ není přímo použitelná. Proto je ji nutno zpravidla nahradit výrazem

$$_{GLS}\hat{\beta} = (X'\hat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Sigma}^{-1}y,$$

kde $\hat{\Sigma}$ je nějaký vhodný odhad matice Σ.

Poznámka 2: **Odhadová funkce obyčejné metody nejmenších čtverců (OLS) $_{OLS}\tilde{\beta}$ má *v zobecněném lineárním regresním modelu* tyto vlastnosti :**

(A) **odhad $_{OLS}\tilde{\beta}$ je nestranný**

(B) **odhad $_{OLS}\tilde{\beta}$ je lineární**

(C) **odhad $_{OLS}\tilde{\beta}$ není nejlepší**

Odvození zobecněné metody nejmenších čtverců GLS

Uvažujme nejprve lineární regresní model ve tvaru

(1) $$y = X\beta + \varepsilon$$

u kterého uvolníme předpoklad **(2)** a nahradíme ho předpokladem **(2*)**
Kovarianční matice náhodných složek má obecný tvar :

(2*) $Cov(\varepsilon, \varepsilon') = \Sigma$ ***(obecná, nestochastická matice),***

což znamená ***2a) heteroskedasticitu***

2b) autokorelovanost náhodných složek

Znormujeme-li matici Σ "průměrným rozptylem" σ^2 , můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$\Sigma = \sigma^2 . V \qquad ,$$

kde σ^2 je skalár a V je symetrická pozitivně definitní matice. Matice V je normována tak, aby její stopa byla rovna T (tj. tr(V) = T) . Průměr diagonálních prvků Σ je pak roven σ^2 **.**
Formálně zapsáno

$$\Sigma = \sigma^2 . V = \sigma^2 . \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

Pro $V = I_T$ model přechází ve standardní lineární regresní model.

Připomeňme, že libovolnou (symetrickou) pozitivně definitní matici lze vyjádřit ve tvaru součinu dvou regulárních vzájemně transponovaných matic. Zapišme tedy

(3) $$V = R^{-1}.R'^{-1} \quad \text{neboli} \quad V^{-1} = (R^{-1}.R'^{-1})^{-1} = R'.R$$

Přitom zřejmě platí $R.V.R' = I_T$ **.**

Vynásobíme-li model **(1)** touto nesingulární maticí R (řádu i hodnosti T), dostaneme

(4a) $$Ry = R.X.\beta + R.\varepsilon$$ neboli

(4) $$y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

kde píšeme $y^* = R.y$, $X^* = R.X$, $\varepsilon^* = R.\varepsilon$ **.**

Určeme kovarianční matici náhodného vektoru transformovaných náhodných složek

(5) $$E(\varepsilon^*.\varepsilon^*{}') = E(R.\varepsilon.\varepsilon' R') = \sigma^2 R.V.R' = \sigma^2.I_T$$

[Podotkněme, že matice R byla volena právě s cílem dosáhnout diagonální kovarianční matice náhodných složek].

Ukážeme, že transformovaný model (4) má vlastnosti ***standardního*** *lineárního regresního modelu:*

Náhodné složky ε^* **jsou** totiž

a) ***centrované*** : $E(\varepsilon^*) = E(R.\varepsilon) = 0$ **.**

b) vzájemně ***nekorelované a***

homoskedastické **:** $E(\varepsilon^*.\varepsilon^*{}') = E(R.\varepsilon.\varepsilon'.R') = \sigma^2.R.V.R' = \sigma^2.I_T$ **.**

c) ***nekorelované s vysvětlujícími proměnnými***:

$$E(X^*{}'.\varepsilon^*) = E(X'R'R\varepsilon) = (RX)'R(E\varepsilon) = 0 \ .$$

(předsunutí před střední hodnotu je možné vzhledem k nestochastičnosti matic X, R).

Protože matice V^{-1} je stejně jako V symetrická a pozitivně definitní, lze ji vyjádřit takto:

(6) $$V^{-1}A = A.D$$, kde

- matice $A_{[TxT]}$ je matice, jejíž sloupce tvoří charakteristické vektory matice V^{-1} Vlastní vektory mohou být zapsány při vhodné normalizaci v ortonormálním tvaru, takže pro sloupce matice A lze psát $a_i.a_i = 1$**,** $a_i.a_j = 0$ pro $i \neq j$. Proto tedy platí $A.A' = I_T$ **.**

- matice D [T x T] je diagonální matice s diagonálou tvořenou charakteristickými čísly R^{-1}**:** $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^T$ Pro matici V^{-1} lze psát (při násobení **(6)** maticí A’ zprava) :

(6a) $$V^{-1} = A.D.A' = A.D^{1/2}.D^{1/2}.A'$$,

kde D je diagonální matice, na jejíž diagonále jsou nějak (vzestupně či sestupně) seřazeny charakteristické kořeny/čísla matice V^{-1}**.** Matici R definujeme vztahem

$$R = D^{1/2}.A'$$

Je zřejmé, že při této volbě matice R bude platit :

(7) $$R'R = A.D^{1/2}.D^{1/2}A' = V^{-1}$$

Využijeme-li nyní odhadovou funkci obyčejné metody nejmenších čtverců OLS k odhadu parametrů modelu (4), dostaneme :

$$_{OLS}\beta^* = (X^*{}'X^*)^{-1}X^*{}'y^* = (X'R'RX)^{-1}X'R'Ry = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

nebo rovnocenně

(8) $$_{OLS}\beta^{*} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$$

Kovarianční matice příslušná této odhadové funkci má tvar

(9) $$Cov(\beta^{*}) = \sigma^{2}.(X^{*}{'}X^{*})^{-1} = \sigma^{2}.(X'V^{-1}X)^{-1} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$

Vzhledem k tomu, že prvky matice V zpravidla neznáme, je nutno při praktickém uplatnění odhadové funkce GLS (zobecněné metody nejmenších čtverců) použít nějaký její odhad.

Nestranný odhad s^2 pro σ^2 získáme standardním způsobem

(10) $$s^{2} = \frac{e^{*}{'}e^{*}}{T-k} = \frac{\left[y^{*} - X^{*}b\right]'.\left[y^{*} - X^{*}b\right]}{T-k} =$$
$$= \frac{\left[R.y - R.Xb\right]'.\left[R.y - RXb\right]}{T-k} = \frac{\left[y - Xb\right]'.R'R\left[y - Xb\right]}{T-k} = \frac{e'Ve}{T-k}$$

Poznámka: pracujeme-li s centrovanými veličinami y^{*}, lze ***rozptyl závisle proměnné*** vyjádřit jako

$$y^{*}{'}y^{*} = \left[X^{*}b + e^{*}\right]'\left[X^{*}b + e^{*}\right] = b'X'R'RXb + e'.R'R.e =$$
$$= b'X'V^{-1}Xb + e'V^{-1}e$$

První člen představuje vysvětlený , druhý člen nevysvětlený (reziduální) rozptyl. Reziduální rozptyl je představován kvadratickou formou v proměnných e s maticí koeficientů V^{-1}.

Získat takový odhad není však pro obecný případ (obecná matice Σ) vůbec snadné, neboť narážíme na nedostatek vstupní modelové informace:

- matice Σ má až (T+1).T/2 různých prvků, zatímco modelová informace obsažená v matici X sestává pouze z T x k pozorovaných hodnot vysvětlujících proměnných. Při T=20 bychom potřebovali odhadnout až 210 různých prvků matice Σ. Z tohoto důvodu se v reálných situacích zpravidla uplatňují jednodušší verze obecné GLS-metody, hlavně

a) vážená metoda nejmenších čtverců WLS, která operuje s maticí Σ, jež má nenulové prvky (rozptyly) pouze na hlavní diagonále

b) různé speciální tvary matice Σ, jejíž prvky závisí na (podstatně) menším počtu jiných parametrů, které jsou snáze odvoditelné z dostupných dat.

Uvědomme si, že v případě:

- standardního lineárního regresního modelu (metodou OLS) můžeme využít k odhadu jediného parametru matice Σ ***(*** *stejně velkého* ***rozptylu náhodných složek) celkem T reziduálních hodnot*** e_t.

- zobecněného lineárního regresního modelu postiženého *toliko* ***heteroskedasticitou (metodou WLS) můžeme použít k odhadu T- parametrů matice*** Σ ***právě stejný počet T reziduálních hodnot*** e_t.

- zobecněného lineárního regresního modelu v plné jeho obecnosti (metodou GLS) můžeme použít k odhadu Tx(T+1)/2 parametrů matice Σ ***právě jen těch T reziduálních hodnot*** e_t***.*** *(což zřejmě bez další případné doprovodné informace nestačí).*

V případě metody WLS se problém řeší zpravidla využitím apriorního předpokladu o velikosti náhodných složek (obvykle se zde uplatní vztah velikosti rezidua a vysvětlované proměnné).[1]

V případě metody GLS se zpravidla vysloví (problém zjednodušující) předpoklad o konkrétním tvaru závislosti náhodných složek navzájem (např. předpoklad o jejich vzájemné autokorelovanosti 1. řádu), čímž se výrazně sníží počet neznámých (odhadovaných) parametrů. [2]

Odhadová funkce vážené metody nejmenších čtverců (WLS)

Vážená metoda nejmenších čtverců je speciálním případem *zobecněné metody nejmenších čtverců. Je použitelná v situacích, kdy náhodné složky regresní rovnice nevykazují vzájemnou korelovanost.*

Poskytuje odhady vykazující příznivé vlastnosti v modelu, který se vyznačuje (pouze) *heteroskedasticitou*, *nikoliv autokorelací náhodných složek*. Z obou podmínek vztahujících se k tvaru kovarianční matice náhodných složek Σ platí tedy jen

2a) *(čistá)* **heteroskedasticita:** $Cov(\varepsilon, \varepsilon') = \Sigma$ ***(diagonální nestochastická matice)***

(11) neboli $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1{}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \sigma_2{}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_T{}^2 \end{pmatrix}$,

přičemž prvky hlavní diagonály jsou obecně různé.[3]

Pro váženou metodu nejmenších čtverců platí všechny vlastnosti zobecněné metody nejmenších čtverců. Odhadová funkce však bude mít jednodušší tvar, protože prvky diagonály inverzní matice Σ^{-1} značené σ^{ii} mají tvar

(12) $$\sigma^{ii} = \frac{adj(\sigma_{ii})}{|\Sigma|} = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{T} \sigma_{jj}}{\prod_{j=1}^{T} \sigma_{jj}} = \frac{1}{\sigma_{ii}} \quad , \qquad \sigma^{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j$$

Matice Σ^{-1} je tedy také diagonální

Nyní zapíšeme tvar WLS-odhadové funkce $_{WLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$

ve „strukturním“ tvaru

[1] Způsoby řešení tohoto problému budou podrobněji vyloženy v oddíle *Heteroskedasticita*
[2] Způsoby řešení tohoto problému budou podrobněji vyloženy v oddíle *Autokorelace.*

[3] Diagonální prvky matice Σ (rozptyly) se značí buď $\sigma_t{}^2$ nebo jen σ_{tt} (tj. bez druhé mocniny)

$$X'\Sigma^{-1}X=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{1t}x_{t1} & \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{1t}x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{1t}x_{tT}\\ \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{2t}x_{t1} & \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{2t}x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{2t}x_{tT}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{Tt}x_{t1} & \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{Tt}x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{Tt}x_{tT}\end{pmatrix},\quad X'\Sigma^{-1}y=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{1t}y_t\\ \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{2t}y_t\\ \dots\dots\\ \sum_{t=1}^{T}\sigma^{tt}x_{Tt}y_t\end{pmatrix}$$

Stejně jako v případě GLS je k praktickému nasazení odhadové metody WLS zapotřebí uplatnit nějakým způsobem odhadnutý tvar $\tilde{\Sigma}$ kovarianční matice Σ. Budeme tedy pracovat s odhadovou funkcí tvaru

(13) $${}_{WLS}\hat{\beta}=(X'\tilde{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Sigma}^{-1}y\,.$$

$$X'\tilde{\Sigma}^{-1}X=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{1t}x_{t1} & \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{1t}x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{1t}x_{tT}\\ \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{2t}x_{t1} & \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{2t}x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{2t}x_{tT}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{Tt}x_{t1} & \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{Tt}x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{Tt}x_{tT}\end{pmatrix},\quad X'\tilde{\Sigma}^{-1}y=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{1t}y_t\\ \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{2t}y_t\\ \dots\dots\\ \sum_{t=1}^{T}s^{tt}x_{Tt}y_t\end{pmatrix}$$

Váhy v případě vážené metody nejmenších čtverců WLS bychom ovšem mohli stanovit i zcela subjektivně tak, že bychom užili odhadovou funkci (13) s maticí $\tilde{\Sigma}^*$ s prvky

(14) neboli $$\tilde{\Sigma}^*=\begin{pmatrix}w_1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & w_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & w_T\end{pmatrix},$$

Abychom získali příslušnou odhadovou funkci, stačí nyní všechny pozorované hodnoty ve vektoru y a v matici X dělit (po řádcích) odmocninami vah $w_1, w_2, \dots, w_T$ neboli

$$y^*=\begin{pmatrix}y_1/\sqrt{w_1}\\ y_2/\sqrt{w_2}\\ \dots\\ y_T/\sqrt{w_T}\end{pmatrix},\quad X^*=\begin{pmatrix}x_{11}/\sqrt{w_1} & x_{12}/\sqrt{w_1} & \dots & x_{1k}/\sqrt{w_1}\\ x_{21}/\sqrt{w_2} & x_{22}/\sqrt{w_2} & \dots & x_{2k}/\sqrt{w_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{T1}/\sqrt{w_T} & x_{T2}/\sqrt{w_T} & \dots & x_{Tk}/\sqrt{w_T}\end{pmatrix}$$

Poznámka: Přirozeně, na vhodnosti volby vah w_t závisí kvalita (jmenovitě vydatnost) pořízených odhadů parametrů. Budou-li váhy co nepřesněji aproximovat směrodatné odchylky náhodných složek, pak budou i odhady vydatné. Pokud bychom však vzali váhy nepatřičné (např. bychom pozorování směrodatnými odchylkami σ_t násobili(nikoliv dělili), mohli bychom dostat odhady parametrů ještě méně vydatné než při nasazení metody OLS.