

Kapitola 1

Box-Jenkinsova metodologie

1.1 Úvod

V předchozím jsme podali výklad analýzy jednorozměrných časových řad založený na dekompozičním principu. Pokoušeli jsme se vyčlenit (a posléze modelovat) deterministickou část časové řady (deterministický trend, deterministickou sezónní složku) a stochastickou část jsme hlouběji neanalyzovali - chápali jsme ji jako část zbytkovou.

Ve skutečnosti však také v reziduální (zbytkové) části existují jisté systematickosti, jež jsou velmi významné, a je proto nutné se jimi zabývat. Box-Jenkinsova metodologie (zkráceně B-J metodologie) ztotožňuje systematickou část časové řady s částí deterministickou a je založena na myšlence, že časová řada může být chápána jako řada stochastického charakteru. Zásluha Boxe a Jenkinse nespočívá v objevení principů, které budeme popisovat, ale ve vytvoření konkrétního postupu, jak tyto principy prakticky využívat.

Téměř každý kvalitní statistický programový paket tuto metodologii obsahuje (SAS, BMDP, SPSS, STATGRAPHICS, RATS,)

Výhody B-J metodologie:

- je flexibilní a rychle se adaptuje na změnu v charakteru modelovaného procesu
- v mnoha případech dává nejlepší výsledky (vzhledem k MSE-střední čtvercové chybě)

Nevýhody B-J metodologie:

- musí být dostatečně dlouhé realizace
- ztrácí se možnost jednoduché interpretace výsledných modelů (lze těžko přesvědčit zadavatele, že řadu lze modelovat pomocí náhodných šoků. Jediným argumentem jsou zde často jen kvalitní předpovědi získané pomocí těchto modelů).

1.2 Základní pojmy

V dalším budeme uvažovat centrované stacionární náhodné posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kde $Y_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, což je Hilbertův prostor reálných náhodných veličin s konečnými druhými momenty, ve kterém dvě náhodné veličiny X a Y považujeme za ekvivalentní, pokud

$$P(X = Y) = 1.$$

1.2.1 Operátor zpětného posunutí

Definice 1.2.1.

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost náhodných veličin. **Operátor zpětného posunutí** je definován pomocí výrazu

$$BY_t = Y_{t-1},$$

přičemž jej lze aplikovat několikanásobně jako

$$B^j Y_t = Y_{t-j}.$$

1.2.2 Lineární proces

Než zavedeme pojem lineárního procesu, vyslovme větu, která zabezpečuje jeho korektnost.

Věta 1.2.2.

Nechť $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ je bílým šumem, dále mějme posloupnost reálných čísel

$\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ takovou, že $\sum_{j=0}^\infty \psi_j^2 < \infty$. Pak řada $\sum_{j=0}^\infty \psi_j \varepsilon_j$ konverguje podle kvadratického středu, tj. existuje náhodná veličina $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a platí

$$Y = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \psi_j \varepsilon_j.$$

DŮKAZ. Víme, že bílý šum $\varepsilon_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pro libovolná přirozená čísla $k, N \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j - \sum_{t=0}^N \psi_t \varepsilon_t \right\|^2 &= E \left| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j - \sum_{t=0}^N \psi_t \varepsilon_t \right|^2 = E \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j \right|^2 \\ &= E \left(\sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j \varepsilon_j \right) \left(\sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_h \varepsilon_h \right) = \sum_{j=N+1}^{N+k} \sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_j \psi_h \underbrace{E \varepsilon_j \varepsilon_h}_{\text{nekorel.}} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů je tedy cauchyovská, tj. existuje k ní limita

$$Y = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \psi_j \varepsilon_j. \quad \square$$

Definice 1.2.3.

Mějme $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a posloupnost reálných čísel $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ takovou, že $\sum_{j=0}^\infty \psi_j^2 < \infty$, pak **lineární proces** je definován vztahem

$$Y_t = \sum_{j=0}^\infty \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

Počítejme postupně střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci lineárního procesu a přesvědčeme se, že lineární proces je stacionární.

$$\begin{aligned} \boxed{EY_t} &= E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \underbrace{E\varepsilon_{t-j}}_{=0} = \boxed{0} \\ \boxed{DY_t} &= D \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \right) \stackrel{\text{nekorel.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \underbrace{D\varepsilon_{t-j}}_{=\sigma_\varepsilon^2} = \boxed{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2} = \sigma_Y^2 \\ \boxed{\gamma(t)} &= C(Y_s, Y_{s+t}) = EY_s Y_{s+t} = E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{s-j} \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \psi_h \varepsilon_{s+t-h} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \psi_j \psi_h \underbrace{E\varepsilon_{s-j} \varepsilon_{s+t-h}}_{\gamma_\varepsilon(t+j-h)} = \boxed{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+t}} \quad \text{protože} \quad \gamma_\varepsilon(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & k = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ze Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$|\gamma(t)| = |C(Y_s, Y_{s+t})| = \left| \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+t} \right| \leq \sqrt{DY_s DY_{s+t}} = \gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty.$$

Podmínka **stacionarity** je tedy podmínka, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty.$$

Pokud zavedeme funkci

$$\boxed{\Psi_Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j},$$

pak podmínka

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

implikuje, že funkce

$$\Psi_Y(z) \text{ je holomorfní uvnitř kružnice } |z| < 1.$$

Takže podmínku stacionarity lze vyslovit i pomocí podmínky:

$$\Psi_Y(z) \text{ je holomorfní pro } |z| < 1, \text{ přičemž } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty.$$

Oba požadavky budou splněny, pokud bude platit

$$\boxed{\Psi_Y(z) \text{ je holomorfní uvnitř a na jednotkové kružnici.}}$$

Lineární proces lze ještě zobecnit takto:

Definice 1.2.4.

Mějme $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a posloupnost reálných čísel $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^\infty$ takovou, že $\sum_{j=-\infty}^\infty \psi_j^2 < \infty$, pak **zobecněný lineární proces** je definován vztahem

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

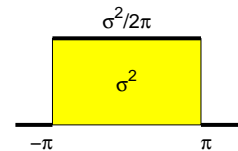
Pro takto definovaný zobecněný lineární proces dokážeme obdobným způsobem jak pro obyčejný lineární proces spočítat

$$EY_t = 0, \quad DY_t = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 \quad \text{a} \quad \gamma(t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+t}.$$

Na závěr tohoto odstavce počítejme ještě **spektrální hustotu zobecněného lineárního procesu**.

Nejprve odvodíme spektrální hustotu bílého šumu, a to pomocí jeho autokovarianční funkce $\gamma_\varepsilon(t)$

$$\boxed{f_\varepsilon(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \sigma_\varepsilon^2 \delta(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} & \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



kde

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak pomocí autokovarianční funkce zobecněného lineárního procesu počítáme spektrální hustotu pro $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \left(\sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+t} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}}_{f_\varepsilon(\omega)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_{j+t} e^{-it\omega} = f_\varepsilon(\omega) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\omega} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_{j+t} e^{-i(j+t)\omega} \\ &= f_\varepsilon(\omega) \left| \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-it\omega} \right|^2 = f_\varepsilon(\omega) \left| \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{it\omega} \right|^2 \quad \text{neboť } |z|^2 = z \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

Pokud položíme

$$\Psi_Y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j,$$

pak můžeme psát

$$\boxed{f_Y(\omega)} = f_\varepsilon(\omega) |\Psi(e^{-i\omega})|^2 = \boxed{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |\Psi_Y(e^{-i\omega})|^2} \left(= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |\Psi_Y(e^{i\omega})|^2 \right).$$

1.2.3 Lineární filtry

Věta 1.2.5.

Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je (centrovaná) stacionární náhodná posloupnost a $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ je absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel (tj. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$). Pak platí

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

tj. $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární náhodná posloupnost.

DŮKAZ. Je zřejmé, že stačí dokázat existenci náhodných veličin

$$Y_t^{(2)} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \psi_j X_{t-j} \quad \text{a} \quad Y_t^{(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j X_{t-j},$$

protože pak bude platit $Y_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$. Označme

$$\gamma_X(h) = EX_t X_{t+|h|} \quad \text{a} \quad \gamma_X(0) = \sigma_X^2 > 0.$$

Pak pro libovolná přirozená čísla $k, N \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j X_{t-j} - \sum_{h=0}^N \psi_h X_{t-h} \right\|^2 &= E \left| \sum_{j=0}^{N+k} \psi_j X_{t-j} - \sum_{h=0}^N \psi_h X_{t-h} \right|^2 = E \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j X_{t-j} \right|^2 \\ &= E \left(\sum_{j=N+1}^{N+k} \psi_j X_{t-j} \right) \left(\sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_h X_{t-h} \right) \\ &= \sum_{j=N+1}^{N+k} \sum_{h=N+1}^{N+k} \psi_j \psi_h \underbrace{EX_{t-j} X_{t-h}}_{|\gamma(j-h)| \leq \gamma_X(0) = \sigma_X^2} \\ &\leq \sigma_X^2 \sum_{j=N+1}^{N+k} \sum_{h=N+1}^{N+k} |\psi_j| |\psi_h| = \underbrace{\sigma_X^2}_{< \infty} \left(\underbrace{\sum_{j=N+1}^{N+k} |\psi_j|}_{\rightarrow 0} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů je tedy cauchyovská (podle kvadratického středu), tj. existuje k ní limita

$$Y_t^{(1)} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \psi_j X_{t-j}, \quad \equiv \quad Y_t^{(1)} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P),$$

tj. $Y_t^{(1)}$ má nulovou střední hodnotu a konečný rozptyl a je tedy stacionární.

Podobně se dokáže i existence stacionární náhodné posloupnosti $Y_t^{(2)}$. □

Můžeme tedy korektně vyslovit následující definici.

Definice 1.2.6.

Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární náhodná posloupnost a $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ je absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel (tj. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$). Pak

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

nazveme **lineárním filtrem** procesu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Věta 1.2.7.

Mějme centrovanou stacionární náhodnou posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se spektrální hustotou $f_X(\omega)$. Nechť $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ je absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel (tj.

$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$). Pak náhodná posloupnost $Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ je stacionární se spektrální hustotou

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega) |\Psi_Y(e^{-i\omega})|^2,$$

kde $\Psi_Y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j$ pro $|z| \leq 1$ se nazývá **generující funkce filtru** a $\psi_Y(\omega) = \Psi_Y(e^{-i\omega})$ **přenosová funkce filtru**.

DŮKAZ. Stacionaritu jsme dokázali v předchozí větě. Označme proto

$$\Psi_Y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \quad \text{pro} \quad |z| \leq 1.$$

S ohledem na to, že paltí

$$\gamma_Y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} f_Y(\omega) d\omega,$$

počítejme autokovarianční funkci

$$\begin{aligned} \gamma_Y(t) &= C(Y_s, Y_{s+t}) = C\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{s-j}, \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h X_{s+t-h}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h C(X_{s-j}, X_{s+t-h}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h \gamma_X(t+j-h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+j-h)\omega} f_X(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\omega}\right) \left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h e^{-ih\omega}\right) f_X(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\omega}\right|^2 f_X(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \left|\sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h e^{-ih\omega}\right|^2 f_X(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \underbrace{f_X(\omega) |\Psi_Y(e^{-i\omega})|^2}_{=f_Y(\omega)} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \underbrace{f_X(\omega) |\Psi_Y(e^{i\omega})|^2}_{=f_Y(\omega)} d\omega. \quad \square \end{aligned}$$

1.2.4 Autokovarianční a autokorelační generující funkce stacionárních procesů

Při vyšetřování vlastností autokovarianční a autokorelační funkce stacionárních procesů je užitečné zavést následující transformaci

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)z^k \quad \text{resp.} \quad R(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)z^k,$$

kteř se nazývají **autokovarianční**, resp. **autokorelační**, **generující funkce**.

Všimněme si ještě vztahu mezi spektrální hustotou a autokovarianční generující funkcí

$$\boxed{f(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t)e^{-it\omega} = \boxed{\frac{1}{2\pi}G(e^{-i\omega})}.$$

PŘÍKLAD 1 : BÍLÝ ŠUM

Mějme bílý šum $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ s autokovarianční funkcí $\gamma_\varepsilon(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & k = 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, takže

$$\boxed{G_\varepsilon(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)z^k = \boxed{\sigma_\varepsilon^2} \quad \text{a} \quad \boxed{f_\varepsilon(\omega)} = \frac{1}{2\pi}G_\varepsilon(e^{-i\omega}) = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} & \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

PŘÍKLAD 2 : ZOBECNĚNÝ LINEÁRNÍ PROCES

Mějme posloupnost reálných čísel $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ takovou, že $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, pak **zobecněný lineární proces** je definován vztahem

$$\boxed{X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}}$$

a má autokovarianční funkci tvaru

$$\boxed{\gamma_X(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}},$$

takže

$$\begin{aligned} \boxed{G_X(z)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k)z^k = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^{-j} \psi_{j+k} z^{j+k} \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{subst.} \\ h = j + k \end{array} \right| = \underbrace{\sigma_\varepsilon^2}_{=G_\varepsilon(z)} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h z^h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^{-j} = \boxed{G_\varepsilon(z) \Psi_X(z) \Psi_X(z^{-1})} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_X(\omega)} = \frac{1}{2\pi}G_X(e^{-i\omega}) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}G_\varepsilon(e^{-i\omega})}_{f_\varepsilon(\omega)} \Psi_X(e^{-i\omega}) \Psi_X(e^{i\omega}) = \boxed{f_\varepsilon(\omega) |\Psi_X(e^{-i\omega})|^2}.$$

PŘÍKLAD 3 : LINEÁRNÍ FILTR

Mějme posloupnost reálných čísel $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ takovou, že $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Dále necht' $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **centrovaná stacionární náhodná posloupnost**. Pak **lineární filtr** je definován vztahem

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

a má autokovarianční funkci

$$\begin{aligned} \boxed{\gamma_Y(k)} &= EY_s Y_{s+k} = E \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{s-j} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h X_{s+k-h} \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h E X_{s-j} X_{s+k-h} \\ &= \boxed{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h \gamma_X(k+j-h)}, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} \boxed{G_Y(z)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_h \gamma_X(k+j-h) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_j z^{-j} \psi_h z^h \gamma_X(k+j-h) z^{k+j-h} = \left| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ s = k + j - h \end{array} \right| \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h z^h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^{-j} \underbrace{\sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_X(s) z^s}_{=G_X(z)} = \boxed{G_X(z) \Psi_Y(z) \Psi_Y(z^{-1})} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_Y(\omega)} = \frac{1}{2\pi} G_Y(e^{-i\omega}) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} G_X(e^{-i\omega})}_{f_X(\omega)} \Psi_Y(e^{-i\omega}) \Psi_Y(e^{i\omega}) = \boxed{f_X(\omega) |\Psi_Y(e^{-i\omega})|^2}.$$

1.2.5 Definice ARMA procesu

Definice 1.2.8.

ARMA proces řádu p, q je definován vztahem

$$\boxed{Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \dots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}}, \text{ kde } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

přičemž pomocí operátoru zpětného chodu lze psát

$$Y_t \sim ARMA(p, q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t,$$

kde

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p \quad (\varphi_0 \equiv 1)$$

a

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q \quad (\theta_0 \equiv 1).$$

Řekneme, že $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je $ARMA(p, q)$ se **střední hodnotou** μ , jestliže $\{Y_t - \mu\}$ je $ARMA(p, q)$ proces.

Speciální případy ARMA procesů nazýváme:

Autoregresní proces (AR proces): $Y_t \sim AR(p) \sim ARMA(p, 0)$, tj. $\boxed{q = 0}$

Proces klouzavých součtů (MA proces): $Y_t \sim MA(q) \sim ARMA(0, q)$, tj. $\boxed{p = 0}$

1.2.6 Kauzalita

Dříve než zavedeme pojem kauzality, všimněme si blíže $AR(1)$ procesu.

AUTOREGRESNÍ PROCES PRVNÍHO ŘÁDU.

Pro autoregresní proces prvního řádu $\boxed{Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t}$ postupně v k krocích upravujeme

$$\begin{aligned} \boxed{Y_t} &= \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t = \varphi_1 (\varphi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varphi_1^2 Y_{t-2} + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \varphi_1^2 (\varphi_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \varphi_1^3 Y_{t-3} + \varphi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= \varphi_1^k (\varphi_1 Y_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} = \boxed{\varphi_1^{k+1} Y_{t-k-1} + \sum_{j=0}^k \varphi_1^j \varepsilon_{t-j}} \end{aligned}$$

(1) Uvažujme nejprve případ, kdy $\boxed{|\varphi_1| < 1}$ a $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární, tj. $Y_t \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $EY_t^2 < \infty$, pak

$$\left\| Y_t - \sum_{j=0}^k \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} \right\|^2 = \left\| \varphi_1^{k+1} Y_{t-k-1} \right\|^2 = E |\varphi_1^{k+1} Y_{t-k-1}|^2 = \underbrace{\varphi_1^{2k+2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{E |Y_{t-k-1}|^2}_{= \sigma_Y^2 < \infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

tj. $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j}$ konverguje podle kvadratického středu k Y_t a můžeme psát

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j},$$

tj. jde o **lineární proces**, tedy i o **lineární filtr** s generující funkcí filtru (pro $|z| \leq 1$)

$$\Psi_{AR(1)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_1 z)^j = \frac{1}{1 - \varphi_1 z} \quad \text{protože } \psi_j = \varphi_1^j \quad \text{a } |\varphi_1| < 1.$$

Pak dokážeme spočítat

$$\begin{aligned} \boxed{EY_t} &= E \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j E \varepsilon_{t-j} = \boxed{0} \\ \boxed{DY_t} &= D \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} \stackrel{\text{nekor.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^{2j} D \varepsilon_{t-j} = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^{2j} = \boxed{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1^2}} \\ \boxed{\gamma(t)} &= C(Y_s, Y_{s+|t|}) = EY_s, Y_{s+|t|} = E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{s-j} \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \varphi_1^h \varepsilon_{s+|t|-h} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_1^j \varphi_1^h E \varepsilon_{s-j} \varepsilon_{s+|t|-h} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_1^j \varphi_1^h \gamma_\varepsilon(h - |t| - j) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varphi_1^{j+|t|} = \boxed{\frac{\varphi_1^{|t|}}{1 - \varphi_1^2} \sigma_\varepsilon^2}. \\ \boxed{\rho(t)} &= \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)} = \boxed{\varphi_1^{|t|}} \quad \text{tzv. ACF funkce.} \end{aligned}$$

Pomocí generující funkce filtru dokážeme snadno spočítat i spektrální hustotu

$$\boxed{f_{AR(1)}(\omega)} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |\Psi_{AR(1)}(e^{-i\omega})|^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \varphi_1 e^{-i\omega}|^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|e^{-i\omega}(e^{i\omega} - \varphi_1)|^2} = \boxed{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|e^{i\omega} - \varphi_1|^2}}.$$

(2) Dále řešme případ, kdy $|\varphi_1| > 1$. Použijeme-li vztah

$$Y_{t-1} = \frac{1}{\varphi_1} Y_t - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_t$$

a postupně v k krocích budeme upravovat

$$\begin{aligned} \boxed{Y_t} &= \frac{1}{\varphi_1} Y_{t+1} - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_{t+1} = \frac{1}{\varphi_1} \left(\frac{1}{\varphi_1} Y_{t+2} - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_{t+2} \right) - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_{t+1} \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} Y_{t+2} - \frac{1}{\varphi_1^2} \varepsilon_{t+2} - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_{t+1} \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} \left(\frac{1}{\varphi_1} Y_{t+3} - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_{t+3} \right) - \frac{1}{\varphi_1^2} \varepsilon_{t+2} - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_{t+1} \\ &= \frac{1}{\varphi_1^3} Y_{t+3} - \frac{1}{\varphi_1^3} \varepsilon_{t+3} - \frac{1}{\varphi_1^2} \varepsilon_{t+2} - \frac{1}{\varphi_1} \varepsilon_{t+1} \\ &\vdots \\ &= \boxed{\frac{1}{\varphi_1^{k+1}} Y_{t+k+1} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{\varphi_1^{k+1}} \varepsilon_{t-j}}. \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozím případě lze snadno ukázat, že $-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1^j} \varepsilon_{t-j}$ konverguje podle kvadratického středu k Y_t .

Avšak vidíme, že Y_t zde vyjadřujeme pomocí budoucích hodnot $\{\varepsilon_s, s > t\}$. Tím porušujeme přirozenou podmínku, že Y_t je na budoucnosti nezávislá a říkáme, že není kauzální.

(3) V případě, že platí $|\varphi_1| = 1$, pak $AR(1)$ není stacionární, jde o tzv. **náhodnou procházku**.

Nyní již můžeme zavést pojem kauzality.

Definice 1.2.9.

$ARMA$ proces $Y_t \sim ARMA(p, q)$ se nazývá **kauzální**, jestliže existuje absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel $\Psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, (tj. $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$) tak, že

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{tj. zkráceně} \quad Y_t \sim MA(\infty) : Y_t = \Psi(B)\varepsilon_t.$$

POZNÁMKA 1.2.10.

Protože platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| \right)^2 < \infty,$$

pak kauzální proces $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ je **lineárním procesem**.

Protože lineární proces je stacionárním procesem, je **kauzální ARMA proces**

$$Y_t \sim ARMA(p, q), \text{ kde } \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty,$$

také **stacionárním procesem**.

AUTOREGRESNÍ PROCES p -TÉHO ŘÁDU: $AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t$

POZNÁMKA 1.2.11.

Mějme polynom $\Phi(z) = \varphi_0 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p$ a necht' $\frac{1}{\lambda_j}$ jsou jeho kořeny, tj. $\Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) = 0$. Pak platí

$$\varphi_0 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p = \varphi_p \prod_j \left(z - \frac{1}{\lambda_j} \right) = \varphi_0 \prod_j (1 - \lambda_j z),$$

v našem případě $\varphi_0 = 1$ a $\varphi_p \neq 0$.

Provedme tedy rozklad polynomu $\Phi(z)$ na součin kořenových činitelů

$$\Phi(z) = (1 - \lambda_1 z)^{p_1} \dots (1 - \lambda_k z)^{p_k},$$

kde

$$z_{01} = \frac{1}{\lambda_1}, \dots, z_{0k} = \frac{1}{\lambda_k}$$

jsou **rozdílné** (reálné či komplexní) **kořeny polynomu $\Phi(z)$** , p_1, \dots, p_k je jejich násobnost (přičemž platí $p_1 + \dots + p_k = p$).

Budeme hledat takovou absolutně konvergentní posloupnost čísel $\Psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, tak aby

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \text{ byl } \mathbf{kauzální proces.}$$

Pokud použijeme operátor zpětného chodu, můžeme psát:

$$\Phi(B)Y_t = \varepsilon_t,$$

přitom hledáme $\Phi(B)$ takové, aby platilo

$$\Phi(B)\Psi(B) = 1 \quad \text{nebo} \quad \Phi(z)\Psi(z) = 1 \quad \text{čili} \quad \Psi(z) = \frac{1}{\Phi(z)}.$$

Z věty o rozkladu na částečné zlomky dostáváme (pokud pro názornost předpokládáme, že všechny kořeny jsou jednoduché)

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_p z)} = \frac{c_1}{1 - \lambda_1 z} + \dots + \frac{c_p}{1 - \lambda_p z}$$

pro vhodná c_1, \dots, c_p .

Pokud pro $k = 1, \dots, p$ platí

$$|\lambda_k z| < 1,$$

můžeme psát

$$\frac{c_k}{1 - \lambda_k z} = c_k \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_k z)^j$$

a dokázali jsme najít konvergentní řadu

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \sum_{k=1}^p c_k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_k^j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^j + \dots + c_p \lambda_p^j) z^j,$$

přičemž

$$\psi_j = c_1 \lambda_1^j + \dots + c_p \lambda_p^j,$$

neboť $\Psi(z) = \frac{1}{\Phi(z)}$ je holomorfní pro $|z| \leq 1$ pouze když

$$|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_p| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda_1} \right|}_{|z_{01}| > 1} > 1, \dots, \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda_p} \right|}_{|z_{0p}| > 1} > 1,$$

tedy **všechny kořeny polynomu $\Phi(z)$ musí ležet vně jednotkové kružnice.**

Tím jsme ukázali, že existuje řešení

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

tzv. *stochastické diferenční rovnice*

$$\boxed{Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \dots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)} \quad (1.1)$$

a tímto řešením je **kauzální autoregresní posloupnost řádu p** . Protože Y_t je lineární proces, je toto řešení **stacionární**.

Podmínka týkající se kořenů polynomu $\Phi(z)$ je podstatná. Lze ukázat, že v případě, kdy alespoň jeden kořen polynomu $\Phi(z)$ leží uvnitř nebo na hranici jednotkové kružnice, neexistuje kauzální posloupnost $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ splňující stochastickou diferenční rovnici (1.1). Snadno se dá ukázat, že toto řešení je jediné.

STŘEDNÍ HODNOTA, ROZPTYL, AUTOKOVARIANCE A AUTOKORELACE $AR(p)$

Pro kauzální $AR(p)$ procesy počítejme nejprve

$$\boxed{EY_t} = E \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-j} = \boxed{0}$$

Abychom mohli spočítat rozptyl kauzálního $AR(p)$ procesu, nejprve rovnici

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

vynásobíme výrazem Y_t a spočítáme střední hodnoty obou stran, tj.

$$EY_t^2 = \varphi_1 EY_{t-1}Y_t + \cdots + \varphi_p EY_{t-p}Y_t + E\varepsilon_t Y_t. \quad (\text{A}_1)$$

Protože

$$EY_t = 0,$$

pak autokovarianční funkce je rovna

$$\gamma(j) = C(Y_t, Y_{t-j}) = E(Y_t - EY_t)(Y_{t-j} - EY_{t-j}) = EY_t Y_{t-j}$$

a rozptyl

$$\gamma(0) = EY_t^2 = DY_t.$$

Dále spočtěme

$$\boxed{EY_t \varepsilon_t} = E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \right) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-j} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \gamma_\varepsilon(j) = \boxed{\sigma_\varepsilon^2},$$

neboť

$$\gamma_\varepsilon(j) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & j = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad \text{a} \quad \psi_0 = 1.$$

Vraťme se k rovnici (A₁), pak po dosazení $EY_t \varepsilon_t = \sigma_\varepsilon^2$ a $\gamma(0) = EY_t^2$ dostaneme

$$\gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \cdots + \varphi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 \quad (\text{A}_2)$$

Podělme obě strany rovnice (A₂) výrazem $\gamma(0) > 0$ a protože pro autokorelaci platí $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$, dostaneme

$$\underbrace{\rho(0)}_{=1} = \varphi_1 \rho(1) + \cdots + \varphi_p \rho(p) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma(0)}$$

a odtud již plyne, že $\boxed{DY_t} = \gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1 \rho(1) - \cdots - \varphi_p \rho(p)}$.

Při výpočtu autokovariance (nebo autokorelace ACF) budeme předpokládat, že $k > 0$, neboť $\gamma(0) = DY_t$ již jsme spočítali. Rovnici

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

vynásobíme výrazem Y_{t-k} a spočítáme střední hodnoty obou stran, tj.

$$EY_t Y_{t-k} = \varphi_1 EY_{t-1} Y_{t-k} + \cdots + \varphi_p EY_{t-p} Y_{t-k} + E\varepsilon_t Y_{t-k}. \quad (\text{A}_3)$$

Protože

$$EY_t = 0,$$

je

$$\gamma(k) = \text{cov}(Y_t, Y_{t-k}) = E(Y_t - EY_t)(Y_{t-k} - EY_{t-k}) = EY_t Y_{t-k}.$$

Spočtěme

$$EY_{t-k}\varepsilon_t = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j-k}\right) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-j-k}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \underbrace{\gamma_\varepsilon(j+k)}_{=0} = 0.$$

Vraťme se k rovnici (A₃), pak po dosazení $EY_t\varepsilon_t = 0$ a $\gamma(k) = EY_t Y_{t-k}$ dostaneme

$$\boxed{\gamma(k) = \varphi_1\gamma(k-1) + \dots + \varphi_p\gamma(k-p)} \quad (\text{A}_4)$$

Podělme obě strany rovnice (A₄) výrazem $\gamma(0)$ a protože $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$, dostaneme tzv. **Yuleovy-Walkerovy rovnice**.

$$\boxed{\rho(k) = \varphi_1\rho(k-1) + \dots + \varphi_p\rho(k-p)} \quad k \geq 1 \quad (\text{A}_5)$$

EXPLICITNÍ VYJÁDŘENÍ AUTOKORELAČNÍ FUNKCE PROCESU $AR(p)$

Při explicitním vyjádření autokorelační funkce procesu vyjdeme z Yuleo-Walkerových rovnic

$$\rho(k) = \varphi_1\rho(k-1) + \dots + \varphi_p\rho(k-p) \quad k \geq 1.$$

Označme

$$B\rho(k) = \rho(k-1), \quad \text{přičemž} \quad \rho(0) = 1 \quad \text{a} \quad \rho(-j) = \rho(j)$$

a hledejme řešení tzv. **homogenní diferencní rovnice**

$$\rho(k) - \varphi_1\rho(k-1) - \dots - \varphi_p\rho(k-p) = 0 \quad k \geq 1 \quad \text{tj.} \quad \boxed{\Phi(B)\rho(k) = 0}.$$

POZNÁMKA: ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ DIFERENČNÍ ROVNICE

Mějme polynom $\Phi(z) = \varphi_0 - \varphi_1z - \dots - \varphi_pz^p$ a necht' $\frac{1}{\lambda_j}$ jsou jeho kořeny, tj. $\Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) = 0$. Pak platí

$$\varphi_0 - \varphi_1z - \dots - \varphi_pz^p = \varphi_p \prod_j \left(z - \frac{1}{\lambda_j}\right) = \varphi_0 \prod_j (1 - \lambda_j z),$$

v našem případě $\varphi_0 = 1$ a $\varphi_p \neq 0$.

1. Necht' $\frac{1}{\lambda_j}$ je kořen polynomu $\Phi(z)$, pak $\boxed{\lambda_j^k}$ je řešením $\Phi(B)\rho(k) = 0$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} \Phi(B)\lambda_j^k &= (1 - \varphi B - \dots - \varphi_p B^p)\lambda_j^k = \lambda_j^k - \varphi_1\lambda_j^{k-1} - \dots - \varphi_p\lambda_j^{k-p} \\ &= \lambda_j^k \left(1 - \varphi_1\frac{1}{\lambda_j} - \dots - \varphi_p\frac{1}{\lambda_j^p}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)\lambda_j^k = 0. \end{aligned}$$

nebo ekvivalentně: jestliže uvažujeme faktorizaci $\Phi(B) = \varphi_0 \prod_i (1 - \lambda_i B)$, tak mezi faktory je i člen $(1 - \lambda_j B)$ a platí

$$(1 - \lambda_j B)\lambda_j^k = \lambda_j^k - \lambda_j B(\lambda_j^k) = \lambda_j^k - \lambda_j \cdot \lambda_j^{k-1} = 0.$$

2. Necht' $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_p}$ jsou různé jednoduché kořeny, pak $\boxed{c_1\lambda_1^k + \dots + c_p\lambda_p^k}$ je řešením homogenní diferencní rovnice a c_1, \dots, c_p jsou konstanty, které jsou určeny **počátečními podmínkami**.

Důkaz:

$$\Phi(B)(c_1\lambda_1^k + \dots + c_p\lambda_p^k) = c_1 \underbrace{\Phi(B)\lambda_1^k}_{\Phi\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)=0} + \dots + c_p \underbrace{\Phi(B)\lambda_p^k}_{\Phi\left(\frac{1}{\lambda_p}\right)=0} = 0.$$

3. Je-li kořen $\frac{1}{\lambda_j}$ **dvojnásobný kořen**, pak $\boxed{\lambda_j^k, k\lambda_j^k}$ jsou řešeními $\Phi(B)\rho(k) = 0$.

Důkaz: Díky faktorizaci můžeme psát $\Phi(B) = (1 - \lambda_j B)^2 \prod_{k \neq j} (1 - \lambda_k B)$. Pak

$$(1 - \lambda_j B)^2 \lambda_j^k = (1 - 2\lambda_j B + \lambda_j^2 B^2) \lambda_j^k = \lambda_j^k - 2\lambda_j \lambda_j^{k-1} + \lambda_j^2 \lambda_j^{k-2} = 0$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_j B)^2 k \lambda_j^k &= (1 - 2\lambda_j B + \lambda_j^2 B^2) k \lambda_j^k = k \lambda_j^k - 2\lambda_j (k-1) \lambda_j^{k-1} + \lambda_j^2 (k-2) \lambda_j^{k-2} \\ &= k \lambda_j^k - 2k \lambda_j^k + 2\lambda_j^k + k \lambda_j^k - 2\lambda_j^k = 0 \end{aligned}$$

4. Analogicky dostaneme: je-li kořen $\frac{1}{\lambda_j}$ r -tého řádu, pak $\boxed{\lambda_j^k, k\lambda_j^k, \dots, k^{r-1}\lambda_j^k}$ jsou řešeními $\Phi(B)\rho(k) = 0$.

Shrneme-li tedy předchozí, za předpokladu, že $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}$ jsou různé kořeny s násobnostmi p_1, \dots, p_k , přičemž $p = p_1 + \dots + p_k$, pak řešení homogenní diferencní rovnice $\Phi(B)\rho(k) = 0$ je tvaru

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{s=0}^{p_j-1} c_{js} k^s \right) \lambda_j^k,$$

kde c_{js} jsou konstanty, které jsou určeny počátečními podmínkami.

Dále položme

$$\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}.$$

Pak máme

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{s=0}^{p_j-1} c_{js} k^s \right) r_j^k e^{ik\theta_j},$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$|\lambda_j| = r_j < 1,$$

dostáváme odtud, že $\rho(k)$ klesá pro $k \rightarrow \infty$ exponenciálně k nule, tj.

$$\rho(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

což je velmi **důležitá identifikační vlastnost autoregresních $AR(p)$ procesů**.

1.2.7 Invertibilita

Víme, že pokud autoregresní proces konečného řádu $AR(p)$ je kauzální, pak jej lze vyjádřit i pomocí MA procesu nekonečného řádu, tj. $AR(p) \equiv MA(\infty)$.

Zajímá nás, za jakých podmínek můžeme MA proces konečného řádu vyjádřit pomocí autoregresního procesu nekonečného řádu, tj. $MA(q) \equiv AR(\infty)$. Tuto vlastnost nazveme **invertibilitou**. Přesnou definici vyslovíme později.

Nejprve si všimneme jednoduchého případu, a to $MA(1)$ procesu.

MA PROCES PRVNÍHO ŘÁDU: $Y_t \sim MA(1) : Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Nejprve označme $\theta_1 = -\theta$ a předpokládejme, že $|\theta_1| = |\theta| < 1$. Využijeme-li vztahu

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \Rightarrow \varepsilon_t = Y_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

můžeme postupně upravovat

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta \varepsilon_{t-1} = Y_t + \theta(Y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}) = Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-2} = \dots = \sum_{j=0}^k \theta^j Y_{t-j} + \theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}$$

a

$$\left\| \varepsilon_t - \sum_{j=0}^k \theta^j Y_{t-j} \right\|^2 = E \left| \varepsilon_t - \sum_{j=0}^k \theta^j Y_{t-j} \right|^2 = E |\theta^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}|^2 = \theta^{2(k+1)} \sigma_\varepsilon^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

tedy

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} \quad \text{pro} \quad |\theta| < 1.$$

Budeme-li předpokládat, že $|\theta_1| = |\theta| > 1$, použijme vztah

$$\varepsilon_{t-1} = \frac{1}{\theta_1} Y_t - \frac{1}{\theta_1} \varepsilon_t$$

a označme $\theta_1 = -\theta$. Pak můžeme opět postupně upravovat

$$\varepsilon_t = -\frac{1}{\theta} Y_{t+1} + \frac{1}{\theta} \varepsilon_{t+1} = -\frac{1}{\theta} Y_{t+1} + \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\theta} Y_{t+2} + \frac{1}{\theta} \varepsilon_{t+2} \right) = \dots = -\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\theta^j} Y_{t+j} + \frac{1}{\theta^{k+1}} \varepsilon_{t+k+1}.$$

Obdobně jako v předchozím případě, lze ukázat, že posloupnost $-\sum_{j=1}^N \frac{1}{\theta^j} Y_{t+j}$ konverguje pro $N \rightarrow \infty$ také k ε_t . Tento rozvoj však nemá praktický smysl, neboť nepozorovatelná veličina ε_t je vyjádřena pomocí teprve **budoucích** pozorovatelných hodnot $\{Y_s, s > t\}$.

Dále si všimněme **vícenásobné reprezentace $MA(1)$ procesů**. Demonstrovat to můžeme pomocí následujícího příkladu. Nechť platí $|\theta_1| > 1$, a uvažujme dva procesy, první neinver-

tibilní, druhý invertibilní: $\left. \begin{array}{l} (1) \quad Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \\ (2) \quad X_t = \eta_t + \frac{1}{\theta_1} \eta_{t-1} \quad \eta_t \sim WN(0, \theta_1^2 \sigma^2) \end{array} \right\}$ Ukážeme, že oba dva procesy mají stejné první a druhé momenty.

$$\boxed{EY_t} = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = E\varepsilon_t + \theta_1 E\varepsilon_{t-1} = \boxed{0},$$

$$\boxed{EX_t} = E\left(\eta_t + \frac{1}{\theta_1} \eta_{t-1}\right) = E\eta_t + \frac{1}{\theta_1} E\eta_{t-1} = \boxed{0},$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\gamma_Y(k)} &= EY_t Y_{t+k} = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+k} + \theta_1 \varepsilon_{t+k-1}) \\
&= E\varepsilon_t \varepsilon_{t+k} + \theta_1 E\varepsilon_t \varepsilon_{t+k-1} + \theta_1 E\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+k} + \theta_1^2 E\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+k-1} \\
&= \gamma_\varepsilon(k) + \theta_1 \gamma_\varepsilon(k-1) + \theta_1 \gamma_\varepsilon(k+1) + \theta_1^2 \gamma_\varepsilon(k) \\
&= (1 + \theta_1^2) \gamma_\varepsilon(k) + \theta_1 \gamma_\varepsilon(k-1) + \theta_1 \gamma_\varepsilon(k+1) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2) & k = 0 \\ \theta_1 \sigma^2 & k = \pm 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\gamma_X(k)} &= EX_t X_{t+k} = E\left(\eta_t + \frac{1}{\theta_1} \eta_{t-1}\right) \left(\eta_{t+k} + \frac{1}{\theta_1} \eta_{t+k-1}\right) \\
&= E\eta_t \eta_{t+k} + \frac{1}{\theta_1} E\eta_t \eta_{t+k-1} + \frac{1}{\theta_1} E\eta_{t-1} \eta_{t+k} + \frac{1}{\theta_1^2} E\eta_{t-1} \eta_{t+k-1} \\
&= \gamma_\eta(k) + \frac{1}{\theta_1} \gamma_\eta(k-1) + \frac{1}{\theta_1} \gamma_\eta(k+1) + \frac{1}{\theta_1^2} \gamma_\eta(k) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\theta_1^2}\right) \gamma_\eta(k) + \frac{1}{\theta_1} \gamma_\eta(k-1) + \frac{1}{\theta_1} \gamma_\eta(k+1) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2) & k = 0 \\ \theta_1 \sigma^2 & k = \pm 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}
\end{aligned}$$

I když obě invertibilní i neinvertibilní MA reprezentace generují procesy se stejnými momenty prvního a druhého řádu, z praktických důvodů dáváme přednost procesu invertibilnímu, neboť nepozorovatelné veličiny ε_t můžeme odhadnout pomocí přítomných a minulých hodnot pozorovatelných veličin $\{X_s, s < t\}$, kdežto u neinvertibilních MA reprezentací nepozorovatelné veličiny ε_t neodhadneme, neboť nemáme ještě k dispozici budoucí hodnoty $\{Y_s, s > t\}$.

Nyní již můžeme podat definici invertibility.

Definice 1.2.12.

ARMA proces $Y_t \sim ARMA(p, q)$ se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^\infty$ (tj. $\sum_{j=0}^\infty |\pi_j| < \infty$) tak, že

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j}, \quad \text{tj. zkráceně} \quad Y_t \sim AR(\infty) : \varepsilon_t = \pi(B)Y_t.$$

Nyní vyšetřeme, za jakých podmínek je MA proces řádu q invertibilní.

MA PROCES ŘÁDU q : $Y_t \sim MA(q) : Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Naprostu analogickým postupem jako v případě kauzálního $AR(p)$ procesu, lze ukázat, že všechny kořeny $\Theta(z)$ musí ležet vně jednotkového kruhu.

Provedme tedy nejprve rozklad polynomu $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ na součin kořenových činitelů

$$\Theta(z) = (1 - \lambda_1 z)^{q_1} \dots (1 - \lambda_k z)^{q_k},$$

kde $z_{01} = \frac{1}{\lambda_1}, \dots, z_{0k} = \frac{1}{\lambda_k}$ jsou rozdílné (reálné či komplexní) kořeny polynomu $\Theta(z)$, q_1, \dots, q_k je jejich násobnost (přičemž platí $q_1 + \dots + q_k = q$).

Nyní budeme hledat taková absolutně konvergentní $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^\infty$ (tj. $\sum_{j=0}^\infty |\pi_j| < \infty$), aby

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j} \text{ byl invertibilní proces.}$$

Pokud použijeme operátor zpětného chodu, můžeme psát:

$$Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t,$$

přítom hledáme $\pi(B)$ takové, aby platilo

$$\pi(B)\Theta(B) = 1 \quad \text{nebo} \quad \pi(z)\Theta(z) = 1 \quad \text{čili} \quad \pi(z) = \frac{1}{\Theta(z)}.$$

Z věty o rozkladu na částečné zlomky dostáváme (pokud pro názornost předpokládáme, že všechny kořeny jsou jednoduché)

$$\frac{1}{\Theta(z)} = \frac{1}{(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_p z)} = \frac{c_1}{1 - \lambda_1 z} + \dots + \frac{c_p}{1 - \lambda_p z}$$

pro vhodná c_1, \dots, c_p . Pokud pro $k = 1, \dots, p$ platí $|\lambda_k z| < 1$, můžeme psát

$$\frac{c_k}{1 - \lambda_k z} = c_k \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_k z)^j$$

a dokázali jsme najít konvergentní řadu

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{k=1}^p c_k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_k^j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^j + \dots + c_p \lambda_p^j) z^j,$$

přičemž

$$\pi_j = c_1 \lambda_1^j + \dots + c_p \lambda_p^j,$$

neboť $\pi(z) = \frac{1}{\Theta(z)}$ je holomorfní pro $|z| \leq 1$ právě když

$$|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_p| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda_1} \right| > 1, \dots, \left| \frac{1}{\lambda_p} \right| > 1}_{|z_{01}| > 1}$$

tedy všechny kořeny polynomu $\Theta(z)$ musí ležet vně jednotkového kruhu.

Na závěr tohoto odstavce ještě spočítejme střední hodnotu, rozptyl, autokovarianční funkci a také spektrální hustotu $MA(q)$ procesu. Protože $MA(q)$ proces je lineárním procesem, je vždy slabě stacionární, proto můžeme počítat

$$\begin{aligned} \overline{EY_t} &= E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}) = 0 \\ \overline{DY_t} &= D(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \\ \gamma(t) &= C(Y_s, Y_{s+t}) = EY_s Y_{s+t} = \sum_{j=0}^q \sum_{h=0}^q \theta_j \theta_h E\varepsilon_{s-j} \varepsilon_{s+t-h} \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{h=0}^q \theta_j \theta_h \gamma_\varepsilon(h - t - j) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^q \theta_j \theta_{j+t} \end{aligned}$$

Protože

$$\theta_0 = 1 \quad \text{a} \quad \theta_j = 0 \quad \text{pro} \quad j > q,$$

dostáváme

$$\boxed{\gamma(t)} = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_{q-2}^2 + \theta_{q-1}^2 + \theta_q^2) & \text{pro } t = 0 \\ \sigma_\varepsilon^2(\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \cdots + \theta_{q-2}\theta_{q-1} + \theta_{q-1}\theta_q) & t = 1 \\ \sigma_\varepsilon^2(\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \cdots + \theta_{q-2}\theta_q) & t = 2 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_\varepsilon^2(\theta_{q-1} + \theta_1\theta_q) & t = q - 1 \\ \sigma_\varepsilon^2\theta_q & t = q \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-t} \theta_j \theta_{j+t} & t = 0, \dots, q, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Autokorelační funkce je pak rovna

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{1}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} \sum_{j=0}^{q-t} \theta_j \theta_{j+t} & 1 \leq t \leq q, \theta_0 \equiv 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

tedy, pro $t > q$ je autokorelační funkce nulová, což je velmi důležitá identifikační vlastnost $MA(q)$ procesů.

Díky tomu, že $MA(q)$ proces je lineárním procesem, spektrální hustota je rovna

$$\boxed{f_{MA(q)}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |\Theta(e^{-i\omega})|^2}.$$

1.2.8 Vícenásobná reprezentace $MA(q)$ procesů

Mějme MA proces řádu q :

$$Y_t \sim MA(q) : Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Proveďme tedy rozklad polynomu $\Theta(z) = 1 + \theta_1z + \cdots + \theta_qz^q$ na součin kořenových činitelů

$$\Theta(z) = \prod_j (1 - \lambda_j z),$$

Pak (protože $MA(q)$ proces je lineárním procesem) **autokovarianční generující funkce** je rovna

$$G_Y(z) = \Theta(z)\Theta(z^{-1})\sigma_\varepsilon^2.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_j z)(1 - \lambda_j z^{-1}) &= 1 - \lambda_j z - \lambda_j z^{-1} + \lambda_j^2 = \lambda_j^2 (\lambda_j^{-2} - \lambda_j^{-1} z - \lambda_j^{-1} z^{-1} + 1) \\ &= \lambda_j^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_j} z\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_j} z^{-1}\right) \end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned} G_Y(z) &= \sigma_\varepsilon^2 \Theta(z) \Theta(z^{-1}) = \sigma_\varepsilon^2 \prod_j (1 - \lambda_j z) \prod_j (1 - \lambda_j z^{-1}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \underbrace{\prod_j \lambda_j^2}_{\sigma_*^2} \underbrace{\prod_j \left(1 - \frac{1}{\lambda_j} z\right)}_{\Theta_*(z)} \underbrace{\prod_j \left(1 - \frac{1}{\lambda_j} z^{-1}\right)}_{\Theta_*(z^{-1})} = \sigma_*^2 \Theta_*(z) \Theta_*(z^{-1}) \end{aligned}$$

Takže proces

$$Y_t^* \sim MA(q) : Y_t = \varepsilon_t^* + \theta_1^* \varepsilon_{t-1}^* + \cdots + \theta_q^* \varepsilon_{t-q}^* \quad \varepsilon_t^* \sim WN(0, \sigma_*^2)$$

má stejnou autokovarianční generující funkci

$$G_Y(z) = \sigma_*^2 \Theta_*(z) \Theta_*(z^{-1})$$

a jsou proto z hlediska prvních dvou momentů nerozlišitelné.

Obecně můžeme dostat 2^q různých procesů s funkcí

$$\Theta_{*s}(z) = \prod_{j=1}^q (1 - \lambda_j^{\pm 1} z) \quad s = 1, \dots, 2^q$$

Mezi všemi těmito procesy **pouze jediný je invertibilní**, a to ten, pro kterého platí

$$\lambda_j^{invert} = \begin{cases} \lambda_j & |\lambda_j| < 1, \\ \lambda_j^{-1} & |\lambda_j| \geq 1. \end{cases}$$

Takže podmínka invertibility zajišťuje identifikovatelnost $MA(q)$ procesu z hlediska prvních dvou momentů.

1.3 Vlastnosti $ARMA(p, q)$ procesů

Dříve než uvedeme nutnou a postačující podmínku pro kauzalitu a invertibilitu $ARMA(p, q)$ procesů, vyšetřeme problematiku společných kořenů $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$.

1.3.1 Společné kořeny polynomů $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$

Mějme

$$Y_t \sim ARMA(p, q) : Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

a předpokládejme že $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ **mají společný kořen** $\boxed{\frac{1}{\lambda}}$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (1 - \lambda z)(1 - \varphi_1^* z - \cdots - \varphi_{p-1}^* z^{p-1}) = (1 - \lambda z) \Phi^*(z) \\ \Theta(z) &= (1 - \lambda z)(1 + \theta_1^* z + \cdots + \theta_{q-1}^* z^{q-1}) = (1 - \lambda z) \Theta^*(z) \end{aligned}$$

Pak můžeme psát

$$(1 - \lambda B) \Phi^*(B) Y_t = (1 - \lambda B) \Theta^*(B) \varepsilon_t.$$

Pokud obě strany rovnice vydělíme výrazem $(1 - \lambda B)$, dostaneme

$$Y_t \sim ARMA(p-1, q-1) : \Phi^*(B) Y_t = \Theta^*(B) \varepsilon_t.$$

Takže podmínka, že

$$\boxed{\Phi(z) \text{ a } \Theta(z) \text{ nemají společné kořeny}}$$

zajišťuje, že řády **ARMA procesů nelze již snižovat**.

1.3.2 Nutná a postačující podmínka kauzality a invertibility.

V předchozích odstavcích jsme ukázali, že platí

- (1) $Y_t \sim AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t \wedge \Phi(z) \neq 0$ pro $\forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1 \Leftrightarrow AR(p)$ je **kauzální**;
 (2) $Y_t \sim MA(q) : Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \wedge \Theta(z) \neq 0$ pro $\forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1 \Leftrightarrow MA(q)$ je **invertibilní**.

Naprosto analogickým způsobem lze dokázat obecnější tvrzení:

Věta 1.3.1.

Nechť $\Phi(B)$ a $\Theta(B)$ nemají společné kořeny. Pak

$Y_t \sim ARMA(p, q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ je **kauzální** $\Leftrightarrow \Phi(z) \neq 0$ pro $\forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1$.

$Y_t \sim ARMA(p, q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ je **invertibilní** $\Leftrightarrow \Theta(z) \neq 0$ pro $\forall z \in \mathbb{C} \wedge |z| \leq 1$.

Znamená to tedy, že $Y_t \sim ARMA(p, q)$ je kauzálním a invertibilním $ARMA$ procesem, jestliže všechny kořeny polynomů $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ leží vně jednotkového kruhu a koeficienty ψ_j a π_j jsou určeny ze vztahů

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)} \quad \text{pro } |z| \leq 1$$

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \quad \text{pro } |z| \leq 1.$$

V dalším budeme uvažovat pouze takové $Y_t \sim ARMA(p, q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ procesy, které splňují následující podmínky

(P1) $\Phi(B)$ a $\Theta(B)$ nemají společné kořeny.

(P2) $Y_t \sim ARMA(p, q)$ je kauzální.

(P3) $Y_t \sim ARMA(p, q)$ je invertibilní.

1.3.3 Střední hodnota, rozptyl, autokovarianční a autokorelační funkce procesů $ARMA(p, q)$

STŘEDNÍ HODNOTA

Vzhledem ke kauzalitě $ARMA(p, q)$ procesu můžeme počítat

$$\overline{EY_t} = E \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-j} = \boxed{0}$$

ROZPTYL

Při odvození rozptylu nejprve rovnici

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

vynásobme výrazem Y_t a spočtěme střední hodnoty obou stran, tj.

$$EY_t^2 = \varphi_1 EY_{t-1}Y_t + \cdots + \varphi_p EY_{t-p}Y_t + E\varepsilon_t Y_t + \theta_1 E\varepsilon_{t-1}Y_t + \cdots + \theta_q E\varepsilon_{t-q}Y_t. \quad (A_6)$$

Spočtěme pro $i = 0, 1, \dots, q$

$$E\varepsilon_{t-i}Y_t = E\varepsilon_{t-i} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \gamma_\varepsilon(i-j) = \sigma_\varepsilon^2 \psi_i \quad (\text{přičemž } \psi_0 = 1).$$

Po dosazení do rovnice (A₆) dostaneme

$$\gamma(0) - \varphi_1 \gamma(1) - \cdots - \varphi_p \gamma(p) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1 \psi_1 + \cdots + \theta_q \psi_q). \quad (A_7)$$

Podělme obě strany rovnice (A₇) výrazem $\gamma(0)$. Vzhledem k tomu, že $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$, dostaneme

$$1 - \varphi_1 \rho(1) - \cdots - \varphi_p \rho(p) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1 \psi_1 + \cdots + \theta_q \psi_q)}{\gamma(0)}$$

takže

$$\boxed{DY_t = \gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1 \psi_1 + \cdots + \theta_q \psi_q)}{1 - \varphi_1 \rho(1) - \cdots - \varphi_p \rho(p)}}.$$

AUTOKOVARIANČNÍ A AUTOKORELAČNÍ FUNKCE (ACF)

Při výpočtu autokovariance rovnici

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \cdots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

vynásobíme výrazem Y_{t-k} a spočítáme střední hodnoty obou stran, takže dostaneme

$$\gamma(k) - \varphi_1 \gamma(k-1) - \cdots - \varphi_p \gamma(k-p) = EY_{t-k} \varepsilon_t + \theta_1 EY_{t-k} \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q EY_{t-k} \varepsilon_{t-q}. \quad (A_8)$$

Nejprve je třeba si uvědomit, že pro $k > 0$ platí

$$\boxed{E\varepsilon_t Y_{t-k}} = E \left(\varepsilon_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_t \varepsilon_{t-k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \gamma_\varepsilon(k+j) = \boxed{0}.$$

Spočtěme pro $i = 1, \dots, q$

$$\boxed{E\varepsilon_{t-i} Y_{t-k}} = E\varepsilon_{t-i} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \gamma_\varepsilon(k+j-i) = \boxed{\sigma_\varepsilon^2 \psi_{i-k}}.$$

Dosadíme-li do výrazu (A₈) předchozí dva výsledky, dostáváme

$$\gamma(k) - \varphi_1 \gamma(k-1) - \cdots - \varphi_p \gamma(k-p) = \sigma_\varepsilon^2 (\theta_1 \psi_{1-k} + \cdots + \theta_k \underbrace{\psi_{k-k}}_{=\psi_0=1} + \theta_{k+1} \psi_1 + \cdots + \theta_q \psi_{q-k})$$

Vzhledem k tomu, že platí $\psi_j = 0$ pro $j < 0$, uvažujme dva případy:

(a) jestliže $0 \leq k \leq \max(p, q + 1)$, pak

$$\gamma(k) - \varphi_1\gamma(k-1) - \dots - \varphi_p\gamma(k-p) = \sigma_\varepsilon^2(\theta_k + \theta_{k+1}\psi_1 + \dots + \theta_q\psi_{q-k}). \quad (A_9)$$

(b) pokud $k > \max(p, q + 1)$, pak

$$\gamma(k) - \varphi_1\gamma(k-1) - \dots - \varphi_p\gamma(k-p) = 0. \quad (A_{10})$$

Podělme obě strany rovnice (A₉), resp (A₁₀), výrazem $\gamma(0)$. Dostaneme

$$\rho(k) - \varphi_1\rho(k-1) - \dots - \varphi_p\rho(k-p) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(\theta_k + \theta_{k+1}\psi_1 + \dots + \theta_q\psi_{q-k})}{\gamma(0)}$$

resp.

$$\rho(k) - \varphi_1\rho(k-1) - \dots - \varphi_p\rho(k-p) = 0.$$

Nechť např.

$$q + 1 > p.$$

Pak máme více rovnic pro určení počátečních p podmínek. V tomto případě prvních $q - p + 1$ autokovariančních koeficientů jsou určeny z prvních $q - p + 1$ podmínek. Obecné řešení **homogenní diferencní rovnice**

$$\rho(k) - \varphi_1\rho(k-1) - \dots - \varphi_p\rho(k-p) = 0 \quad \text{tj.} \quad \Phi(B)\rho(k) = 0$$

je tvaru

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{s=0}^{p_j-1} c_{js} k^s \right) \lambda_j^k,$$

kde

$$\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}$$

jsou různé kořeny s násobnostmi

$$p_1, \dots, p_k,$$

přičemž

$$p = p_1 + \dots + p_k$$

a c_{js} je právě p konstant, které jsou určeny počátečními podmínkami. Dále položme

$$\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}.$$

Pak máme

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{s=0}^{p_j-1} c_{js} k^s \right) r_j^k e^{ik\theta_j},$$

Protože uvažujeme pouze kauzální $ARMA(p, q)$ procesy, pro které platí

$$|\lambda_j| = r_j < 1,$$

dostáváme odtud, že a $\rho(k)$ klesá pro $k \rightarrow \infty$ exponenciálně k nule, tj.

$$\rho(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

a vidíme, že pro $k > \max(p, q + 1)$ má autokorelační funkce $ARMA(p, q)$ procesů podobný charakter jako **autoregresní $AR(p)$ procesy**.

1.3.4 Spektrální hustota $ARMA(p, q)$ procesů

Věta 1.3.2 (Spektrální hustota $ARMA(p, q)$ procesů).

Nechť $\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ je kauzální a invertibilní $ARMA(p, q)$ proces, přičemž $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ nemají společné kořeny. Pak spektrální hustota $ARMA(p, q)$ procesu je rovna

$$f_Y(\omega) = f_{ARMA(p,q)}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2} \quad \text{pro} \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

DŮKAZ. Protože všechny kořeny $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ leží vně jednotkového kruhu, $ARMA(p, q)$ proces je kauzální a invertibilní.

Kauzalita značí, že existuje absolutně konvergentní posloupnost reálných čísel $\psi = \{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ (tj. $\sum_{j=0}^\infty |\psi_j| < \infty$) taková, že platí

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{kde} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Víme, že spektrální hustota bílého šumu je rovna

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \quad \text{kde} \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Protože Y_t je lineárním procesem, víme, že má spektrální hustotu

$$f_Y(\omega) = |\Psi(e^{-i\omega})|^2 f_\varepsilon(\omega) = |\Psi(e^{-i\omega})|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \quad \text{kde} \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Také $\Theta(B)\varepsilon_t$ jakožto lineární proces má spektrální hustotu tvaru

$$|\Theta(e^{-i\omega})|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \quad \text{pro} \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Rovněž $\Phi(B)Y_t$ jakožto lineární filtr má také spektrální hustotu, a ta je rovna

$$|\Theta(e^{-i\omega})|^2 f_Y(\omega) \quad \text{pro} \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Protože platí

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t,$$

musí také platit

$$|\Theta(e^{-i\omega})|^2 f_Y(\omega) = |\Theta(e^{-i\omega})|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \quad \text{pro} \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Odtud již dostáváme tvrzení věty

$$f_Y(\omega) = f_{ARMA(p,q)}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2} \quad \text{pro} \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

1.4 Stacionární procesy a nejlepší lineární predikce

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je stacionární proces se střední hodnotou μ_Y a autokovarianční funkcí $\gamma_Y(t)$. Pak náhodný proces $\{Y_t - \mu_Y, t \in \mathbb{Z}\}$ má nulovou střední hodnotu (tj. je centrován) a má stejnou autokovarianční funkci $\gamma_Y(t)$.

Uvažujme **nejlepší lineární predikci** \hat{Y}_t pomocí Y_{t-1}, \dots, Y_{t-n} ($n \geq 1$), která je ortogonální projekcí

$$\hat{Y}_t = P_{\overline{sp}\{1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-n}\}}(Y_t).$$

Lze snadno ukázat, že platí

$$\hat{Y}_t = P_{\overline{sp}\{1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-n}\}}(Y_t) = \mu_Y + P_{\overline{sp}\{Y_{t-1}, \dots, Y_{t-n}\}}(Y_t).$$

Takže bez újmy na obecnosti můžeme dále uvažovat pouze centrované stacionární procesy $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, pro které platí

$$\hat{Y}_t = P_{\overline{sp}\{1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-n}\}}(Y_t) = P_{\overline{sp}\{Y_{t-1}, \dots, Y_{t-n}\}}(Y_t).$$

Nejprve definujme jednokrokovou predikci.

Definice 1.4.1.

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrovaný stacionární proces. Označme pro $n \geq 1$

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

Pak **jednokroková (lineární) predikce** je definována vztahem

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{Y}_{n+1|n} = \begin{cases} 0 (= \mu_Y) & n = 0, \\ P_{\overline{sp}\{Y_1, \dots, Y_n\}}(Y_{n+1}) = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) & n \geq 1. \end{cases}$$

Protože pro $n \geq 1$ $\hat{Y}_{n+1} \in \mathcal{M}_n$, pak platí

$$\hat{Y}_{n+1} = \phi_{n,1}Y_n + \dots + \phi_{n,n}Y_1$$

a $\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,n}$ minimalizují

$$\|Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}\|^2 = E|Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}|^2.$$

Podle projekční věty pro každé $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a pro každé $Y \in \mathcal{M}_n$ platí

$$\langle X - \hat{X}, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle \hat{X}, Y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle X, Y \rangle = \langle \hat{X}, Y \rangle \quad \text{což je } \boxed{EXY = E\hat{X}Y},$$

takže jestliže pro $j = 1, \dots, n$ položíme $X = Y_{n+1}$ a $Y = Y_{n+1-j}$, pak musí platit

$$\begin{aligned} EY_{n+1}Y_{n+1-j} &= E\hat{Y}_{n+1}Y_{n+1-j} \\ \gamma(j) &= E\left(Y_{n+1-j} \sum_{i=1}^n \phi_{n,i}Y_{n+1-i}\right) = \sum_{i=1}^n \phi_{n,i}EY_{n+1-i}Y_{n+1-j} = \sum_{i=1}^n \phi_{n,i}\gamma(i-j) \end{aligned}$$

což lze maticově zapsat takto

$$\begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n,1} \\ \phi_{n,2} \\ \vdots \\ \phi_{n,n} \end{pmatrix}$$

tj.

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n.$$

Projekční věta zaručuje existenci právě jednoho řešení $\hat{Y}_{n+1} \in \mathcal{M}_n$ pro nějaké $\boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^n$ (kterých obecně může být více, jejich výsledkem je však pouze jediné \hat{Y}_{n+1}). Jestliže $\boldsymbol{\Gamma}_n$ je regulární, máme právě jediné $\boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^n$ a platí

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n}.$$

Následující věta dává postačující podmínku k tomu, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ byla $\boldsymbol{\Gamma}_n$ regulární maticí.

Věta 1.4.2.

Jestliže platí

$$\gamma(0) > 0 \quad a \quad \gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0,$$

pak kovarianční matice

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^n$$

je regulární pro každé $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. Tento důkaz se provádí sporem, viz Brockwel, Davis (1987), str. 160-161. \square

Důsledek 1.4.3.

Označme

$$\mathbf{Y}_n = (Y_n, \dots, Y_1)'$$

Jestliže platí $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$, pak nejlepší lineární predikce \hat{Y}_{n+1} náhodné veličiny Y_{n+1} je tvaru

$$\boxed{\hat{Y}_{n+1} = \phi_{n,1} Y_n + \cdots + \phi_{n,n} Y_1} \quad \text{tj.} \quad \boxed{\hat{Y}_{n+1} = \boldsymbol{\phi}'_n \mathbf{Y}_n} \quad \text{přičemž} \quad \boxed{\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n}.$$

Střední kvadratická chyba je rovna

$$\boxed{v_n} = MSE(\hat{Y}_{n+1}) = E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2 = \boxed{\gamma(0) - \boldsymbol{\gamma}'_n \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n}. \quad (1.2)$$

DŮKAZ. Tvzení týkající se tvaru nejlepší lineární predikce a vektoru $\boldsymbol{\phi}_n$ plynou z předchozích poznámek a předešlé věty. Zbývá vypočítat střední kvadratickou chybu.

$$E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2 = E(Y_{n+1} - \boldsymbol{\phi}'_n \mathbf{Y}_n)^2 = EY_{n+1}^2 - 2E(\boldsymbol{\phi}'_n \mathbf{Y}_n Y_{n+1}) + E(\boldsymbol{\phi}'_n \mathbf{Y}_n)^2.$$

Nejprve počítejme

$$E\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_{n+1}' = (EY_nY_{n+1}, EY_{n-1}Y_{n+1}, \dots, EY_1Y_{n+1})' = (\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(n))' = \boldsymbol{\gamma}_n.$$

Dále si všimněme, že lze psát

$$(\boldsymbol{\phi}_n' \mathbf{Y}_n)^2 = \boldsymbol{\phi}_n' \mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_n' \boldsymbol{\phi}_n$$

a počítejme

$$\begin{aligned} E\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_n' &= E \left[\begin{pmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_1 \end{pmatrix} (Y_n, \dots, Y_1) \right] = \begin{pmatrix} EY_n^2 & EY_nY_{n-1} & \cdots & EY_nY_1 \\ EY_{n-1}Y_n & EY_{n-1}^2 & \cdots & EY_{n-1}Y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ EY_1Y_n & EY_1Y_{n-1} & \cdots & EY_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_n \end{aligned}$$

Takže můžeme pokračovat ve výpočtu střední kvadratické chyby

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2 &= EY_{n+1}^2 - 2\boldsymbol{\phi}_n' E\mathbf{Y}_nY_{n+1} + \boldsymbol{\phi}_n' E\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_n' \boldsymbol{\phi}_n = \gamma(0) - 2\boldsymbol{\phi}_n' \boldsymbol{\gamma}_n + \boldsymbol{\phi}_n' \boldsymbol{\Gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n \\ &= \gamma(0) - 2\boldsymbol{\gamma}_n' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n + \boldsymbol{\gamma}_n' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_n \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n = \gamma(0) - \boldsymbol{\gamma}_n' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n. \quad \square \end{aligned}$$

Nyní definujme h -krokovou (lineární) predikci.

Definice 1.4.4.

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrováný stacionární proces. Označme pro $n \geq 1$

$$\mathcal{M}_n = \overline{\text{sp}}\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

Pak h -kroková (lineární) predikce je definována vztahem

$$\hat{Y}_{n+h} = \hat{Y}_{n+h|n} = \begin{cases} 0 (= \mu_Y) & n, h = 0, \\ P_{\overline{\text{sp}}\{Y_1, \dots, Y_n\}}(Y_{n+h}) = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+h}) & n, h \geq 1. \end{cases}$$

Obdobným způsobem jako u jednokrokové predikce můžeme odvodit, že jestliže platí $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$, pak nejlepší lineární h -kroková predikce \hat{Y}_{n+h} náhodné veličiny Y_{n+h} je tvaru

$$\hat{Y}_{n+h} = \phi_{n,1}^{(h)} Y_n + \cdots + \phi_{n,n}^{(h)} Y_1 \quad \text{tj.} \quad \hat{Y}_{n+h} = \left(\boldsymbol{\phi}_n^{(h)} \right)' \mathbf{Y}_n$$

přičemž

$$\boldsymbol{\phi}_n^{(h)} = \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n^{(h)} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\gamma}_n^{(h)} = (\gamma(h), \gamma(h+1), \dots, \gamma(h+n-1))'.$$

Střední kvadratická chyba je rovna

$$\boxed{v_n^{(h)}} = \text{MSE}(\hat{Y}_{n+h}) = E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2 = \gamma(0) - \left(\boldsymbol{\phi}_n^{(h)} \right)' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\phi}_n^{(h)}.$$

1.5 Rekurentní metody pro výpočet nejlepší lineární predikce

Věta 1.5.1 (Durbin-Levinsův algoritmus).

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrováný stacionární proces s autokovarianční funkcí $\gamma(h)$ takovou, že $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$. Jestliže

$$\hat{Y}_{n+1} = P_{\overline{\text{sp}}\{Y_1, \dots, Y_n\}}(Y_{n+1}) = \phi_{n,1}Y_n + \dots + \phi_{n,n}Y_1$$

je nejlepší lineární predikce, pak pro koeficienty

$$\Phi_n = (\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,n})'$$

a pro střední kvadratické chyby

$$v_n = E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2$$

platí následující vztahy

$$\phi_{1,1} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \rho(1) \qquad v_0 = \gamma(0) \qquad (1.3)$$

$$\phi_{n,n} = [\gamma(n) - \Phi_{n-1}' \gamma_{n-1}] / v_{n-1} \qquad (1.4)$$

$$\Phi_n^{(1)} = \Phi_{n-1} - \phi_{n,n} \Phi_{n-1}^* \qquad v_n = v_{n-1} (1 - \phi_{n,n}^2) \qquad (1.5)$$

kde

$$\Phi_{n-1} = (\phi_{n-1,1}, \dots, \phi_{n-1,n-1})' \qquad \Phi_{n-1}^* = (\phi_{n-1,n-1}, \dots, \phi_{n-1,1})'$$

$$\Phi_n = (\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,n-1}, \phi_{n,n})' \qquad \Phi_n^{(1)} = (\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,n-1})'$$

DŮKAZ. Mějme

$$\mathcal{M}_n = \overline{\text{sp}}\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

Označme

$$\mathcal{M}_{n-1} = \overline{\text{sp}}\{Y_2, \dots, Y_n\}$$

a

$$\mathcal{M}_{n-1}^\perp = \overline{\text{sp}}\{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\}.$$

Vidíme, že \mathcal{M}_{n-1}^\perp je ortogonální komplement \mathcal{M}_{n-1} v \mathcal{M}_n . Takže pro libovolné $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tedy i pro $Y_{n+1} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ musí platit

$$\hat{Y}_{n+1} = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) = P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) + P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}).$$

Označme

$$e_1 = \frac{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|} \quad \text{tj.} \quad \|e_1\| = 1.$$

Pak platí

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{n+1} &= P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) + \overbrace{\langle Y_{n+1}, e_1 \rangle}_{\text{Fourier.koef.}} e_1 \\
&= P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) + \left\langle Y_{n+1}, \frac{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|} \right\rangle \frac{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|} \\
&= P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) + \frac{\langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2} (Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1))
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Označme

$$a = \frac{\langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2}.$$

Počítejme predikci

$$P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) = \phi_{n-1,1}Y_2 + \cdots + \phi_{n-1,n-1}Y_n$$

a označme

$$\phi_{n-1} = (\phi_{n-1,1}, \dots, \phi_{n-1,n-1})',$$

pak složky vektoru ϕ_{n-1} jsou řešením rovnic

$$\boxed{\underbrace{EY_1Y_{1+k}}_{\gamma(k)}} = E(Y_{1+k}P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)) = \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \underbrace{EY_{1+j}Y_{1+k}}_{\gamma(j-k)} \quad k = 1, \dots, n-1,$$

což lze zapsat maticově

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-2) & \gamma(n-3) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \phi_{n-1,2} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \\
&\text{tj.} \quad \gamma_{n-1} = \Gamma_{n-1} \phi_{n-1},
\end{aligned}$$

Jestliže platí $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$, pak kovarianční matice Γ_{n-1} je regulární a platí

$$\phi_{n-1} = \Gamma_{n-1}^{-1} \gamma_{n-1}.$$

Obdobně

$$P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) = \psi_{n-1,1}Y_n + \cdots + \psi_{n-1,n-1}Y_2$$

a označíme-li

$$\psi_{n-1} = (\psi_{n-1,1}, \dots, \psi_{n-1,n-1})',$$

pak složky vektoru ψ_{n-1} jsou řešením rovnic

$$\boxed{\underbrace{EY_{n+1}Y_{n+1-k}}_{\gamma(k)}} = E(Y_{n+1-k}P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})) = \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n-1,j} \underbrace{EY_{n+1-j}Y_{n+1-k}}_{\gamma(j-k)} \quad k = 1, \dots, n-1,$$

což maticově zapíšeme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n-1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-2) & \gamma(n-3) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{n-1,1} \\ \psi_{n-1,2} \\ \vdots \\ \psi_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \\ \text{tj. } \boldsymbol{\gamma}_{n-1} &= \boldsymbol{\Gamma}_{n-1} \boldsymbol{\psi}_{n-1}, \end{aligned}$$

tedy

$$\boldsymbol{\psi}_{n-1} = \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{n-1} = \boldsymbol{\phi}_{n-1}.$$

Celkově tedy, označíme-li

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n-1}^* &= (Y_2, \dots, Y_n)' \\ \mathbf{Y}_{n-1} &= (Y_n, \dots, Y_2)' \end{aligned}$$

tak dostaneme

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) &= \boldsymbol{\phi}'_{n-1} \mathbf{Y}_{n-1}^* \\ P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) &= \boldsymbol{\phi}'_{n-1} \mathbf{Y}_{n-1} \end{aligned}$$

Využijme vzorce (1.2) z důsledku 1.4.3 a počítejme střední kvadratické chyby obou predikcí

$$\begin{aligned} \|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2 &= \gamma(0) - \boldsymbol{\gamma}'_{n-1} \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{n-1} \\ \|Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})\|^2 &= \gamma(0) - \boldsymbol{\gamma}'_{n-1} \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{n-1} \end{aligned}$$

Tedy

$$v_{n-1} = \|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2 = \|Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})\|^2.$$

Vraťme se k rovnici (1.6), pak

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+1} &= P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) = P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) + a(Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)) \\ &= aY_1 + \phi_{n-1,1}Y_n + \cdots + \phi_{n-1,n-1}Y_2 - a(\phi_{n-1,1}Y_2 + \cdots + \phi_{n-1,n-1}Y_n) \\ &= aY_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\phi_{n-1,j} - a\phi_{n-1,n-j})Y_{n+1-j} = \phi_{n,n}Y_1 + \phi_{n,n-1}Y_2 + \cdots + \phi_{n,1}Y_n \end{aligned}$$

a odtud dostaneme

$$\begin{aligned} \phi_{n,n} &= a \\ \phi_{n,j} &= \phi_{n-1,j} - a\phi_{n-1,n-j} \quad \text{pro } j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Nyní se vrátíme ke konstantě a . Protože

$$\begin{aligned} \langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle &= \langle Y_{n+1}, Y_1 \rangle - \langle Y_{n+1}, P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle \\ &= EY_1Y_{n+1} - E \left(Y_{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j}Y_{1+j} \right) = \gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j}EY_{1+j}Y_{n+1} \\ &= \gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j}\gamma(n-1) = \gamma(n) - \boldsymbol{\phi}'_{n-1}\boldsymbol{\gamma}_{n-1}, \end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned} a &= \boxed{\phi_{n,n}} = \frac{\langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2} = \frac{\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \gamma(n-1)}{v_{n-1}} \\ &= \boxed{v_{n-1}^{-1} [\gamma(n) - \phi'_{n-1} \gamma_{n-1}]}. \end{aligned}$$

Zbývá dokázat, že platí

$$v_n = v_{n-1}(1 - \phi_{n,n}^2).$$

Počítejme proto střední kvadratickou chybu predikce $P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1})$:

$$\begin{aligned} v_n &= \|Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1})\|^2 = \left\| \underbrace{Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})}_{\text{---}} - P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}) \right\|^2 \\ &= \left\langle \underbrace{Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})}_{\text{---}} - P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}), \underbrace{Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})}_{\text{---}} - P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}) \right\rangle \\ &= \|Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})\|^2 - 2 \left\langle Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}) \right\rangle + \|P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1})\|^2 \end{aligned}$$

Protože

$$P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}) = a(Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)),$$

tedy

$$\|P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1})\|^2 = a^2 \|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2 = a^2 v_{n-1}.$$

Zbývá dopočítat

$$\begin{aligned} \langle Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}) \rangle &= \langle Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), a(Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)) \rangle \\ &= a \langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle - a \underbrace{\langle P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle}_{=0(\text{ortogonal})} \end{aligned}$$

Dále víme, že

$$a = \frac{\langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle}{v_{n-1}} = \phi_{n,n},$$

tedy

$$a \langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle = a^2 v_{n-1}$$

a celkově

$$\boxed{v_n} = v_{n-1} - 2a^2 v_{n-1} + a^2 v_{n-1} = v_{n-1}(1 - a^2) = \boxed{v_{n-1}(1 - \phi_{n,n}^2)}.$$

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána. □

Důsledek 1.5.2 (Důsledek Durbin-Levinsonova algoritmu).

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je centrováný stacionární proces s autokovarianční funkcí $\gamma(h)$, pro kterou platí $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$. Označme

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n &= \overline{\text{sp}}\{Y_1, \dots, Y_n\} \\ \mathcal{M}_{n-1} &= \overline{\text{sp}}\{Y_2, \dots, Y_n\}\end{aligned}$$

a nejlepší lineární predikci

$$\hat{Y}_{n+1} = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) = \phi_{n,n}Y_1 + \phi_{n,n-1}Y_2 + \dots + \phi_{n,1}Y_n,$$

pak platí

$$\boxed{\phi_{n,n} = R(Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1))}. \quad (1.7)$$

DŮKAZ. Označme

$$\mathcal{M}_{n-1}^\perp = \overline{\text{sp}}\{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\}.$$

Tedy \mathcal{M}_{n-1}^\perp je ortogonální komplement \mathcal{M}_{n-1} v \mathcal{M}_n . Takže lze psát

$$\hat{Y}_{n+1} = P_{\mathcal{M}_n}(Y_{n+1}) = P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}) + P_{\mathcal{M}_{n-1}^\perp}(Y_{n+1}).$$

Protože $P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})$ a $Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)$ jsou ortogonální tj.

$$\langle P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle = 0.$$

Tedy

$$\langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle = \langle Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle.$$

Navíc platí (viz důkaz Durbin-Levinsonova algoritmu)

$$\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2 = \|Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})\|^2 = v_{n-1},$$

takže lze psát

$$\begin{aligned}\boxed{\phi_{n,n}} &= a = \frac{\langle Y_{n+1}, Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\|^2} = \frac{\langle Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1) \rangle}{\|Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\| \|Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1})\|} \\ &= \frac{E(Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}))(Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1))}{\sqrt{E(Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}))^2} \sqrt{E(Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1))^2}} \\ &= \frac{C(Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1))}{\sqrt{D(Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}))} \sqrt{D(Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1))}} \\ &= \boxed{R(Y_{n+1} - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_{n+1}), Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1))}. \quad \square\end{aligned}$$

1.6 Parciální autokorelační funkce (PACF)

Definice 1.6.1.

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je stacionární proces. Pak **parciální autokorelační funkce** je definována vztahem

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= R(Y_t, Y_{t+1}) \\ \alpha(k) &= R(Y_t - \hat{Y}_t, Y_{t-k} - \hat{Y}_{t-k}) \quad \text{pro } |k| > 1\end{aligned}$$

kde \hat{Y}_t , resp. \hat{Y}_{t-k} jsou nejlepší lineární predikce Y_t (resp. Y_{t-k}) pomocí $Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1}$.

Nejlepší lineární predikce \hat{Y}_t a \hat{Y}_{t-k} jsou projekce

$$\boxed{\hat{Y}_t = P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_t)} \quad \text{a} \quad \boxed{\hat{Y}_{t-k} = P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_{t-k})}, \quad \text{kde} \quad \mathcal{M}_{k-1} = \overline{\text{sp}}\{Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1}\}.$$

Přitom existují taková $\phi_{k-1} = (\phi_{k-1,1}, \dots, \phi_{k-1,k-1})'$, že platí

$$\hat{Y}_t = \phi_{k-1,1}Y_{t-1} + \dots + \phi_{k-1,k-1}Y_{t-k+1}$$

a také taková $\psi_{k-1} = (\psi_{k-1,1}, \dots, \psi_{k-1,k-1})'$, že platí

$$\hat{Y}_{t-k} = \psi_{k-1,1}Y_{t-k+1} + \dots + \psi_{k-1,k-1}Y_{t-1},$$

která minimalizují

$$E(Y_t - \hat{Y}_t)^2 \quad \text{resp.} \quad E(Y_{t-k} - \hat{Y}_{t-k})^2,$$

přičemž (jak již víme z důkazu Durbin-Levinsonova algoritmu) platí

$$\phi_{k-1,1} = \psi_{k-1,1}, \dots, \phi_{k-1,k-1} = \psi_{k-1,k-1} \quad \text{tj.} \quad \phi_{k-1} = \psi_{k-1}.$$

Celkově tedy, označíme-li

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{k-1}^* &= (Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1})' \\ \mathbf{Y}_{k-1} &= (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1})'\end{aligned}$$

tak dostaneme

$$\begin{aligned}P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_{t-k}) &= \phi_{k-1}' \mathbf{Y}_{k-1}^* \\ P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_t) &= \phi_{k-1}' \mathbf{Y}_{k-1}\end{aligned}$$

Víme, že pokud pro autokovarianční funkci $\gamma(h)$ platí $\gamma(0) > 0$ a $\gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$, pak matice $\mathbf{\Gamma}_{k-1}$ je regulární a neznámé složky vektoru ϕ_{k-1} jsou rovny

$$\phi_{k-1} = \mathbf{\Gamma}_{k-1}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{k-1}.$$

Avšak podle důsledku 1.5.2 Durbin-Levinsonova algoritmu není třeba počítat inverzní matici $\mathbf{\Gamma}_{k-1}^{-1}$, odtud ϕ_{k-1} , následně $\hat{Y}_{t-k} = P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_{t-k})$ a $\hat{Y}_t = P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_t)$ a nakonec korelační koeficient $\alpha(k) = R(Y_t - \hat{Y}_t, Y_{t-k} - \hat{Y}_{t-k})$, neboť platí

$$\boxed{\alpha(k) = \phi_{k,k} = R(Y_t - P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_t), Y_{t-k} - P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_{t-k}))}.$$

Shrneme-li předchozí, pak podle **definice**

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\text{Forward}} & \\
 & & \mathcal{M}_{k-1} = \overline{\text{sp}}\{Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1}\} \\
 \boxed{Y_{t-k}} & & \underbrace{Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1}} & & \boxed{Y_t} \\
 r_{t-k}^{(F)} = Y_{t-k} - P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_{t-k}) & & & & r_t^{(B)} = Y_t - P_{\mathcal{M}_{k-1}}(Y_t)
 \end{array}$$

$$\boxed{\alpha(k) = R(r_{t-k}^{(F)}, r_t^{(B)})}$$

a podle **důsledku Durbin-Levinsonova algoritmu**

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M}_k = \overline{\text{sp}}\{Y_{t-k}, Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1}\} & \\
 \boxed{Y_{t-k}}, & \underbrace{Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1}} & \boxed{Y_t} \\
 \boxed{\alpha(k) = \phi_{k,k}}, & \text{kde} & \hat{Y}_t = P_{\mathcal{M}_k}(Y_t) = \phi_{n,1}Y_{t-1} + \dots + \underbrace{\phi_{k,k}}_{=\alpha(k)} Y_{t-k}
 \end{array}$$

1.7 Inovační algoritmus

Základní myšlenkou Durbin-Levinsonova algoritmu je rozdělení

$$\mathcal{M}_n = \overline{\text{sp}}\{Y_n, \dots, Y_1\}$$

na dva ortogonální podprostory

$$\mathcal{M}_{n-1} = \overline{\text{sp}}\{Y_n, \dots, Y_2\} \quad \text{a} \quad \mathcal{M}_{n-1}^\perp = \overline{\text{sp}}\{Y_1 - P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_1)\}.$$

Následující rekurentní algoritmus spočívá v dekompozici \mathcal{M}_n na n ortogonálních Hilbertových podprostorů pomocí Gram-Schmidtova algoritmu.

Rekurentní algoritmus lze aplikovat nejen na stacionární procesy, ale obecně na procesy s **konečnými druhými momenty**. Pro jednoduchost předpokládejme, že jsou centrované. Nejprve zavedme následující značení:

$$\gamma(i, j) = EX_i X_j.$$

Stejně označme

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \overline{\text{sp}}\{Y_n, \dots, Y_1\} \\ v_n &= \left\| Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \right\|^2. \end{aligned}$$

Pokud označíme

$$\hat{Y}_n = \begin{cases} 0 (= \mu_Y) & \text{pro } n = 1 \\ P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_n) & \text{pro } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

pak zřejmě

$$\mathcal{M}_n = \overline{\text{sp}}\{Y_n - \hat{Y}_n, \dots, Y_1 - \hat{Y}_1\} \quad n \geq 1.$$

Definujme tzv. **inovaci** vztahem

$$U_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = Y_{n+1} - \sum_{j=1}^n \phi_{n,j} Y_{n+1-j}.$$

Označme

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n &= (U_1, \dots, U_n)' \\ \mathbf{Y}_n &= (Y_1, \dots, Y_n)' \\ \hat{\mathbf{Y}}_n &= (\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n)'. \end{aligned}$$

Pak lze psát

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{Y}_n,$$

kde matice \mathbf{A}_n je dolní trojúhelníkovou maticí

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\phi_{1,1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\phi_{2,2} & -\phi_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{n-2,n-2} & -\phi_{n-2,n-3} & \dots & -\phi_{n-2,1} & 1 & 0 \\ -\phi_{n-1,n-1} & -\phi_{n-1,n-2} & \dots & \dots & -\phi_{n-1,1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že determinant matice je roven 1, takže existuje inverzní matice

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{A}_n^{-1},$$

která je také dolní trojúhelníkovou maticí. Upravujme postupně

$$\hat{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{Y}_n - \mathbf{U}_n = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_n = (\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{U}_n - \mathbf{I}_n) \mathbf{U}_n = \boldsymbol{\theta}_n \mathbf{U}_n,$$

kde

$$\boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n-2,n-2} & \theta_{n-2,n-3} & \cdots & \theta_{n-2,1} & 0 & 0 \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \cdots & \cdots & \theta_{n-1,1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$\hat{\mathbf{Y}}_n = \boldsymbol{\theta}_n \mathbf{U}_n = \boldsymbol{\theta}_n (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)$$

a protože $\boldsymbol{\theta}_n$ je dolní trojúhelníkovou maticí, můžeme psát

$$\hat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Věta 1.7.1 (Inovační algoritmus).

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je centrovaný náhodný proces s konečnými druhými momenty, přičemž kovarianční matice $(EY_i Y_j)_{i,j=1}^n = (\gamma(i, j))_{i,j=1}^n$ je regulární pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak pro jednokrokovou predikci platí následující rekurentní vztahy

$$\hat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

$$v_0 = \gamma(1, 1) \quad (1.9)$$

$$\theta_{n,n-k} = v_k^{-1} \left[\gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \right] \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (1.10)$$

$$v_n = \gamma(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j \quad (1.11)$$

DŮKAZ. Tvrzení (1.8) jsem dokázali již v předchozím textu. Pro $n \geq 1$ provedme následující přeindexování:

$$\begin{aligned} \boxed{\hat{Y}_{n+1}} &= \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) \\ &= \theta_{n,1} (Y_n - \hat{Y}_n) + \cdots + \theta_{n,n} (Y_1 - \hat{Y}_1) \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{n,n-k} (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1})} \end{aligned}$$

Pro $k = 0, 1, \dots, n - 1$ vynásobme obě strany předchozí rovnice výrazem $(Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1})$ a vypočítejme střední hodnoty obou stran rovnic. Dostaneme:

$$E \left[\hat{Y}_{n+1} (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1}) \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} E (Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1}) (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1})$$

nebo ekvivalentně pomocí skalárních součinů:

$$\begin{aligned} \langle \hat{Y}_{n+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle &= \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} \langle Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle \\ &= \theta_{n,n-k} \langle Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle \\ &= \theta_{n,n-k} \left\| Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \right\|^2 \\ &= \theta_{n,n-k} v_k, \end{aligned}$$

s využitím vztahů

$$\langle Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle = 0 \quad \text{pro} \quad j \neq k.$$

Dále díky tomu, že pro $n > k$

$$\langle Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle = 0,$$

dostáváme

$$\langle \hat{Y}_{n+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle = \langle Y_{n+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle = \theta_{n,n-k} v_k.$$

Dále upravujeme

$$\begin{aligned} \theta_{n,n-k} v_k &= \langle Y_{n+1}, Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} \rangle = \underbrace{\langle Y_{n+1}, Y_{k+1} \rangle}_{=\gamma(n+1,k+1)} - \langle Y_{n+1}, \hat{Y}_{k+1} \rangle \\ &= \gamma(n+1, k+1) - \left\langle Y_{n+1}, \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} (Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1}) \right\rangle \\ &= \gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \underbrace{\langle Y_{n+1}, Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1} \rangle}_{=\theta_{n,n-j} v_j} \\ &= \gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \end{aligned}$$

Odtud jednoduchou úpravou dostaneme tvrzení (1.10):

$$\boxed{\theta_{n,n-k} = v_k^{-1} \left[\gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \right]}.$$

Nakonec díky tomu, že

$$\langle \hat{Y}_{n+1}, Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \rangle = 0,$$

pak s využitím Pythagorovy věty dostaneme

$$\underbrace{\|Y_{n+1}\|^2}_{=\gamma(n+1,n+1)} = \left\| \left(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \right) + \hat{Y}_{n+1} \right\|^2 = \underbrace{\|Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}\|^2}_{=v_n} + \|\hat{Y}_{n+1}\|^2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \boxed{v_n} &= \gamma(n+1, n+1) - \langle \hat{Y}_{n+1}, \hat{Y}_{n+1} \rangle \\ &= \gamma(n+1, n+1) - \left\langle \hat{Y}_{n+1}, \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} (Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1}) \right\rangle \\ &= \gamma(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} \underbrace{\langle \hat{Y}_{n+1}, Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1} \rangle}_{=\theta_{n,n-j}v_j} \\ &= \boxed{\gamma(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j} \end{aligned}$$

čímž jsme dokázali poslední tvrzení (1.11). □

POZNÁMKA 1.7.2.

Zatímco **Durbin-Levinsův algoritmus** dává koeficienty $\phi_{n,j}$ v reprezentaci

$$\hat{Y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{n,j} Y_{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{n,n-j} Y_{j+1},$$

inovační algoritmus dává koeficienty $\theta_{n,j}$ v ortogonálním rozvoji

$$\hat{Y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} (Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1}).$$

POZNÁMKA 1.7.3.

Inovační algoritmus dává „inovační reprezentaci“ samotných Y_{n+1} , neboť platí

$$\boxed{\mathbf{Y}_n} = \mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n + \hat{\mathbf{Y}}_n = (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n) + (\mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n)(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n) = \boxed{\mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)}.$$

a položíme-li $\theta_{n,0} = 1$, můžeme psát

$$Y_{n+1} = \sum_{j=0}^n \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) = \sum_{j=0}^n \theta_{n,n-j} (Y_{j+1} - \hat{Y}_{j+1}).$$

Tyto vztahy využijeme později při odvozování maximálně věrohodných odhadů neznámých parametrů $\theta_{n,j}$.

1.8 Výstavba modelů v B-J metodologii

1.8.1 Odhady v ARMA procesech

Určení vhodného $ARMA(p, q)$ modelu pro danou realizaci stacionárního procesu $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ v sobě zahrnuje celou řadu problémů

1. výběr řádu modelu p a q , tj. provést identifikaci modelu;
2. odhad parametrů $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ a σ_ε^2 ;
3. ověření vhodnosti modelu.

Identifikace modelu je první fází výstavby modelu a jejím úkolem je rozhodnout, jaký typ modelu vybrat (tj. zda AR, MA nebo ARMA) a explicitně určit řád modelu. Před vlastní identifikací se doporučuje provést některé z následujících přípravných operací:

1. Pořídít grafický záznam řady.
2. Pokud střední hodnota je nenulová, provést odhad střední hodnoty a následně provést centrování.

VLASTNÍ IDENTIFIKACE PROCESU

Identifikace procesu se provádí na základě zkoumání průběhu

- odhadnuté autokorelační funkce ACF

$$r(k) = \hat{\rho}(k);$$

- a parciální autokorelační funkce PACF

$$a(k) = \hat{\alpha}(k).$$

Snažíme se především zjistit existenci případného identifikačního bodu k_0 . Je však nutné mít na paměti, že pracujeme pouze s odhadnutými hodnotami $r(k)$ a $a(k)$, takže naše závěry mohou být někdy dost zkreslené. Doporučuje se proto netrvat na jednoznačné identifikaci určitého modelu, ale přijmout a přezkoušet několik alternativ.

	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p, q)$
ACF $\rho(k)$	neexistuje k_0 ve tvaru „U“	$k_0 = q$	neexistuje k_0 po $q - p$ hodnotách je ve tvaru „U“
PACF $\alpha(k)$	$k_0 = p$	neexistuje k_0 omezena křivkou „U“	neexistuje k_0 po $p - q$ hodnotách je omezena křivkou „U“

Identifikační bod k_0 je index, pro nějž platí: $\forall k > k_0$ je $\rho(k) = 0$ (resp. $\alpha(k) = 0$).

Křivka „U“ je křivka ve tvaru lineární kombinace klesajících geometrických posloupností a sinusoid s geometricky klesající amplitudou.

1.8.2 Yuleovy-Walkerovy rovnice a odhad parametrů v $AR(p)$

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je centrováný kauzální autoregresní proces

$$\boxed{AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Vraťme se k Yuleovým-Walkerovým rovnicím

$$\underbrace{\rho(0)}_{=1} = \varphi_1\rho(1) + \dots + \varphi_p\rho(p) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma(0)} \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) [1 - \varphi_1\rho(1) - \dots - \varphi_p\rho(p)]$$

$$\rho(k) = \varphi_1\rho(k-1) + \dots + \varphi_p\rho(k-p) \quad k \geq 1$$

Označíme-li

$$\hat{\mathbf{R}}_p = (\hat{\rho}(i-j))_{i,j=1}^p \quad \hat{\boldsymbol{\rho}}_p = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(p))'$$

$$\boldsymbol{\phi}_p = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)' \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_p = (\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p)'$$

a v Yuleových-Walkerových rovnicích nahradíme $\rho(k)$ odpovídajícími odhady $\hat{\rho}(k)$, pak (pokud

$\hat{\gamma}(0) > 0$) dostaneme tzv. **Yuleovy-Walkerovy odhady**:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\phi}}_p &= \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}_p \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \hat{\gamma}(0) \left(1 - \hat{\boldsymbol{\rho}}_p' \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}_p\right) \end{aligned}}$$

Věta 1.8.1.

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je centrováný kauzální autoregresní proces $AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t$, kde $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a $\hat{\boldsymbol{\phi}}_p$ je Yuleovův-Walkerův odhad $\boldsymbol{\phi}_p = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)'$, pak platí

$$\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p) \overset{A}{\rightsquigarrow} N_p(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1}),$$

kde $\boldsymbol{\Gamma}_p = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^p$. Kromě toho platí $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \xrightarrow{P} \sigma_\varepsilon^2$.

DŮKAZ. viz Brockwell, Davis (1987), str. 255-257. \square

Z předchozích tvrzení plyne, že odhady získané řešením Yuleových-Walkerových rovnic jsou asymptoticky nestranné a lze pro ně konstruovat asymptotické intervaly spolehlivosti.

V praktických situacích však skutečný řád p autoregresního procesu neznáme. V tom případě se využijí tvrzení následující věty.

Věta 1.8.2.

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je centrováný kauzální autoregresní proces $AR(p) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t$, kde $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_m = (\hat{\phi}_{m,1}, \dots, \hat{\phi}_{m,m})' = \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}_m, \quad m > p,$$

pak platí

$$\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\phi}}_m - \boldsymbol{\phi}_m) \overset{A}{\rightsquigarrow} N_m(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{\Gamma}_m^{-1}),$$

kde $\boldsymbol{\Gamma}_m = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^m$, $\boldsymbol{\phi}_m$ jsou koeficienty nejlepší lineární predikce $\hat{Y}_{m+1} = \mathcal{P}_{\overline{\text{sp}}\{Y_m, \dots, Y_1\}}(Y_{m+1}) = \boldsymbol{\phi}_m \mathbf{Y}_m$, kde $\mathbf{Y}_m = (Y_m, \dots, Y_1)'$, tj. $\boldsymbol{\phi}_m = \mathbf{R}_m^{-1} \boldsymbol{\rho}_m$, kde $\mathbf{R}_m = (\rho(i-j))_{i,j=1}^m$. Speciálně pro $\boxed{m > p}$ platí $\boxed{\sqrt{n} \hat{\phi}_{m,m} \overset{A}{\rightsquigarrow} N(0, 1)}$.

DŮKAZ. viz Brockwell, Davis (1987), str. 255-257. \square

1.8.3 Předběžné odhady v $AR(p)$ a Durbin-Levinsův algoritmus.

Předpokládejme, že máme k dispozici pozorování

$$y_1, \dots, y_n$$

centrované stacionární posloupnosti

$$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim AR(m) : \Phi(B)Y_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Za předpokladu, že $\hat{\gamma}(0) > 0$, pak můžeme odhadnout neznámé parametry autoregresního modelu řádu $m < n$ pomocí Yuleových-Walkerových rovnic. Odhadnutý $AR(m)$ proces je tvaru

$$Y_t - \hat{\phi}_{m,1}Y_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_{m,m}Y_{t-m} = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \hat{v}_m),$$

kde

$$\hat{\Phi}_m = (\hat{\phi}_{m,1}, \dots, \hat{\phi}_{m,m})' = \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \hat{\rho}_m$$

$$\hat{v}_m = \hat{\gamma}(0) \left(1 - \hat{\rho}_m' \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \hat{\rho}_m\right).$$

Jestliže $\hat{\gamma}(0) > 0$, pak $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots$ nejsou singulární a můžeme využít Durbin-Levinsův algoritmus pro postupné odhady autoregresních koeficientů $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ a odhady variability bílého šumu $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots$

Věta 1.8.3 (Durbin-Levinsův algoritmus).

Jestliže $\hat{\gamma}(0) > 0$, pak parametry $\hat{\phi}_{m,1}, \dots, \hat{\phi}_{m,m}$ a \hat{v}_m autoregresního modelu

$$Y_t - \hat{\phi}_{m,1}Y_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_{m,m}Y_{t-m} = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \hat{v}_m),$$

pro $m = 1, \dots, n-1$ lze získat rekurzivně ze vztahů

$$\hat{\phi}_{1,1} = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \hat{\rho}(1) \quad v_0 = \hat{\gamma}(0) \quad (1.12)$$

$$\hat{\phi}_{m,m} = \left[\hat{\gamma}(m) - \hat{\Phi}_{m-1}' \hat{\gamma}_{m-1} \right] / \hat{v}_{m-1} \quad (1.13)$$

$$\hat{\Phi}_m^{(1)} = \hat{\Phi}_{m-1} - \hat{\phi}_{m,m} \hat{\Phi}_{m-1}^* \quad \hat{v}_m = \hat{v}_{m-1} \left(1 - \hat{\phi}_{m,m}^2\right) \quad (1.14)$$

kde

$$\hat{\Phi}_{m-1} = (\hat{\phi}_{m-1,1}, \dots, \hat{\phi}_{m-1,m-1})' \quad \hat{\Phi}_{m-1}^* = (\hat{\phi}_{m-1,m-1}, \dots, \hat{\phi}_{m-1,1})'$$

$$\hat{\Phi}_m = (\hat{\phi}_{m,1}, \dots, \hat{\phi}_{m,m-1}, \hat{\phi}_{m,m})' \quad \hat{\Phi}_m^{(1)} = (\hat{\phi}_{m,1}, \dots, \hat{\phi}_{m,m-1})'$$

1.8.4 Předběžné odhady v $MA(q)$ a inovační algoritmus.

Jestliže chceme na základě pozorování y_1, \dots, y_n centrované stacionární posloupnosti provést odhad $MA(m)$ ($m = 1, 2, \dots, n - 1$) ve tvaru

$$Y_t = \varepsilon_t + \hat{\theta}_{m,1}\varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_{m,m}\varepsilon_{t-m} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \hat{v}_m),$$

můžeme využít inovační algoritmus.

Věta 1.8.4 (Odhady parametrů MA procesů pomocí inovačního algoritmu).

Jestliže $\hat{\gamma}(0) > 0$, pak odhady parametrů MA procesů lze provést pomocí následujících rekurentních vztahů

$$\begin{aligned} \hat{v}_0 &= \hat{\gamma}(0) \\ \hat{\theta}_{m,m-k} &= \hat{v}_k^{-1} \left[\hat{\gamma}(m-k) - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\theta}_{m,k-j} \hat{\theta}_{m,m-j} \hat{v}_j \right] \quad k = 0, \dots, m-1 \\ \hat{v}_m &= \hat{\gamma}(0) - \sum_{j=0}^{m-1} \hat{\theta}_{m,m-j}^2 \hat{v}_j \end{aligned}$$

Označme

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \left(\hat{\theta}_{m,1}, \dots, \hat{\theta}_{m,m} \right)'$$

Uvedeme nyní větu, která platí obecně pro $ARMA(p, q)$ proces. Připomeňme, že pro $MA(q)$ proces jsou $\psi_1 = \theta_1, \dots, \psi_q = \theta_q$ a $\psi_j = 0$ pro $j > q$.

Věta 1.8.5 (Asymptotické vlastnosti inovačních odhadů $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$).

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní $ARMA$ proces $\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $E\varepsilon_t^4 < \infty$ a $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$, $|z| \leq 1$. Pak pro libovolnou posloupnost kladných celých čísel $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $m < n$, $m \rightarrow \infty$ a $m = o\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$, když $n \rightarrow \infty$, pro každé k platí

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{m,1} - \psi_1, \hat{\theta}_{m,2} - \psi_2, \dots, \hat{\theta}_{m,k} - \psi_k \right)' \stackrel{A}{\sim} N_k(\mathbf{0}, \mathbf{A}),$$

kde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ a

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} \psi_{i-r} \psi_{j-r}.$$

Kromě toho platí

$$\hat{v}_m \xrightarrow{P} \sigma_\varepsilon^2.$$

DŮKAZ. viz Brockwell, Davis (1987), str. 239. □

I když rekurentní odhady koeficientů MA procesů pomocí inovačního algoritmu jsou analogické jako rekurentní odhady koeficientů AR procesů pomocí Durbin-Levinsonova algoritmu, je

mezi nimi přece jen jistý rozdíl. Pro odhady $\hat{\phi}_p = (\hat{\phi}_{p,1}, \dots, \hat{\phi}_{p,p})'$ pomocí Durbin-Levinsonova algoritmu platí

$$\hat{\phi}_p \xrightarrow{P} \phi_p,$$

avšak odhady $\hat{\theta}_q = (\hat{\theta}_{q,1}, \dots, \hat{\theta}_{q,q})'$ nekonvergují podle pravděpodobnosti k θ_q . Ke konvergenci podle pravděpodobnosti je třeba odhad $(\hat{\theta}_{m,1}, \dots, \hat{\theta}_{m,q})'$, kde posloupnost $\{m(n)\}_{n=1}^\infty$ splňuje podmínky předchozí věty. Výběr m (maximálně až do $\frac{n}{4}$) pro výběr pevné délky se volí tak, aby odhady $(\hat{\theta}_{m,1}, \dots, \hat{\theta}_{m,q})'$ se stabilizovaly.

1.8.5 Předběžné odhady v $ARMA(p, q)$ procesu.

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní $ARMA$ proces

$$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim ARMA(p, q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Z kauzality vyplývá, že existuje posloupnost $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ taková, že $\sum_{j=0}^\infty |\psi_j| < \infty$ a platí $Y_t = \sum_{j=0}^\infty \psi_j \varepsilon_{t-j}$, tj. pro $|z| \leq 1$ dostáváme $\Psi(z) = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \Rightarrow \Phi(z)\Psi(z) = \Theta(z)$.

Koeficienty $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ se určí ze vztahu

$$(1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \dots - \varphi_p z^p)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots) = (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q)$$

porovnáním koeficientů u mocnin proměnné z , tj.

$$\begin{aligned} z^0 : \psi_0 &= 1 & \Rightarrow \psi_0 &= 1 \\ z^1 : \psi_1 - \varphi_1 \psi_0 &= \theta_1 & \Rightarrow \psi_1 &= \theta_1 + \varphi_1 \\ z^2 : \psi_2 - \varphi_1 \psi_1 - \varphi_2 \psi_0 &= \theta_2 & \Rightarrow \psi_2 &= \theta_2 + \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \\ z^3 : \psi_3 - \varphi_2 \psi_1 - \varphi_1 \psi_2 - \varphi_3 \psi_0 &= \theta_3 & \Rightarrow \psi_3 &= \theta_3 + \varphi_2 \psi_1 + \varphi_1 \psi_2 + \varphi_3 \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Obecně, položíme-li $\theta_j = 0$ pro $j > q$ dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_j &= \theta_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \varphi_i \psi_{j-i} \end{aligned}} \quad j = 1, 2, \dots$$

Za **předběžné odhady** $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{p+q}$ použijeme inovační odhady $\hat{\theta}_{m,1}, \dots, \hat{\theta}_{m,p+q}$, jejichž asymptotické vlastnosti dává předchozí věta. Takže dostáváme

$$\boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{v}_m}$$

a

$$\boxed{\hat{\theta}_{m,j} = \theta_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \varphi_i \hat{\theta}_{m,j-i}} \quad j = 1, 2, \dots, p+q.$$

Nejprve uvažujeme rovnice pro $j = q+1, \dots, p+q$, ve kterých $\theta_j = 0$, které maticově vyjádříme takto

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_{m,q+1} \\ \hat{\theta}_{m,q+2} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{m,q+p-1} \\ \hat{\theta}_{m,q+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{m,q} & \hat{\theta}_{m,q-1} & \cdots & \cdots & \hat{\theta}_{m,q+1-p} \\ \hat{\theta}_{m,q+1} & \hat{\theta}_{m,q} & \hat{\theta}_{m,q-1} & \cdots & \hat{\theta}_{m,q+2-p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_{m,q+p-2} & \cdots & \hat{\theta}_{m,q+1} & \hat{\theta}_{m,q} & \hat{\theta}_{m,q-1} \\ \hat{\theta}_{m,q+p-1} & \cdots & \cdots & \hat{\theta}_{m,q+1} & \hat{\theta}_{m,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{p-1} \\ \varphi_p \end{pmatrix}.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme odhady $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p$. Nakonec získáme odhady $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q$ ze vztahů

$$\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_{m,j} - \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \hat{\varphi}_i \hat{\theta}_{m,j-i} \quad j = 1, \dots, q.$$

POZNÁMKA 1.8.6.

Pro $MA(q)$ platí $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_{m,j}$, neboť $p = 0$.

1.8.6 Maximálně věrohodné odhady.

Předpokládejme, že $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **Gaussovský proces** s nulovou střední hodnotou a kovarianční funkcí

$$\gamma(i, j) = EX_i X_j.$$

Označme

$$\mathbf{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)' \quad \text{a} \quad \mathbf{\Gamma}_n = (\gamma(i, j))_{i,j=1}^n.$$

Věrohodnostní funkce náhodného vektoru \mathbf{Y}_n je tvaru

$$L(\mathbf{\Gamma}_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{\Gamma}_n|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{Y}_n' \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{Y}_n\right\}.$$

Dále označme

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_n, \dots, Y_1\}$$

a

$$\hat{Y}_n = \begin{cases} 0 (= \mu_Y) & \text{pro } n = 1 \\ P_{\mathcal{M}_{n-1}}(Y_n) & \text{pro } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

pak zřejmě

$$\mathcal{M}_n = \overline{sp}\{Y_n - \hat{Y}_n, \dots, Y_1 - \hat{Y}_1\} \quad n \geq 1.$$

Pro nejlepší lineární predikce použijme inovační algoritmus, podle kterého

$$\hat{Y}_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

příčemž střední kvadratickou chybu označme

$$v_n = \left\| Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \right\|^2.$$

Označíme-li

$$\hat{\mathbf{Y}}_n = (\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n)'$$

a

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n-2,n-2} & \theta_{n-2,n-3} & \cdots & \theta_{n-2,1} & 1 & 0 \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \cdots & \cdots & \theta_{n-1,1} & 1 \end{pmatrix},$$

pak můžeme psát

$$\hat{\mathbf{Y}}_n = (\mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n)(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n).$$

Postupně upravujeme

$$\boxed{\mathbf{Y}_n} = \mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n + \hat{\mathbf{Y}}_n = (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n) + (\mathbf{C}_n - \mathbf{I}_n)(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n) = \boxed{\mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)}.$$

Tento výsledek použijme při vyjádření varianční matice

$$\mathbf{\Gamma}_n = E\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_n' = E\left[\mathbf{C}_n(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)'\mathbf{C}_n'\right] = \mathbf{C}_n E\left[(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)'\right]\mathbf{C}_n'.$$

Nyní počítejme

$$\begin{aligned} & E\left[(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)(\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)'\right] \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{E(Y_1 - \hat{Y}_1)^2}_{v_0} & \underbrace{E(Y_1 - \hat{Y}_1)(Y_2 - \hat{Y}_2)}_{=0} & \cdots & \underbrace{E(Y_1 - \hat{Y}_1)(Y_n - \hat{Y}_n)}_{=0} \\ \underbrace{E(Y_2 - \hat{Y}_2)(Y_1 - \hat{Y}_1)}_{=0} & \underbrace{E(Y_2 - \hat{Y}_2)^2}_{v_1} & \cdots & \underbrace{E(Y_2 - \hat{Y}_2)(Y_n - \hat{Y}_n)}_{=0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{E(Y_n - \hat{Y}_n)(Y_1 - \hat{Y}_1)}_{=0} & \cdots & \underbrace{E(Y_n - \hat{Y}_n)(Y_{n-1} - \hat{Y}_{n-1})}_{=0} & \underbrace{E(Y_n - \hat{Y}_n)^2}_{v_{n-1}} \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}\{v_0, \dots, v_{n-1}\} = \mathbf{D}_n. \end{aligned}$$

Takže

$$\boxed{\mathbf{\Gamma}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n'}.$$

Počítejme dále

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{Y}_n' \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{Y}_n} &= (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)' \mathbf{C}_n' [\mathbf{C}_n \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n']^{-1} \mathbf{C}_n (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n) \\ &= (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)' \mathbf{C}_n' (\mathbf{C}_n')^{-1} \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{C}_n (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n) \\ &= (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n)' \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \hat{\mathbf{Y}}_n) \\ &= \boxed{\sum_{j=1}^n \frac{(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{v_{j-1}}}. \end{aligned}$$

Dále zřejmě platí

$$\boxed{|\mathbf{\Gamma}_n|} = |\mathbf{C}_n \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n'| = \underbrace{|\mathbf{C}_n|}_{=1} |\mathbf{D}_n| \underbrace{|\mathbf{C}_n'|}_{=1} = \boxed{v_0 v_1 \cdots v_{n-1}}.$$

Takže věrohodnostní funkce náhodného vektoru \mathbf{Y}_n je tvaru

$$\boxed{L(\mathbf{\Gamma}_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (v_0 v_1 \cdots v_{n-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{v_{j-1}}\right\}}.$$

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní *ARMA* proces

$$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim \text{ARMA}(p, q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Ukazuje se (viz Brockwell, Davis (1978), str. 168/170), že k velkému zjednodušení jednokrokové predikce dojde, pokud inovační algoritmus aplikujeme ne na Y_t , ale na následující transformovaný proces

$$W_t = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^{-1} Y_t & t = 1, \dots, m; \quad m = \max(p, q) \\ \sigma_\varepsilon^{-1} \Phi(B) Y_t & t > m. \end{cases}$$

Poznamenejme nejprve, že zřejmě

$$\overline{sp}\{Y_1, \dots, Y_n\} = \overline{sp}\{W_1, \dots, W_n\} \quad n \geq 1.$$

Označme

$$\widehat{W}_{j+1} = \begin{cases} 0 = \hat{Y}_1 & j = 0, \\ P_{\overline{sp}\{W_1, \dots, W_j\}} W_{j+1} & j \geq 1. \end{cases}$$

Pak platí

$$\widehat{W}_t = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^{-1} \hat{Y}_t & t = 1, \dots, m; \quad m = \max(p, q), \\ \sigma_\varepsilon^{-1} [\hat{Y}_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \dots - \varphi_p Y_{t-p}] & t > m, \end{cases}$$

takže

$$Y_t - \hat{Y}_t = \sigma_\varepsilon (W_t - \widehat{W}_t).$$

Při aplikaci inovačního algoritmu na W_t dostaneme $\theta_{n,j}$ a střední kvadratické chyby, které označme r_j .

Pak z předchozích vztahů vyplývá, že platí

$$\hat{Y}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) & 1 \leq n < m, \\ \varphi_1 Y_n + \dots + \varphi_p Y_{n+1-p} + \sum_{j=1}^q \theta_{n,j} (Y_{n+1-j} - \hat{Y}_{n+1-j}) & n \geq m. \end{cases}$$

a

$$v_n = E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2 = \sigma_\varepsilon^2 E(W_{n+1} - \widehat{W}_{n+1})^2 = \sigma_\varepsilon^2 r_n.$$

Takže věrohodnostní funkce náhodného vektoru \mathbf{Y}_n je tvaru

$$L(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} (r_0 r_1 \dots r_{n-1})^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \frac{(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{r_{j-1}} \right\}.$$

Pokud položíme

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = 0,$$

a budeme předpokládat, že \hat{Y}_j a r_j jsou nezávislé na σ_ε^2 , dostaneme

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} S(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

kde

$$S(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{j=1}^n \frac{(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{r_{j-1}}$$

a $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ a $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ jsou hodnoty, které minimalizují tzv. **redukováný logaritmus věrohodnostní funkce**

$$l(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \ln \left(\frac{1}{n} S(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln r_{j-1}.$$

POZNÁMKA 1.8.7.

Alternativou k maximalizaci $L(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2)$ je **minimalizace váženého součtu čtverců**

$$S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n \frac{(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{r_{j-1}},$$

přičemž

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-p-q} S(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$$

a platí

$$\frac{S(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\tilde{\sigma}_\varepsilon^2} \stackrel{A}{\sim} \chi^2(n-p-q).$$

(viz Brockwell, Davis (1987), §8.9).

Takto získané odhady se nazývají **odhady metodou nejmenších čtverců**, což vede k systému nelineárních rovnic.

Pokud chceme zkoumat **asymptotické vlastnosti maximálně věrohodných odhadů**, musíme zesílit předpoklady: necht' $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální a invertibilní *ARMA* proces

$$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim ARMA(p, q) : \Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

a necht' $\Phi(z)$ a $\Theta(z)$ nemají společné kořeny.

Pak, označíme-li maximálně věrohodný odhad neznámých parametrů

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\theta}', \sigma_\varepsilon^2)'$$

symbolem

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} = (\hat{\boldsymbol{\phi}}', \hat{\boldsymbol{\theta}}', \hat{\sigma}_\varepsilon^2)',$$

platí

$$\sqrt{n} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta} \right) \stackrel{A}{\sim} N_{n+p+1}(\mathbf{0}, V(\boldsymbol{\beta})),$$

kde

$$V(\boldsymbol{\beta}) = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} EU_t \mathbf{U}_t' & EU_t \mathbf{V}_t' \\ E\mathbf{V}_t \mathbf{U}_t' & E\mathbf{V}_t \mathbf{V}_t' \end{pmatrix}^{-1},$$

přičemž

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t &= (U_t, \dots, U_{t+1-p})' \\ \mathbf{V}_t &= (V_t, \dots, V_{t+1-q})' \end{aligned}$$

a $\{U_t, t \in \mathbb{Z}\}$ i $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou autoregresní procesy

$$\begin{aligned} \Phi(B)U_t &= \varepsilon_t \\ \Theta(B)V_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

(viz Brockwell, Davis (1987), §8.9).

1.9 Výstavba modelů a predikce v ARIMA procesech

Až dosud jsme uvažovali pouze o procesech (slabě) stacionárních. Stacionární procesy se však v realitě vyskytují zřídka.

Rozlišují se dva druhy **nestacionarity**:

- ve střední hodnotě
- v rozptylu.

1.9.1 Procesy nestacionární ve střední hodnotě

Nyní je třeba si vysvětlit a odlišit pojmy

Deterministický trend ,

kdy **nestacionaritu ve střední hodnotě chápeme jako funkci času**, tj. k jeho modelování použijeme například

$$\text{polynomický trend } f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d$$

$$\text{periodický trend } f(t) = \mu + \sum_{j=1}^p (\alpha_j \cos \lambda_j t + \beta_j \sin \lambda_j t)$$

Stochastický trend . U procesů ARMA jsem požadovali, aby všechny kořeny

$$\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p$$

ležely vně jednotkové kružnice, tj. proces bude kauzální. Pokud nějaký kořen leží

- **na jednotkové kružnici** mluvíme o procesu nestacionárním se stochastickým trendem
- **vně jednotkové kružnice** mluvíme o procesu nestacionárním explozivního typu.

Nestacionární proces obsahující stochastický trend lze převést na stacionární **diferencováním**. Zavedme proto tzv. **diferenční operátor**:

$$\boxed{\Delta Y_t} = Y_t - Y_{t-1} = \boxed{(1 - B)Y_t}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta^2 Y_t} &= \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) \\ &= (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \end{aligned}$$

$$= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \boxed{(1 - B)^2 Y_t}$$

⋮

$$\boxed{\Delta^d Y_t} = \boxed{(1 - B)^d Y_t}$$

Nestacionární proces se stochastickým trendem nazýváme **integrovaným smíšeným modelem**

$$ARIMA(p, d, q)$$

Formálně jej zapíšeme pomocí operátoru zpětného chodu takto:

$$ARIMA(p, d, q) : \Phi(B)(1 - B)^d Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

a položíme-li

$$W_t = (1 - B)^d Y_t,$$

pak W_t je **stacionární ARMA**(p, q).

Zvláštní případy ARIMA(p, d, q)

p	d	q	Zkratka	Název
0			$IMA(d, q)$	Integrovaný proces klouzavých součtů
0	0		$MA(q)$	Proces klouzavých součtů
		0	$ARI(p, d)$	Integrovaný autoregresní proces
	0	0	$AR(p)$	Autoregresní proces
0		0	$I(d)$	Integrovaný proces
0	1	0	$I(1)$	Náhodná procházka (<i>random walk</i>)

NÁHODNÁ PROCHÁZKA: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim VW(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Proces náhodné procházky je limitním případem procesu $AR(1)$, kde $\varphi_1 = 1$.

Pro náhodnou procházku platí:

- Hodnoty $ACF = \rho(k)$ budou klesat velmi pomalu (lineárně).
- Hodnoty $PACF = \alpha(k)$ jsou logicky velmi podobné procesu $AR(1)$.

V praxi se používá obecnější tvar:

$$Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Potom, pokud budeme postupně upravovat, dostaneme

$$Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t = Y_{t-2} + 2\beta + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = \dots = \underbrace{Y_0 + \beta \cdot t}_{\text{deterministický lineární trend}} + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j.$$

POZNÁMKA 1.9.1.

Tvary $ACF = \rho(k)$ a $PACF = \alpha(k)$ procesů $ARIMA(p, d, q)$ a náhodné procházky $I(1)$ jsou **prakticky totožné**. Přítomnost jednotkových kořenů způsobuje „zakrytí“ prakticky všech identifikačních detailů těchto funkcí.

POZNÁMKA 1.9.2.

Operátor

$$\nu(B) = \Phi(B)(1 - B)^d$$

se někdy nazývá **zobecněný autoregresní operátor**.

Pokud $\nu(B)$ chápeme jako polynom v proměnné B , pak vzhledem ke kauzalitě modelu

$$(1 - B)^d W_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

má $\nu(B)$ právě p kořenů ležících vně jednotkového kruhu a d kořenů rovných 1.

V praxi se nejprve diferencováním časové řady získá stacionární řada W_t a pro ni se vybuduje proces $ARMA(p, q)$. Pokud jsme původně měli

$$Y_1, \dots, Y_n,$$

po diferencování zůstanou

$$W_{d+1}, \dots, W_n.$$

POZNÁMKA 1.9.3.

$ARIMA(p, d, q)$ nemá smysl centrovat, neboť platí:

$$\Delta^d(Y_t - \bar{Y}) = \Delta^d Y_t.$$

POZNÁMKA 1.9.4.

Kromě trendů vyžadujících stochastické modelování mohou ARIMA modely zachytit i čistě deterministické trendy, pokud provedeme takovéto **zobecnění ARIMA(p, d, q) modelů**:

$$ARIMA(p, d, q) : \Phi(B)(1 - B)^d Y_t = \beta + \Theta(B)\varepsilon_t \quad \beta \in \mathbb{R};$$

Pak této definici vyhovují procesy tvaru:

$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d}_{\text{polynomický trend řádu } d} + Y_t.$$

s využitím poznatků o diferencování polynomů lze totiž psát:

$$\Phi(B)(1 - B)^d(\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d + Y_t) = \underbrace{\Phi(B)(d!\beta_d)}_{\beta=(1-\varphi_1-\dots-\varphi_p)d!\beta_d} + \Phi(B)(1 - B)^d Y_t = \beta + \Theta(B)\varepsilon_t.$$

1.9.2 PROCESY NESTACIONÁRNÍ V ROZPTYLU

Není-li splněna podmínka **neměnnosti rozptylu v čase**, je proces **nestacionární v rozptylu**. Takovýto proces je ovšem třeba nejprve vhodně transformovat. Vysvětleme si stručně pojem **transformace stabilizující rozptyl**.

Situace nestabilního rozptylu nastává především v případě, kdy náhodná veličina Y_t má rozdělení, které závisí na jediném parametru ϑ_t , který obecně nemusí mít pro všechna t stejnou hodnotu. Předpokládejme, že tento parametr je zvolen tak, aby platilo

$$E_{\vartheta_t} Y_t = \vartheta_t.$$

Ve většině případů (ne však u normálního rozdělení) na ϑ_t závisí i rozptyl veličiny Y_t , takže můžeme psát

$$D_{\vartheta_t} Y_t = \sigma^2(\vartheta_t).$$

Přitom $\sigma(\vartheta_t)$ bývá obvykle hladká funkce proměnné ϑ_t .

Protože ϑ_t může souviset s časem t , není splněna podmínka neměnnosti rozptylu v čase. Vzniká tedy otázka, zda lze najít netriviální funkci g tak, aby náhodná veličina

$$Z_t = g(Y_t)$$

měla rozptyl nezávisící na ϑ_t . (Požadavkem netriviality se vylučují konstantní funkce g , které by vedly k veličinám s nulovým rozptylem).

Uvedená úloha v obecném případě nemá řešení. Používá se však určitých aproximací, které se ukázaly velmi užitečné.

Pokud se zabýváme jen dostatečně hladkými funkcemi g , z Taylorova rozvoje dostaneme aproximaci

$$g(Y_t) \approx g(\vartheta_t) + g'(\vartheta_t)(Y_t - \vartheta_t).$$

Potom střední hodnotu lze aproximovat takto

$$E_{\vartheta_t} g(Y_t) \approx E [g(\vartheta_t) + g'(\vartheta_t)(Y_t - \vartheta_t)] = g(\vartheta_t)$$

a rozptyl

$$D_{\vartheta_t} [g(Y_t)] \approx [g'(Y_t)]^2 D_{\vartheta_t} Y_t = [g'(\vartheta_t)]^2 \sigma^2(\vartheta_t).$$

Chceme, aby po transformaci byl rozptyl konstantní a nezávisel na střední hodnotě, tj.

$$c^2 = D_{\vartheta_t} [g(Y_t)] = [g'(\vartheta_t)]^2 \sigma^2(\vartheta_t) \quad \Rightarrow \quad g'(\vartheta_t) = \frac{c}{\sigma^2(\vartheta_t)},$$

kde c je nějaká konstanta. Odtud snadno dostaneme tvar transformace stabilizující rozptyl

$$g(\vartheta_t) = c \int \frac{1}{\sigma(\vartheta_t)} d\vartheta_t + K.$$

Konstanty c a K se volí tak, aby funkce g vypočtená podle předchozího vzorce měla výhodný tvar.

Ukázalo se, že funkce g vypočtená podle předchozího vzorce nejen výrazně stabilizuje rozptyl, takže rozptyl $D_{\vartheta_t} g(Y_t)$ závisí na ϑ_t jen velmi málo, ale zároveň také rozdělení náhodné veličiny $Z_t = g(Y_t)$ bývá již velmi blízké normálnímu, i když třeba samotné rozdělení veličiny Y_t je výrazně nenormální.

1.9.3 VOLBA ŘÁDU MODELU

Vhodná volba řádu modelu je důležitou součástí výstavby modelů v Box-Jenkinsonově metodologii.

K identifikaci typu modelu nám poslouží především průběh odhadnuté autokorelační funkce $ACF = \rho(k)$ a parciální autokorelační funkce $PACF = \alpha(k)$.

Formálnější přístup při rozhodování o výběru řádů p a q je však založen na jistých kritériálních funkcích.

Všimněme si nejprve kritériální funkce odvozené pro $AR(p)$ modely.

Odvození kritéria FPE (Final prediction error)

Mějme dvě nezávislé realizace

$$(X_1, \dots, X_n) \quad \text{a} \quad (Y_1, \dots, Y_n)$$

procesu $AR(p)$ s koeficienty

$$\boldsymbol{\phi}_p = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)'$$

Pomocí prvních realizací odvodíme maximálně věrohodné odhady

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_p = (\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p)'$$

Definujme

$$\mathbf{Y}_p = (Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_{n+1-p})'$$

a uvažujme jednokrokovou predikci

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\varphi}_1 Y_n + \dots + \hat{\varphi}_p Y_{n+1-p} = \hat{\boldsymbol{\phi}}_p' \mathbf{Y}_p.$$

Počítejme střední kvadratickou chybu této predikce:

$$\begin{aligned} \hat{v}_n &= E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2 = E(Y_{n+1} - \hat{\varphi}_1 Y_n - \dots - \hat{\varphi}_p Y_{n+1-p})^2 \\ &= E \left[\hat{Y}_{n+1} - \varphi_1 Y_n - \dots - \varphi_p Y_{n+1-p} - (\hat{\varphi}_1 - \varphi_1) Y_n - \dots - (\hat{\varphi}_p - \varphi_p) Y_{n+1-p} \right]^2 \\ &= E \left[\varepsilon_{n+1} - (\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p)' \mathbf{Y}_p \right]^2 \\ &= \underbrace{E \varepsilon_{n+1}^2}_{=\sigma_\varepsilon^2} + (\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p)' \underbrace{E \mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_p'}_{\boldsymbol{\Gamma}_p} (\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p) \end{aligned}$$

neboť

$$E(\varepsilon_{n+1} Y_{n-j}) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 0, \dots, p-1.$$

Protože

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p) \stackrel{A}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1})$$

nebo-li

$$(\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p) \stackrel{A}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1}).$$

Odtud dostaneme, že

$$\frac{n}{\sigma_\varepsilon^2} (\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p)' \boldsymbol{\Gamma}_p (\hat{\boldsymbol{\phi}}_p - \boldsymbol{\phi}_p) = \frac{n}{\sigma_\varepsilon^2} Z_p \stackrel{A}{\sim} \chi^2(p).$$

Protože platí

$$E\left(\frac{n}{\sigma_\varepsilon^2} Z_p\right) = p,$$

ihned dostaneme

$$EZ_p = \sigma_\varepsilon^2 \frac{p}{n}$$

a odtud

$$\hat{v}_n \approx \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{p}{n}\right).$$

Jestliže $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ je maximálně věrohodným odhadem neznámého parametru σ_ε^2 , pak pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$\frac{n\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} \overset{A}{\sim} \chi^2(n-p)$$

a protože

$$E\left(\frac{n\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right) = n-p,$$

pak

$$E\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{n-p}{n}\sigma_\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{n}{n-p}E\hat{\sigma}_\varepsilon^2.$$

Pokud ve výpočtu \hat{v}_n nahradíme σ_ε^2 jeho nestranným odhadem $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, dostaneme následující kritérium:

$$\boxed{FPE} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{n}{n-p} \left(1 + \frac{p}{n}\right) = \boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{n+p}{n-p}}.$$

Mnohem obecnějším kritériem, které není odvozeno pro $AR(p)$ proces, je tzv. **AIC kritérium**:

$$AIC = nl(\hat{\phi}_{pq}, \hat{\theta}_{pq}) + 2(p+q),$$

nebo jeho korigovaná verze (neboť AIC nadhodnocuje řád modelu)

$$AICC = -2 \ln L(\hat{\phi}_{pq}, \hat{\theta}_{pq}, S(\hat{\phi}_{pq}, \hat{\theta}_{pq})) + \frac{2(p+q+1)n}{n-p-q-2}.$$

Dalším kritériem je tzv. **BIC kritérium**:

$$BIC = (n-p-q) \ln \left(\frac{n\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n-p-q} \right) + (p+q) \ln \left[\frac{\sum Y_t^2 - n\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{p+q} \right].$$

1.9.4 Verifikace modelu – analýza reziduí

Po odhadu neznámých parametrů $ARMA(p, q)$ modelu metodou maximální věrohodnosti označme rezídua:

$$\widehat{W}_t = \frac{Y_t - \hat{Y}_t(\hat{\phi}, \hat{\theta})}{r_{t-1}(\hat{\phi}, \hat{\theta})} \quad t = 1, \dots, n.$$

POZNÁMKA 1.9.5.

Existují i další rezídua, např.

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\Theta}^{-1}(B)\hat{\Phi}(B)Y_t \quad t = 1, \dots, n.$$

Velikost těchto reziduí však závisí na měrných jednotkách náhodné proměnné Y_t , proto se doporučuje používat raději W_t , která jsou standardizovaná a nezávislá na měřítku.

Protože rezidua \widehat{W}_t by měla být pro $n \rightarrow \infty$ (pokud byl model vhodně zvolen) přibližně bílým šumem $WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ (popř. $IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$), ihned se nabízí myšlenka, analyzovat nejprve jeho výběrovou autokorelační funkci

$$\hat{\rho}_W(h) = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} (\widehat{W}_t - \bar{W})(\widehat{W}_{t+h} - \bar{W})}{\sum_{t=1}^n (W_t - \bar{W})^2},$$

kde

$$\bar{W} = \sum_{t=1}^n \widehat{W}_t.$$

Celá řada článků je věnována odvození asymptotických intervalů spolehlivosti pro tuto výběrovou autokorelační funkci.

Mnohem jednodušší je použití tzv. **Portmanteovy statistiky**

$$Q_W = \sum_{j=1}^h \hat{\rho}_W^2(j) \stackrel{A}{\sim} \chi^2(h - p - q) \quad \text{pro } h \in N.$$

Existují také jisté modifikace této statistiky, např. (Ljung, Box, 1978)

$$\tilde{Q}_W = n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}_W^2(j)}{n-j} \stackrel{A}{\sim} \chi^2(h - p - q) \quad \text{pro } h \in N,$$

nebo (Granger, Anderson, 1978)

$$\tilde{Q}_{WW} = n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}_{WW}(j)}{n-j} \stackrel{A}{\sim} \chi^2(h) \quad \text{pro } h \in N.$$

1.10 Modelování sezónnosti pomocí SARIMA modelů

Sezónnost je v Box-Jenkinsonově metodologii stejně jako trend modelována **stochasticky**. Nejprve zavedme **sezónní diferenční operátor o délce $L > 0$** :

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta_L Y_t} &= Y_t - Y_{t-L} = (1 - B^L)Y_t \\ \boxed{\Delta_L^2 Y_t} &= \Delta_L(\Delta_L Y_t) = \Delta_L(Y_t - Y_{t-L}) \\ &= (Y_t - Y_{t-L}) - (Y_{t-L} - Y_{t-2L}) \\ &= Y_t - 2Y_{t-L} + Y_{t-2L} = \boxed{(1 - B^L)^2 Y_t} \\ &\vdots \\ \boxed{\Delta_L^D Y_t} &= \boxed{(1 - B^L)^D Y_t} \end{aligned}$$

Při konstrukci se uvažuje způsobem, který budeme demonstrovat pomocí následujícího příkladu: Nechť časová řada $\{Y_t\}$ vykazuje sezónnost o délce $L = 12$.

1. Zkonstruujeme nejprve $ARIMA(P_1, D_1, Q_1)$ model pro řadu **lednových měření**, tj. pro $\{S_t^1 = B^{12}Y_t\}$

$$\pi_1(B^{12})\Delta_{12}^{D_1}Y_t = \Psi_1(B^{12})\eta_t^{(1)} \sim ARIMA(P_1, D_1, Q_1)$$

kde časový index t odpovídá **lednovým** obdobím a o η_t se budeme zajímat později.

Přitom

$$\begin{aligned} \pi_1(B^{12}) &= 1 - \pi_{1,1}B^{12} - \dots - \pi_{1,P_1}B^{12 \cdot P_1} \\ &\text{je tzv. } \mathbf{sezónní autoregresní operátor } SAR(P_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(B^{12}) &= 1 + \psi_{1,1}B^{12} + \dots + \psi_{1,Q_1}B^{12 \cdot Q_1} \\ &\text{je tzv. } \mathbf{sezónní operátor klouzavých součtů } SMA(Q_1) \end{aligned}$$

$$\Delta_{12}^{D_1} = (1 - B^L)^{D_1} \quad \text{je tzv. } \mathbf{sezónní diferenční operátor } SI(D_1)$$

2. Podobné modely zkonstruujeme pro ostatní měsíce:

$$\begin{aligned} \pi_2(B^{12})\Delta_{12}^{D_2}Y_t &= \Psi_2(B^{12})\eta_t^{(2)} \sim ARIMA(P_2, D_2, Q_2) \\ &\vdots \\ \pi_{12}(B^{12})\Delta_{12}^{D_{12}}Y_t &= \Psi_{12}(B^{12})\eta_t^{(12)} \sim ARIMA(P_{12}, D_{12}, Q_{12}) \end{aligned}$$

3. Předpokládejme přitom, že tyto **modely jsou pro jednotlivé měsíce přibližně stejné**, tj.

$$\begin{aligned} P_1 &\approx \dots \approx P_{12} \approx P \\ Q_1 &\approx \dots \approx Q_{12} \approx Q \\ D_1 &\approx \dots \approx D_{12} \approx D \\ \pi_1(B^{12}) &\approx \dots \approx \pi_{12}(B^{12}) \approx \pi(B^{12}) \\ \Psi_1(B^{12}) &\approx \dots \approx \Psi_{12}(B^{12}) \approx \Psi(B^{12}) \end{aligned}$$

4. **Náhodné veličiny** $\eta_t^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 12$) by však v těchto modelech měly být pro různé měsíce mezi sebou **korelované**, neboť by měl existovat např. vztah mezi lednovými a únorovými hodnotami. Předpokládejme proto, že také řada η_t je popsána modelem $ARIMA(p, d, q)$ tvaru

$$\Phi(B)\Delta^d\eta_t = \Theta(B)\varepsilon_t \sim ARIMA(p, d, q)$$

kde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ je bílý šum.

5. **Spojme** předchozí dva modely do jediného tzv. **multiplikativního sezónního modelu řádu** $(p, d, q) \times (P, D, Q)_L$

$$\boxed{\Phi(B)\pi(B^L)\Delta^d\Delta_L^D Y_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \sim SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_L} \quad L = 12.$$

Příklad 1.10.1: Model $SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ má tvar:

$$\Delta\Delta_{12}Y_t = (1 - B)(1 - B^{12})Y_t = (1 + \theta_1 B)(1 + \psi_1 B^{12})\varepsilon_t,$$

nebo ekvivalentně

$$Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \psi_1\varepsilon_{t-12} + \theta_1\psi_1\varepsilon_{t-13}.$$

POZNÁMKA 1.10.1.

Existují také **aditivní sezónní modely**, které se však používají jen zřídka. Jako příklad lze uvést model

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_{12}\varepsilon_{t-12} + \theta_{13}\varepsilon_{t-13}.$$

Výstavba sezónních modelů

Označme řád běžného diferencování na odstranění trendu jako d a D jako řád diferencování na odstranění sezónnosti. V praktických situacích většinou $d = 0, 1, 2$ a $D = 0, 1$. Dále nechť L je délka sezóny.

Výstavba sezónních modelů probíhá ve třech stejných fázích jako pro modely $ARIMA$. Všimněme si pouze FÁZE IDENTIFIKACE MODELU, neboť ostatní dvě fáze jsou totožné.

1. Odhad parametrů d, D :

- (a) Proveďte se studium odhadnuté **autokorelační funkce** $ACF = \hat{\gamma}(k)$, neboť identifikuje přítomnost trendu. Doporučuje se prozkoumat $4L$ hodnot $\hat{\gamma}(k)$.

- **Určení D** : Má-li funkce $\hat{\rho}(k)$ v bodech $L, 2L, 3L \dots$ **lokální maxima**, pak (bez ohledu na její průběh mezi těmito časovými body) je nutné položit $D = 1$.

To plyne z toho, že hodnoty $\hat{\rho}(L), \hat{\rho}(2L), \hat{\rho}(3L), \dots$ představují odhadnuté hodnoty autokorelační funkce pro řady $\{S_t^j = B^L Y_t\}$, $j = 1, \dots, L$ modelu

$$\pi(B^L)\Delta_L^D Y_t = \Psi(B^L)\eta_t \sim ARIMA(P, D, Q),$$

přičemž **nestacionaritě** tohoto $ARIMA$ modelu **odpovídá pomalý pokles autokorelační funkce** $\hat{\rho}(L), \hat{\rho}(2L), \hat{\rho}(3L), \dots$, tj. tuto řadu je nutno diferencovat (s krokem L) a pokládáme $D = 1$.

- **Určení d** : Jestliže funkce r_k klesá **mezi body jL a $(j+1)L$ pouze přibližně lineárně**, je třeba provést také běžné diferencování.

- (b) Čísla d, D se také někdy určují tak, že se hledá nejmenší číslo mezi odhadnutými hodnotami

$$\hat{\sigma}_Y^2, \hat{\sigma}_{\Delta Y_t}^2, \hat{\sigma}_{\Delta_L Y_t}, \hat{\sigma}_{\Delta_L^2 Y_t}, \dots$$

rozptylů dané řady a jejich diferencí.

2. Odhad parametrů p, P, q, Q :

Po určení řádu d a D zkonstruujeme řadu $W_t = \Delta^d \Delta_L^D Y_t$,

pro kterou je nutné identifikovat model tvaru

$$\Phi(B)\pi(B^L)W_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \sim SARIMA(p, 0, q) \times (P, 0, Q)_L.$$

Pro tento účel se použije odhadnutá ACF = $\hat{\rho}(k)$ a PACF = $\hat{\alpha}(k)$ řady W_t .

(a) MA–HOMOGENNÍ MODELY

- Jestliže ACF funkce $\hat{\rho}(k)$ je zhruba **významně nenulová** v bodech

$$\begin{aligned} & 1, \dots, q \\ & L - q, \dots, L + q \\ & 2L - q, \dots, 2L + q \\ & \vdots \\ & QL - q, \dots, QL + q \end{aligned}$$

přičemž **mezi těmito body se neodlišují významně od nuly**

- a funkce $\hat{\alpha}(k)$ v jednotlivých úsecích mezi body jL a $(j+1)L$ vždy **v absolutní hodnotě klesá** (geometricky nebo po sinusoidě s geometricky klesající amplitudou) a **zároveň klesá**, když ji sledujeme **v bodech $L, 2L, 3L, \dots$** ,

pak položíme

$$\boxed{p = 0 \text{ a } P = 0},$$

tj. budeme identifikovat odpovídající model pro řadu W_t jako

$$W_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \sim SARIMA(0, 0, q) \times (0, 0, Q)_L$$

a tedy model pro řadu Y_t jako

$$\Delta^d \Delta_L^D Y_t = \Theta(B)\Psi(B^L)\varepsilon_t \sim SARIMA(0, d, q) \times (0, D, Q)_L.$$

(b) AR–HOMOGENNÍ MODELY

- Jestliže naopak funkce $\hat{\rho}(k)$ **klesá** v absolutní hodnotě (geometricky nebo po sinusoidě s geometricky klesající amplitudou) **v úsecích mezi body jL a $(j+1)L$** a **zároveň klesá**, když ji sledujeme v bodech $L, 2L, 3L, \dots$

- a funkce $\hat{\alpha}(k)$ je zhruba **významně nenulová** v bodech

$$\begin{aligned} &1, \dots, p \\ &L, \dots, L + p \\ &2L, \dots, 2L + p \\ &\vdots \\ &PL, \dots, PL + p \end{aligned}$$

příčemž **mezi těmito body se neodlišují významně od nuly**,

pak položíme

$$\boxed{q = 0 \text{ a } Q = 0},$$

tj. budeme identifikovat odpovídající model pro řadu W_t jako

$$\Phi(B)\pi(B^L)W_t = \varepsilon_t \sim SARIMA(p, 0, 0) \times (P, 0, 0)_L$$

a tedy model pro řadu Y_t jako

$$\Phi(B)\pi(B^L)\Delta^d\Delta_L^DY_t = \varepsilon_t \sim SARIMA(p, d, 0) \times (P, D, 0)_L.$$

(c) NEHOMOGENNÍ MODELY typu

$$SARIMA(p, d, 0) \times (0, D, Q)_L \text{ nebo } SARIMA(0, d, q) \times (P, D, 0)_L$$

se většinou **nepoužívají**, neboť obvykle vedou při srovnání s předchozími tzv. **homogenní modely**

$$SARIMA(0, d, q) \times (0, D, Q)_L \text{ nebo } SARIMA(p, d, 0) \times (P, D, 0)_L$$

k odhadu neúnosně velkého počtu parametrů.

(d) Identifikace obecných modelů

$$SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_L,$$

v nichž čísla p, q, P a Q mohou být vesměs nenulová, je již dosti komplikovanou záležitostí a obvykle zde hodně záleží na zkušenostech statistika, který analýzu provádí.