

IV.

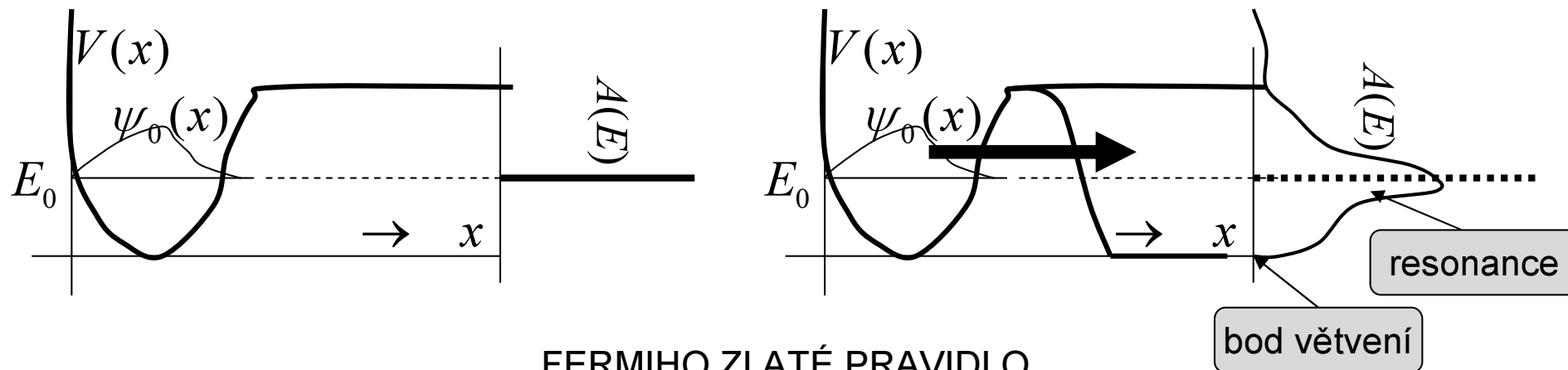
*KVAZISTACIONÁRNÍ STAVY a RELACE $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$
TUNELOVÁNÍ Z REZONANČNÍCH STAVŮ
(α -ROZPAD)*

9. 11. 2005

5.10.2005: Modelové příklady

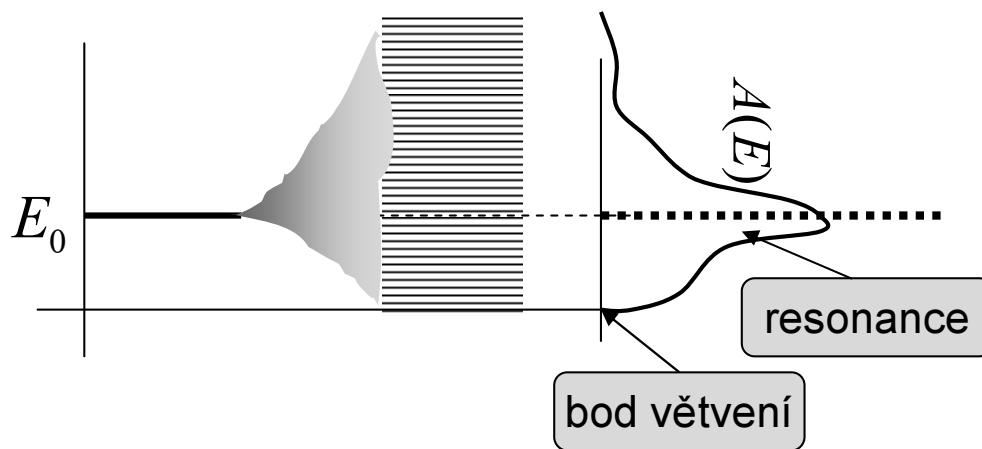
TUNELOVÁNÍ (α -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast



FERMIHO ZLATÉ PRAVIDLO

... diskrétní hladina je slabě vázána na překrývající kontinuum stavů



2.11.2005: *Modelové příklady*

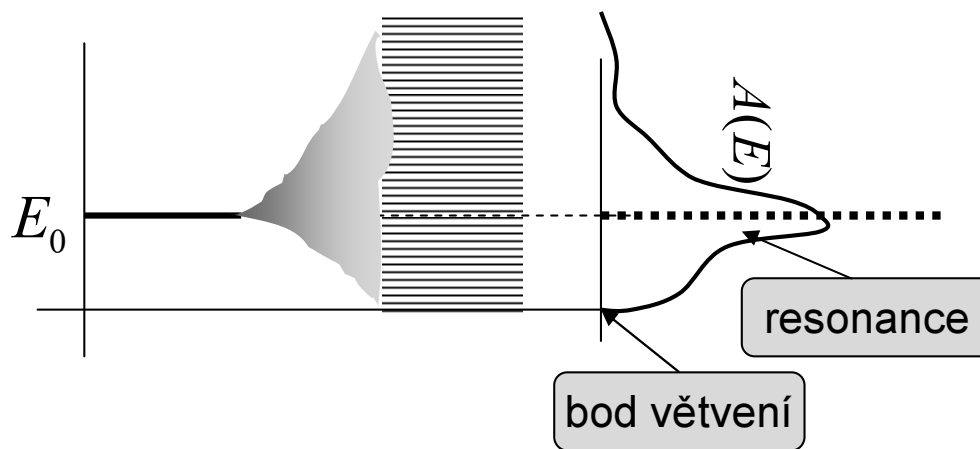
TUNELOVÁNÍ (α -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast



MODELOVÝ HAMILTONIÁN

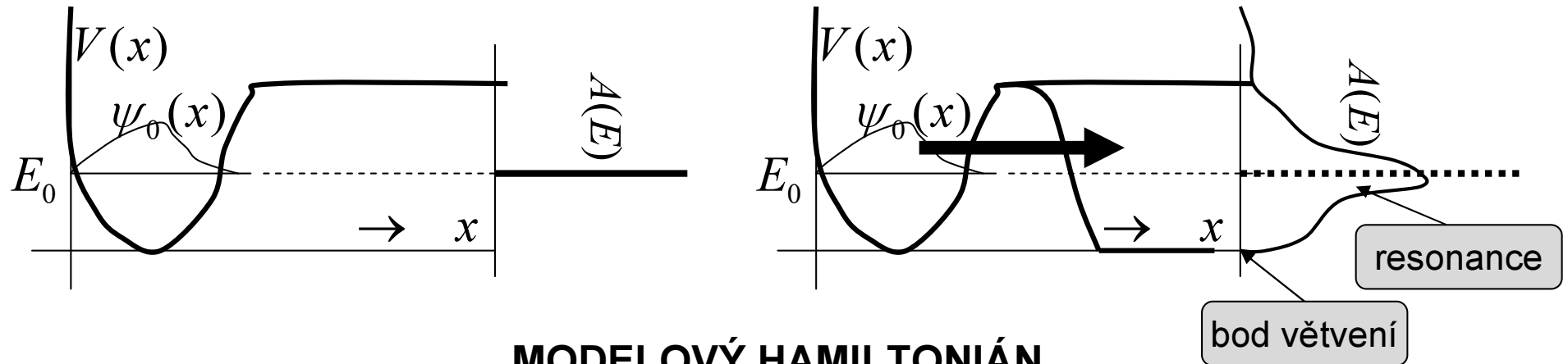
... diskretní hladina je slabě vázána na překrývající kontinuum stavů



Modelové příklady

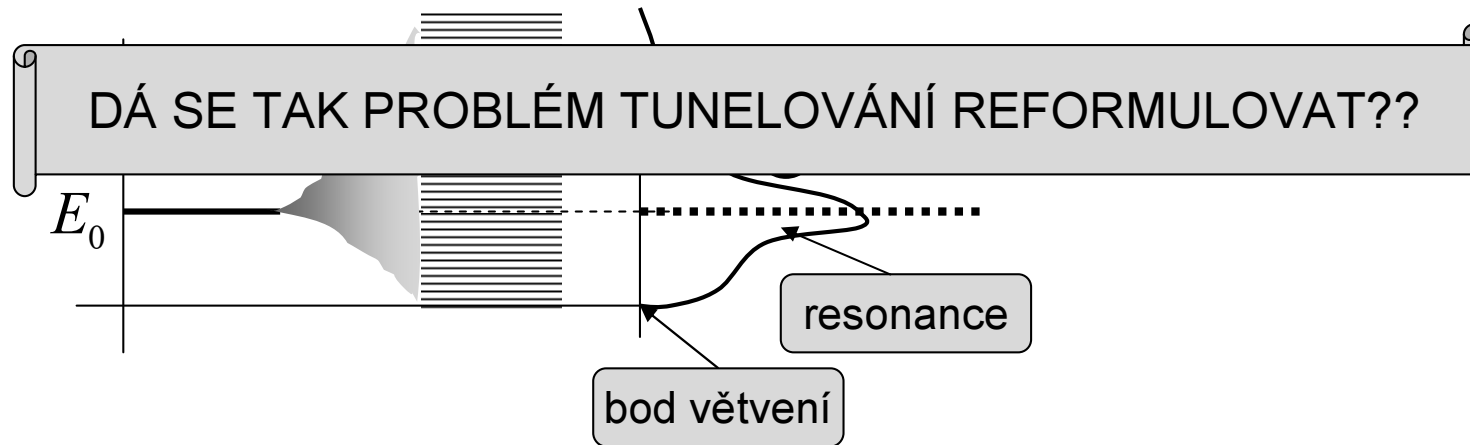
TUNELOVÁNÍ (α -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast

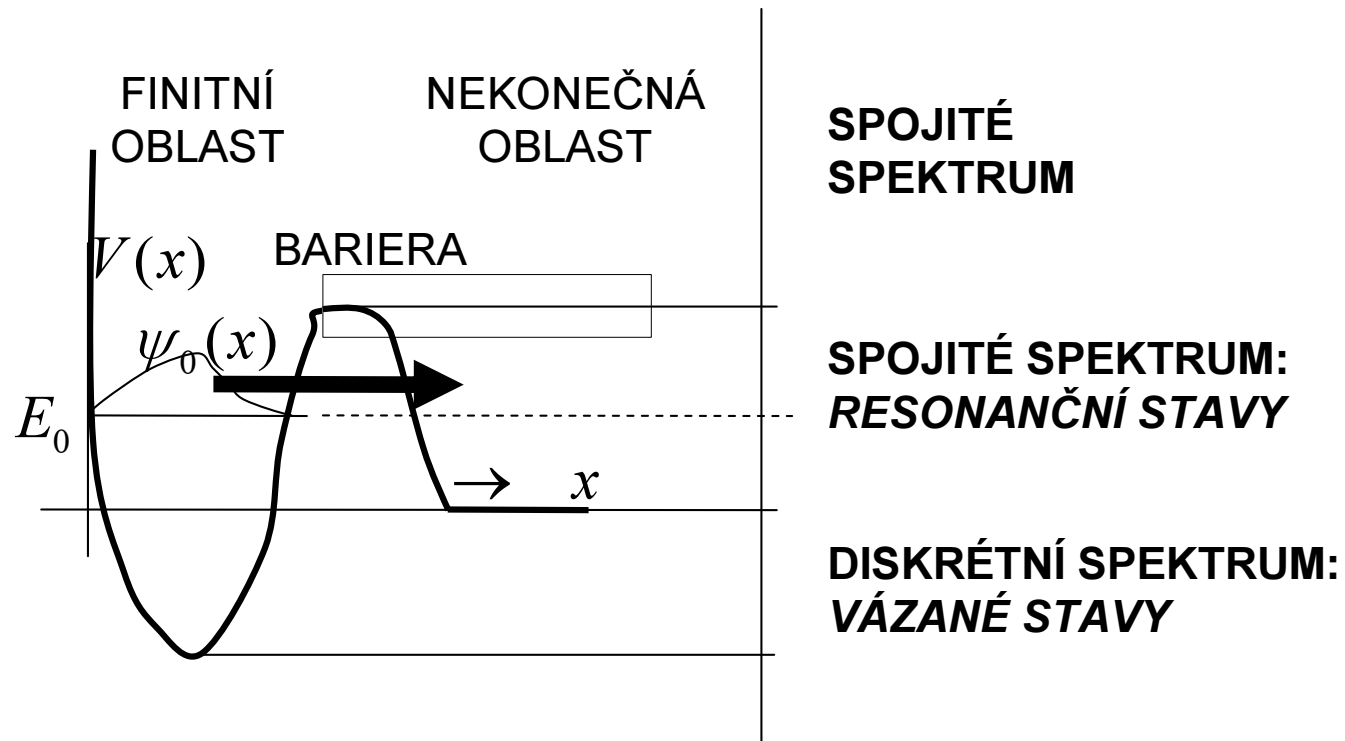


MODELOVÝ HAMILTONIÁN

... diskretní hladina je slabě vázána na překrývající kontinuum stavů

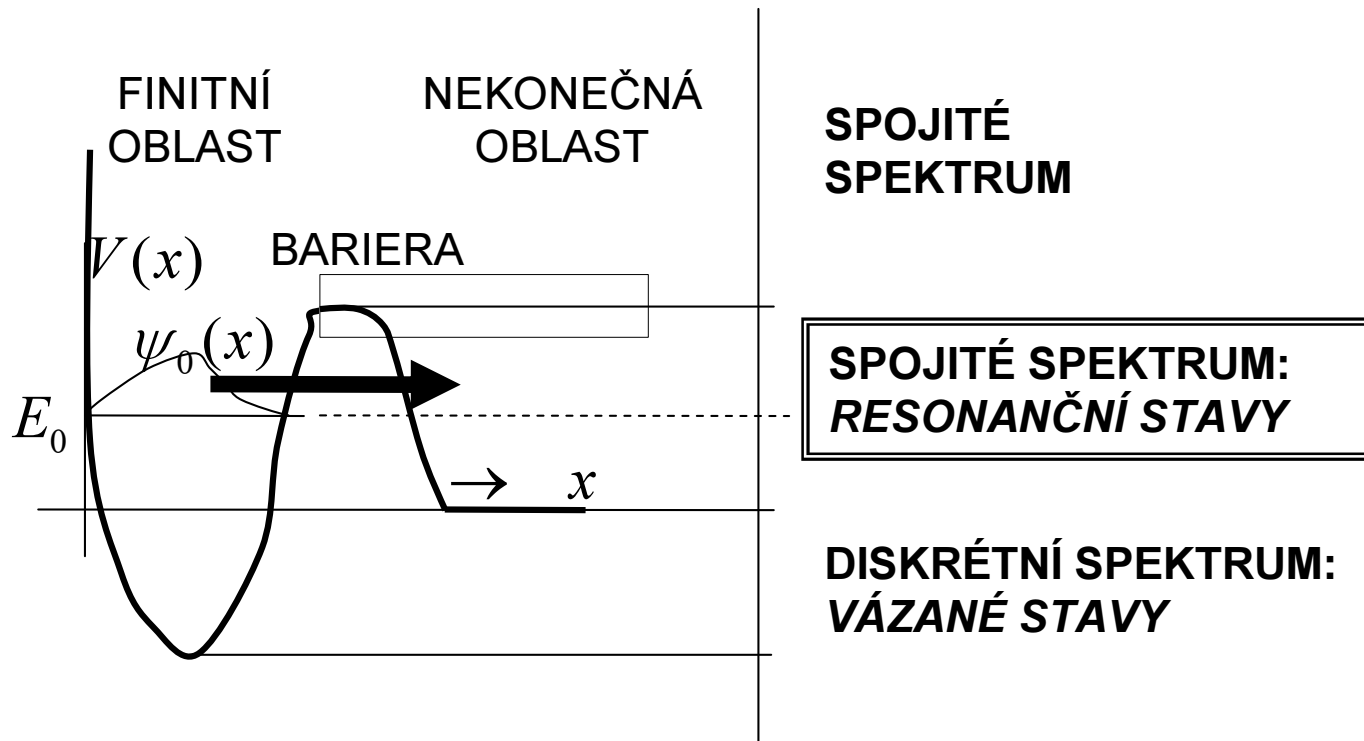


Jednorozměrný model tunelovacího rozpadu



- prostě jednorozměrný model
- separovaný příčný pohyb v planárních systémech
- separovaný radiální pohyb v centrálních systémech

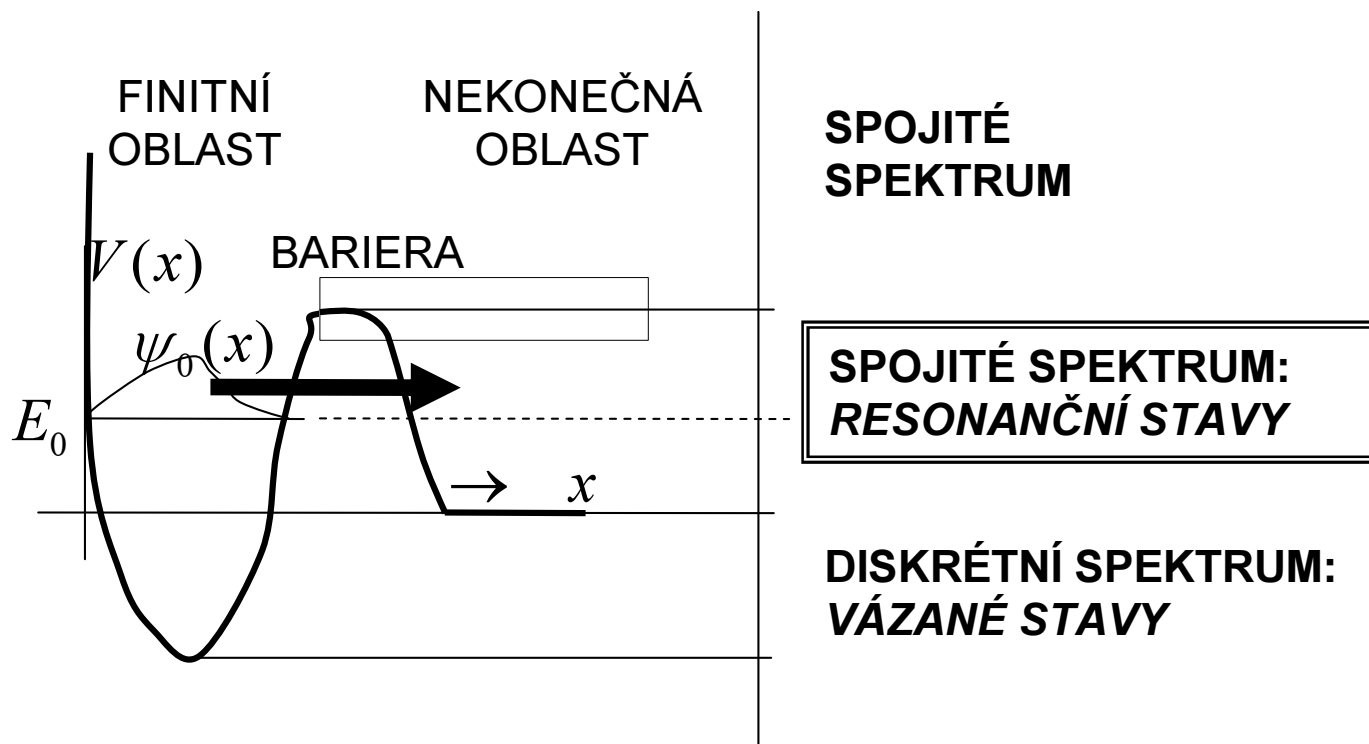
Jednorozměrný model tunelovacího rozpadu



V obecném případě:

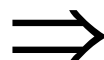
- kvalitativní teorie diferenciálních rovnic
- numerické řešení
- plynulé bariery: WKBJ formulace (*Gamov*)

Jednorozměrný model tunelovacího rozpadu



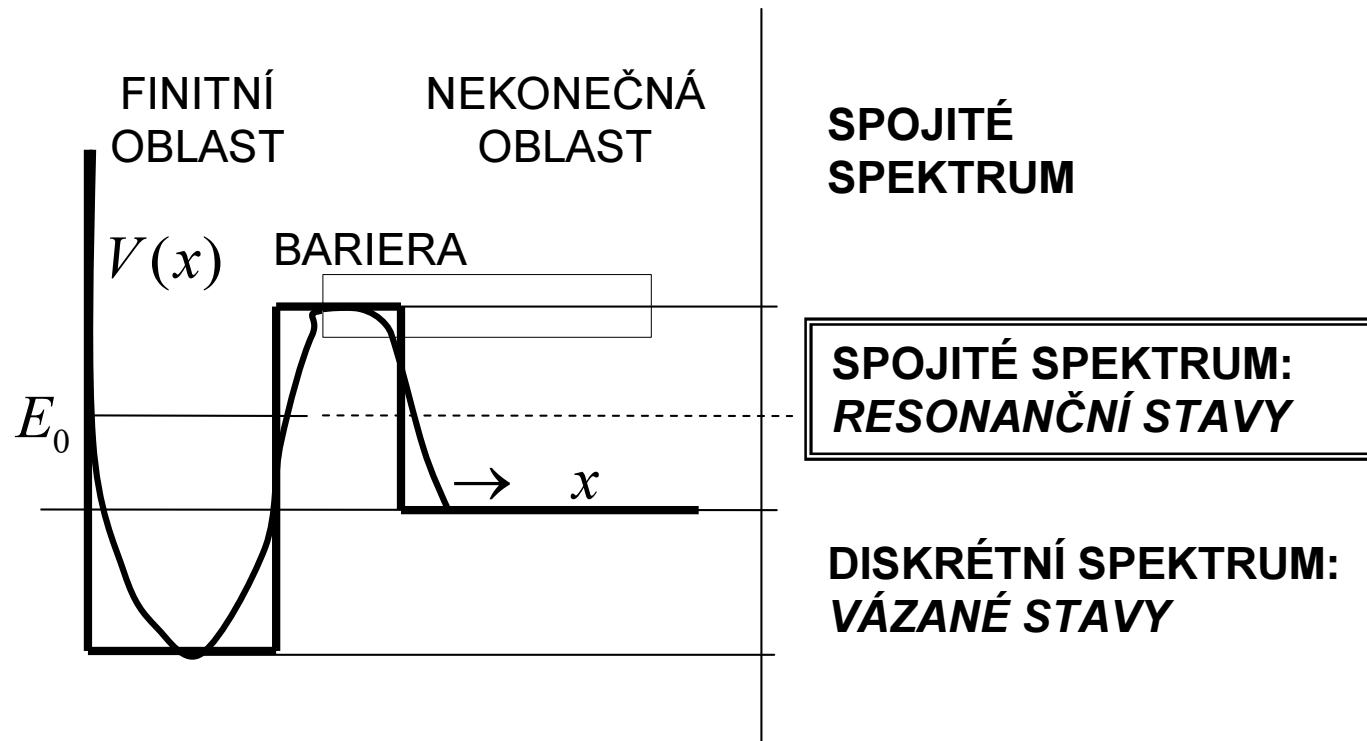
V obecném případě:

- kvalitativní teorie diferenciálních rovnic
- numerické řešení
- plyné bariery: WKBJ formulace (*Gamov*)



analyticky řešitelné modely

Model tunelovacího rozpadu: pravoúhelná bariéra

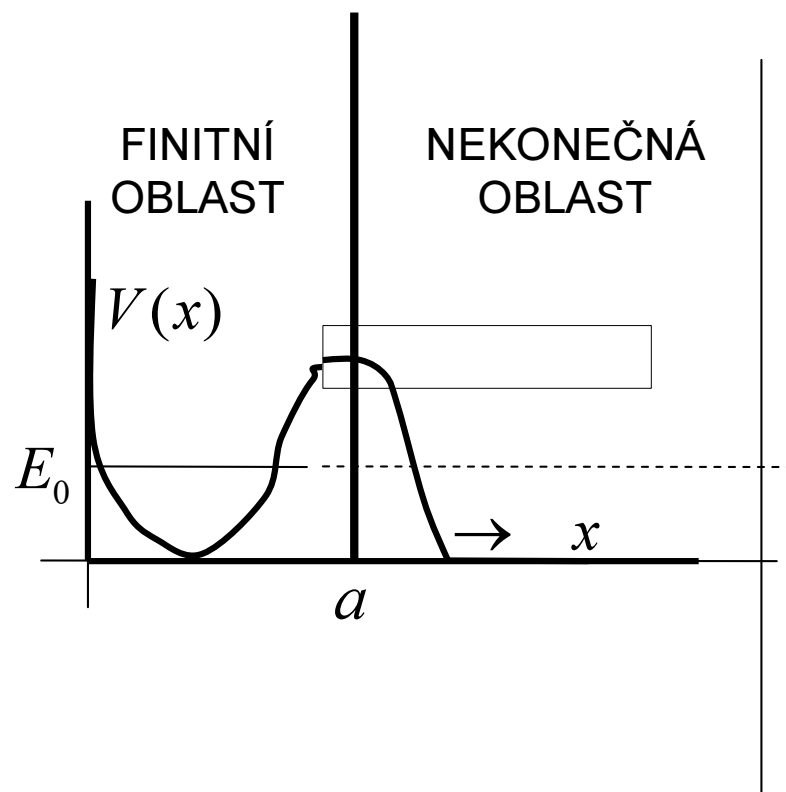


vystihuje dobře

- prostorovou strukturu modelu
- rozložení spektrálních oblastí

kvalitativní rozdíl: ostré hrany bariery jsou "ultrakvantové"

Model tunelovacího rozpadu: delta bariera



**SPOJITÉ SPEKTRUM:
RESONANČNÍ STAVY**

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} K \delta(x - a)$$

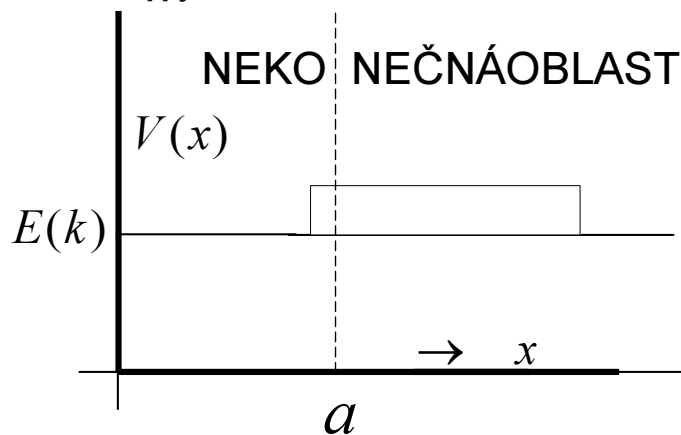
vystihuje jen kvalitativně

- prostorovou strukturu modelu
- spektrální oblast rezonančních stavů

nejjednodušší myslitelný model, jen dva parametry

delta bariera: limitní případy

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} K \delta(x - a) \quad E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

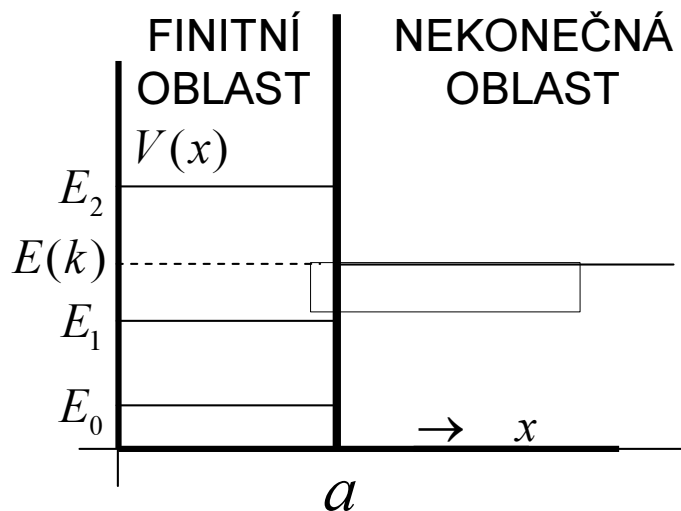


$$K \rightarrow 0+$$

$$\mathcal{H}_0 = L_2(0, \infty)$$

$$\phi_k(x) = \sin kx$$

spojité spektrum



$$K \rightarrow \infty$$

$$\mathcal{H}_\infty = L_2(0, a) \oplus L_2(a, \infty)$$

$$\varphi_n(x) = \sin k_n x$$

$$\phi_k(x) = \sin k(x - a)$$

diskrétní spektrum

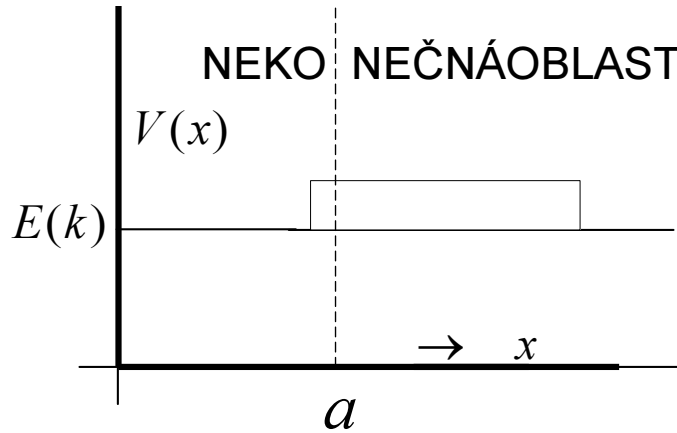
spojité spektrum

$$k_n = \frac{\pi}{a} \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

delta bariera: limitní případy

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} K \delta(x - a) \quad E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

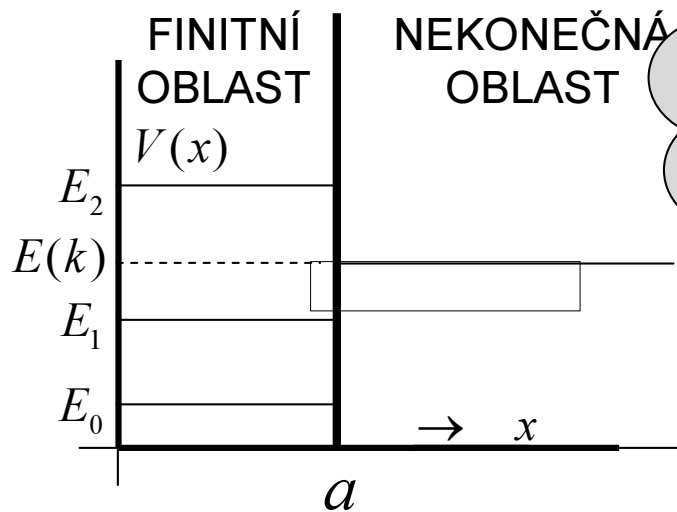
$$K \rightarrow 0+$$



$$\mathcal{H}_0 = L_2(0, \infty)$$

$$\phi_k(x) = \sin kx$$

spojité spektrum



stojaté vlny
 ... a přece popisují
 i tunelování a
 odplyvání do
 nekonečna

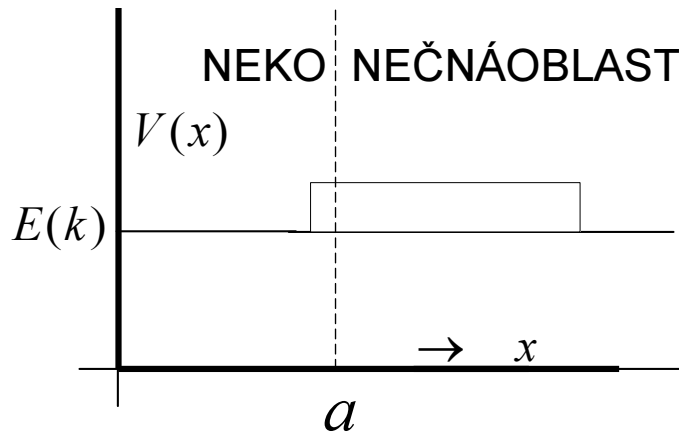
diskrétní spektrum

$$\phi_k(x) = \sin k(x - a)$$

spojité spektrum

delta bariera: limitní případy

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} K \delta(x - a) \quad E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

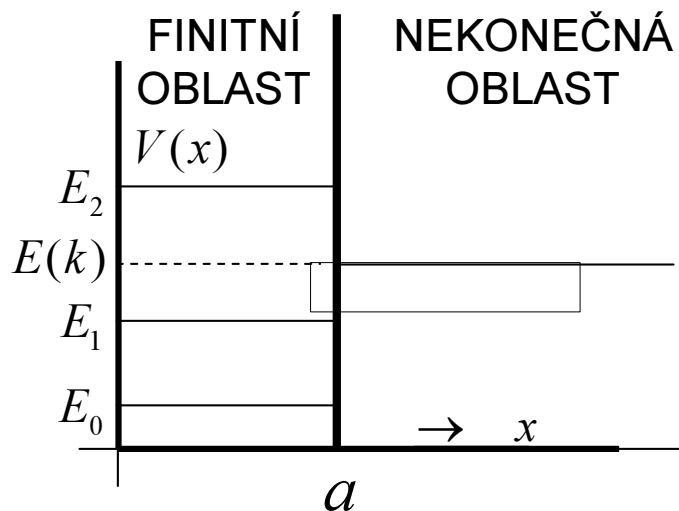


$$K \rightarrow 0+$$

$$\mathcal{H}_0 = L_2(0, \infty)$$

$$\phi_k(x) = \sin kx$$

spojité spektrum



$$K \rightarrow \infty$$

$$\mathcal{H}_\infty = L_2(0, a) \oplus L_2(a, \infty)$$

$$\varphi_n(x) = \sin k_n x$$

$$\phi_k(x) = \sin k(x - a)$$

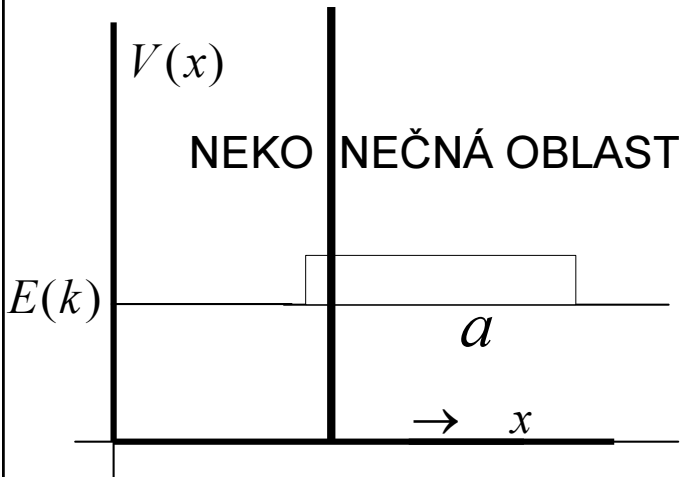
diskrétní spektrum

spojité spektrum

**dvojí mezní cesta ke konstrukci
Hilbertova prostoru \mathcal{H}_K**

delta bariera: Schrödingerova rovnice

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$



$$0 < K < \infty$$

$$\mathcal{H}_K = L_2(0, \infty)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{m} K \delta(x-a) \psi(x) = E(k) \psi(x)$$

$$\psi_k(x) = C \sin kx \quad \Bigg| \quad \psi_k(x) = \sin k(x-f)$$

$$0 < x < a \quad \Bigg| \quad a < x < \infty$$

PODMÍNKY SEŠITÍ V MÍSTĚ δ -FUNKCE

integrací Schrödingerovy rovnice v okolí
singulárního bodu a

$$\psi_k(a-0) = \psi_k(a+0) \quad \Bigg| \quad C \sin ka = -\sin k(f-a)$$

$$\psi'_k(a-0) + 2K\psi_k(a-0) = \psi'_k(a+0) \quad \Bigg| \quad C(k \cos ka + 2K \sin ka) = k \cos k(f-a)$$

delta bariera: vlnové funkce

TVAR VLASTNÍ FUNKCE

$$\psi_k(x) = C \sin kx \quad \Bigg| \quad \psi_k(x) = \sin k(x - f)$$
$$0 < x < a \quad \Bigg| \quad a < x < \infty$$

PODMÍNKY SEŠITÍ

$$\psi_k(a - 0) = \psi_k(a + 0) \quad \Bigg| \quad C \sin ka = -\sin k(f - a)$$
$$\psi'_k(a - 0) + 2K\psi_k(a - 0) = \psi'_k(a + 0) \quad \Bigg| \quad C(k \cos ka + 2K \sin ka) = k \cos k(f - a)$$

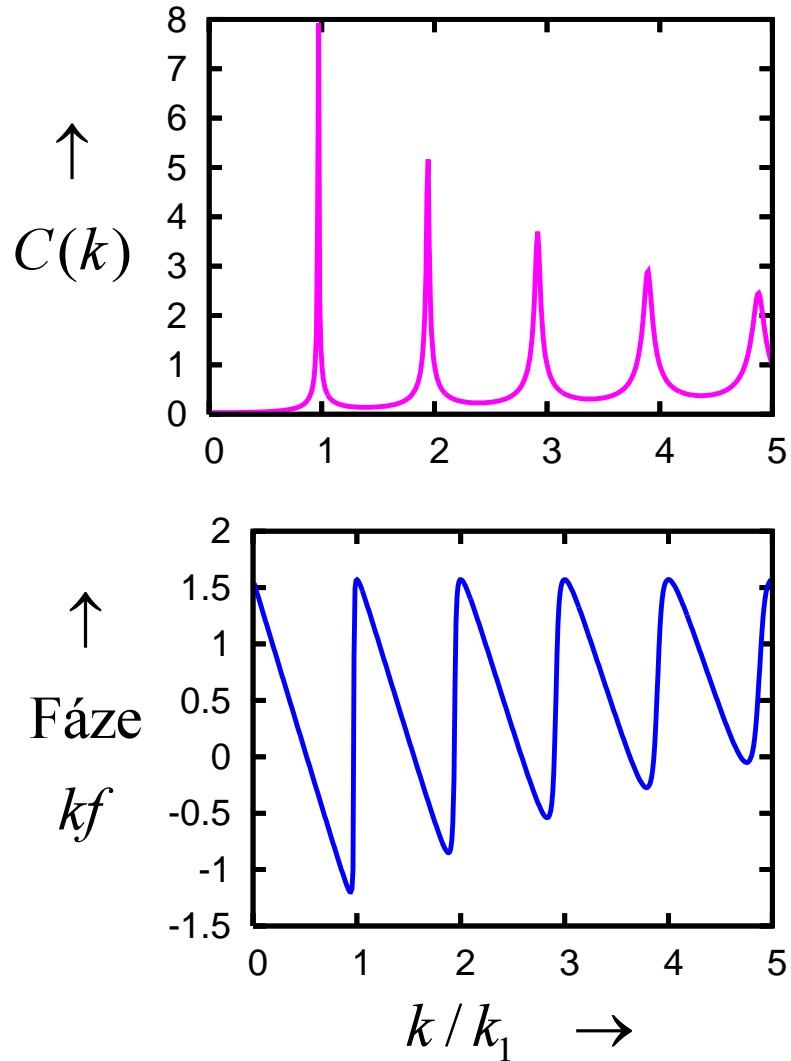
FÁZOVÝ POSUV

$$\cot k(f - a) = -\cot ka - 2\frac{K}{k}$$

AMPLITUDA V DUTINĚ

$$\frac{1}{C^2} = 1 + 2\frac{K}{k} \sin 2ka + 2\frac{K^2}{k^2} (1 - \cos 2ka)$$

delta bariera: numerická ilustrace

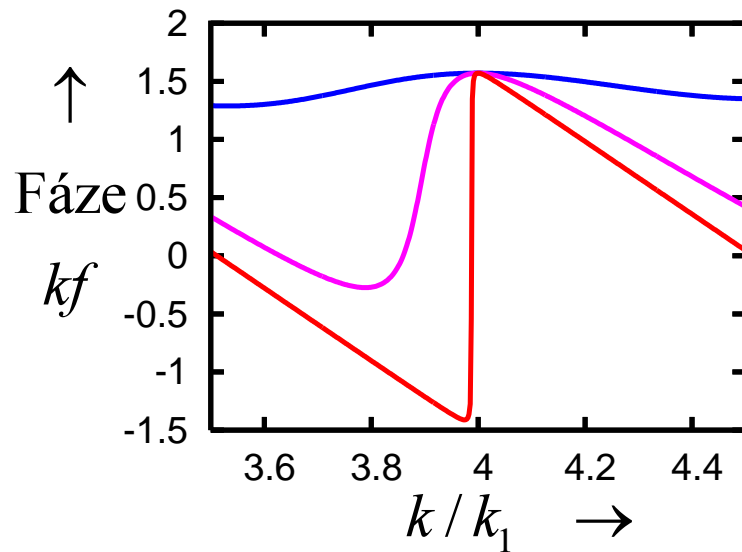
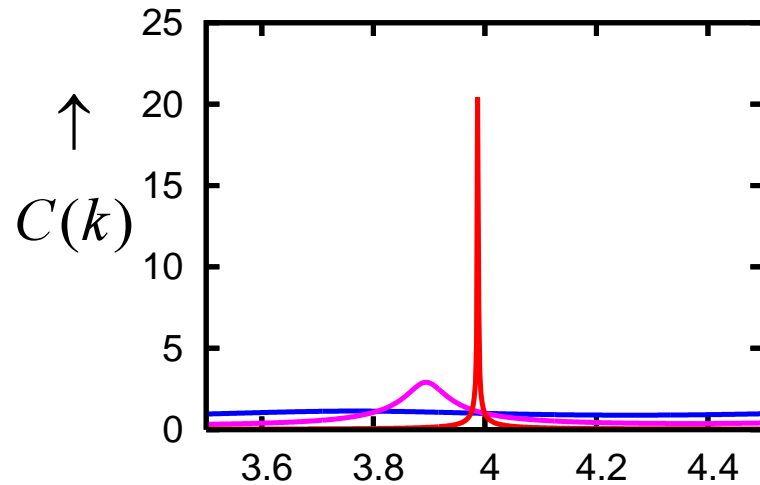


$$K = 4$$

serie resonancí

- blízko diskretních stavů izolované jámy
- poloha renormalisována směrem dolů
- s rostoucím n se resonance rozšiřují
- skok fáze – ideálně π -- se postupně zmenšuje

delta bariera: numerická ilustrace II.



$$n = 4$$

$$\text{— } K = 0.5$$

$$\text{— } K = 5.0$$

$$\text{— } K = 50.$$

ŠÍŘKA RESONANCE

pro

$$\frac{k}{2K} \ll 1$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma \approx \left(\frac{k_n}{2K} \right)^2 k_1$$

delta bariera: spektrální hustota

PŘIPOMÍNKA

Výraz pro spektrální hustotu

explicitní (definice)

invariantní

$$A(E) = \sum_{\lambda} \langle 0 | \lambda \rangle \delta(E - E_{\lambda}) \langle \lambda | 0 \rangle \quad A(E) = \langle 0 | \delta(E - \hat{H}) | 0 \rangle$$

Dvě základní vlastnosti ... a NIC víc

- ① $A(E) \geq 0$ nezáporná ② $\int dE A(E) = 1$ sumační pravidlo

NECHÁME BÝT

Slabé kvantování (kvazistacionární stavy)

Zkusíme tlumenou kvazistacionární vlnovou funkci

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \times e^{-i(E-i\Gamma)t/\hbar}, \quad \Gamma > 0$$

Dosazením do Schrödingerovy rovnice dostáváme

$$\psi(x) = F \sin \tilde{k}x \quad \text{pro } 0 < x < a$$

$$\psi(x) = e^{i\tilde{k}x} \quad \text{pro } a < x < \infty$$

F komplexní,

$$\tilde{k} = k' - ik'', \quad E - i\Gamma = \frac{\hbar^2}{2m} (k' - ik'')^2$$



rozbíhavá
vlna

Slabé kvantování (kvazistacionární stavy)

Pro slabý útlum

$$\tilde{k} = k' - ik'', E - i\Gamma = \frac{\hbar^2}{2m} (k' - ik'')^2$$

$$k' \approx \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad k'' \approx \frac{m}{\hbar^2} \frac{\Gamma}{k'}$$

Sešívací podmínky

$$F \sin \tilde{k}a = e^{i\tilde{k}a}$$

$$\tilde{k}F \cos \tilde{k}a + 2KF \sin \tilde{k}a = i\tilde{k} e^{i\tilde{k}a}$$

dají **sekulární rovnici**

$$\tan \tilde{k}a = -\frac{\tilde{k}}{2K} \cdot \frac{1}{1 - i\frac{\tilde{k}}{2K}}$$

Slabé kvantování (kvazistacionární stavy)

$$\tan ka = -\frac{k}{2K} \cdot \frac{1}{1 - i \frac{k}{2K}}$$

Pro slabý útlum

$$\tilde{k}_n = k_n \underbrace{-\frac{1}{a} \frac{k_n}{2K} + \frac{1}{a} \left(\frac{k_n}{2K} \right)^2}_{\text{renormalizace}} \underbrace{-i \frac{1}{a} \left(\frac{k_n}{2K} \right)^2}_{\text{rozšíření}}$$

ve shodě s předchozím výpočtem.

K tomu dopočteme

$$F_n = e^{i\tilde{k}_n a} / \sin \tilde{k}_n a = \cot \tilde{k}_n a + i$$

$$F_n = 2 \left(i - \frac{K}{\tilde{k}_n} \right)$$

Slabé kvantování (kvazistacionární stavy)

FYZIKÁLNÍ VÝZNAM KVAZISTACIONÁRNÍHO STAVU

- V každé konečné oblasti pravděpodobnosti exponenciálně ubývá (*rozpad stavu*)

- Asymptoticky

$$\Psi(x, t) = e^{+i(k' - ik'')x} \times e^{-i(E - i\Gamma)t/\hbar}$$

$$= e^{+ik'(x - \frac{\hbar}{2m}k't)} \times e^{+k''(x - \frac{\hbar}{m}k't)}$$

fázová rychlost

grupová rychlost

The end