Obsah

Následující text není ničím více, než zápisem přednášky předmětu M4010 Rovnice matematické fyziky. Má sloužit především k tomu, aby student-ky/i nebyl-y/i během přednášky nucen-y/i si dělat podrobné poznámky, přepisovat často komplikované formule z tabule do svých papírů (což je natolik intenzivním zdrojem chyb, že se jim prakticky nelze vyhnout). Poté může posloužit jako rychlá připomínka toho, co člověk již zná. V žádném případě nemůže být považován za zdroj, z něhož se lze rovnicím matematické fyziky naučit. Sám o sobě bez komentářů během přednášky je málo srozumitelný až nesrozumitelný (aby byl s komentáři srozumitelný, je mým přáním a snahou; nakolik se to skutečně zdaří, nechám k posouzení laskavým student-kám/ům).

V textu asi zůstaly nějaké nedůslednosti, formulační nejasnosti nebo dokonce chyby. Budu vděčný každému, kdo mě na ně upozorní.

Zdeněk Pospíšil
únor 2003

V češtině existuje několik učebnic parciálních diferenciálních rovnic (rovnic matematické fyziky):

1. A. N. Tichonov, A. A. Samarskij: *Rovnice matematické fysiky*, ČSAV, Praha 1955, 765 stran.
   Důkladná učebnice, v podstatě encyklopedie klasických metod řešení parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.

2. R. Rychnovský, J. Výborná: *Parciální diferenciální rovnice a jejich některá řešení*, SNTL, Praha 1963, 167 stran.
   Stručný úvod do problematiky parciálních diferenciálních rovnic. Pěkně jsou zpracovány rovnice prvního řádu.

3. S. Míka, A. Kufner: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XIX, SNTL, Praha 1981, 88 stran.

4. S. Míka, A. Kufner: *Parciální diferenciální rovnice I. Stacionární rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XX, SNTL, Praha 1983, 181 stran.

5. J. Barták, L. Herrmann, V. Lovicar, O. Vejvoda: *Parciální diferenciální rovnice II. Evoluční rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XXI, SNTL, Praha 1988, 220 stran.

6. J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, VUT, PC-DIR Real s.r.o., Brno 2000, 155 str.
   Přehledná a srozumitelná skripta. Jejich rozsah se zhruba shoduje s rozsahem předmětu M4010.

7. P. Čihák a kol.: *Matematická analýza pro fyziky (V)*, Matfyzpress, Praha 2001, 320 str.
   Skripta, podle nichž se učí na spřátelené fakultě.

8. J Kopáček a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky [V]*, Matfyzpress, Praha 2003, 306 str.
   Užitečná sbírka úloh.

Kapitola 1

Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

1.1 Formulace úloh

Označení: $C^k(0,\ell)$ — množina funkcí k-krát diferencovatelných na $(0,\ell)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$.

1.1.1 Diferenciální operátor

Buďte $a, b, c \in C^0(0,\ell)$, $a(x) \neq 0$ pro $x \in (0,\ell)$. *Lineární diferenciální operátor druhého řádu* $L = L(a,b,c) : C^2(0,\ell) \to C^0(0,\ell)$ definujeme předpisem

$$Ly(x) \;=\; a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,.$$

Rovnice

$$Ly \;=\; g \in C^0(0,\ell)$$

je lineární diferenciální rovnice druhého řádu; v případě $g \equiv 0$ homogenní, v opačném nehomogenní.

Buďte $p \in C^1(0,\ell)$, $q \in C^0(0,\ell)$. Pak operátor $L(-p,-p',q)$ daný vztahem

$$L(-p,-p',q)y(x) \;=\; -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) \;=\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

nazveme *samoadjungovaný*. Každý lineární diferenciální operátor druhého řádu $L(a,b,c)$, pro jehož koeficienty a, b platí

$$b(x) \;=\; a'(x)\,, \quad x \in (0,\ell)$$

je samoadjungovaný. Rovnice

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)$$

se nazývá *samoadjungovaná* nebo *Sturmova - Liouvilleova* rovnice.

Každou lineární diferenciální rovnici lze vyjádřit v samoadjungovaném tvaru.

D.: Buď

$$h(x) \;=\; \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\,, \quad \rho(x) \;=\; \mathrm{e}^{h(x)}\,.$$

Pak

$$\begin{aligned}(\rho(x)a(x))' \;&=\; \left(\mathrm{e}^{h(x)}a(x)\right)' \;=\; \mathrm{e}^{h(x)}h'(x)a(x) + \mathrm{e}^{h(x)}a'(x) \;=\; \rho(x)\frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}a(x) + \rho(x)a'(x) \;=\\ &=\; \rho(x)b(x)\,,\end{aligned}$$

tedy

$$\rho(x)a(x)y''(x) + \rho(x)b(x)y'(x) + \rho(x)c(x)y(x) \;=\; \rho(x)g(x)$$

je samoadjungovaná rovnice ($p = -\rho a$, $q = \rho c$, $f = \rho g$).$\square$

1.1.2 Okrajové podmínky

Budeme hledat řešení rovnice
$$Ly(x) \;=\; f(x)\,,$$
které splňuje některé z následujících podmínek.

Newtonovy podmínky:
$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;=\; y_0\,, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) \;=\; y_1\,,$$
přičemž $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \neq \alpha_1^2 + \beta_1^2$.

Dirichletovy podmínky:
$$y(0) \;=\; y_0\,, \qquad y(\ell) \;=\; y_1\,.$$
(Jsou zvláštním případem Newtonových podmínek pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = \beta_1 = 0$.)

Neumannovy podmínky:
$$y'(0) \;=\; y_0\,, \qquad y'(\ell) \;=\; y_1\,.$$
(Jsou zvláštním případem Newtonových podmínek pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 0,\ \beta_0 = \beta_1 = 1$.)

Podmínky periodičnosti:
$$y(x) = y(x+\ell) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}\,.$$

Podmínky omezenosti:
$$y(x) \text{ je omezená pro } x \to 0+\,, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) \;=\; y_1\,,$$
nebo
$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;=\; y_0\,, \qquad y(x) \text{ je omezená pro } x \to \ell-\,.$$

Jakoukoliv okrajovou podmínku nazveme *homogenní*, jestliže s libovolnými dvěma funkcemi $y_1,\ y_2$, které této podmínce vyhovují, vyhovuje téže podmínce i jejich libovolná lineární kombinace $k_1 y_1 + k_2 y_2$.

Newtonovy podmínky s $y_0 = y_1 = 0$, podmínky periodičnosti i podmínky omezenosti s $y_1 = 0$ nebo $y_0 = 0$ jsou homogenní.

Okrajová úloha, v níž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní se nazývá *homogenní okrajová úloha*, v opačném případě *nehomogenní okrajová úloha*.

1.1.3 Symetrický diferenciální operátor

Řekneme, že *operátor L je symetrický na množině $M \subseteq C^2(0,\ell)$*, jestliže pro všechny $u, v \in M$ platí
$$\int_0^\ell Lu(x)v(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_0^\ell u(x)Lv(x)\mathrm{d}x\;.$$

Buď $L = L(-p, -p', q)$ samoadjungovaný operátor. Pak platí (s využitím integrace „per partes“)
$$\int_0^\ell Lu(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_0^\ell u(x)Lv(x)\mathrm{d}x \;=$$
$$= \int_0^\ell \left[(-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x))v(x) - u(x)(-(p(x)v'(x))' + q(x)v(x))\right]\mathrm{d}x \;=$$
$$= \int_0^\ell \left[(p(x)v'(x))'u(x) - (p(x)u'(x))'v(x)\right]\mathrm{d}x \;=$$
$$= \left[p(x)v'(x)u(x)\right]_0^\ell - \int_0^\ell p(x)v'(x)u'(x)\mathrm{d}x - \left[p(x)u'(x)v(x)\right]_0^\ell + \int_0^\ell p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x \;=$$
$$= p(\ell)v'(\ell)u(\ell) - p(0)v'(0)u(0) - p(\ell)u'(\ell)v(\ell) + p(0)u'(0)v(0) \;=$$
$$= p(\ell)(v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell)) - p(0)(v'(0)u(0) - u'(0)v(0))\,.$$

- Samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině funkcí, které splňují homogenní Newtonovy podmínky.

  D.: Je-li $\beta_0 \neq 0$, pak $u'(0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}u(0), v'(0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}v(0)$, takže $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$.
  Je-li $\alpha_0 \neq 0$, pak $u(0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}u'(0), v(0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}v'(0)$, takže opět $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$.
  Analogicky ověříme, že $v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell) = 0$. □

- Pokud funkce p je ℓ-periodická, pak samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině ℓ-periodických funkcí.

1.1.4 Homogenní okrajová úloha s parametrem

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvažujme homogenní okrajovou úlohu pro rovnici

$$Lv(x) \;=\; \lambda v(x)\,.$$

Tato úloha má vždy *triviální řešení* $v \equiv 0$. Pokud existuje netriviální řešení $v = v(x)$, nazveme ho *vlastní funkcí okrajové úlohy* a parametr λ nazveme *vlastním číslem operátoru* L.

Je-li λ vlastní číslo operátoru L a $v = v(x)$ je příslušná vlastní funkce uvažované okrajové úlohy, pak také funkce cv je pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ vlastní funkcí.

Jestliže vlastnímu číslu λ odpovídá k lineárně nezávislých vlastních funkcí, řekneme, že λ je *k-násobné vlastní číslo.*

Označme M_L množinu funkcí splňujících příslušné homogenní okrajové podmínky. Je-li operátor L symetrický na množině M_L a $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou jeho dvě vlastní čísla, pak odpovídající vlastní funkce jsou ortogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\ell)$.

D.:

$$\begin{aligned}\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;&=\; \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell \lambda_1 v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell Lv_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell v_1(x)Lv_2(x)\mathrm{d}x \;=\\ &=\; \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Kdyby $\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \neq 0$ pak by $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$, což by byl spor. □

1.1.5 Sturmova-Liouvilleova úloha

$$\begin{aligned}-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;&=\; \lambda y(x)\,, \qquad x \in (0,\ell)\,,\\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;&=\; 0 \;=\; \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,.\end{aligned}$$

- Každému vlastnímu číslu Sturmovy-Liouvilleovy úlohy přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce.

- Sturmova-Liouvilleova úloha má nekonečně mnoho vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ pro která platí

  $$\min\{q(x) : x \in [0,l]\} \;\leq\; \lambda_1 \;<\; \lambda_2 \;<\; \cdots\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \;=\; \infty\,.$$

- Vlastní funkce $v_n = v_n(x)$ odpovídající vlastnímu číslu λ_n má v intervalu $(0,\ell)$ právě n nulových bodů. Mezi každými dvěma nulovými body vlastní funkce v_n leží právě jeden nulový bod vlastní funkce v_{n+1}.

- Posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ normovaných vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy tvoří úplnou ortonormální posloupnost na $[0,\ell]$. Tj. je-li funkce $f \in \mathcal{L}^2(0,\ell)$, pak Fourierova řada funkce f vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci f podle středu (konvergence v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\ell)$). Je-li funkce f navíc spojitá a splňuje homogenní okrajové podmínky, je tato konvergence stejnoměrná.

  D.: J. Kalas, M. Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, MU Brno 1995, str. 158–163. Důkaz je tam proveden pro případ $p \equiv 1$. □

1.2 Řešení nehomogenní okrajové úlohy

1.2.1 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — Fourierova metoda

$$
\begin{aligned}
Ly(x) \;&\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,,\\
\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;&=\; 0 \;=\; \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,.
\end{aligned}
$$

- Najdeme posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a ortogonální posloupnost příslušných vlastních funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ Sturmovy-Liouvilleovy úlohy, tj. rostoucí posloupnost čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují:

$$Lv_n(x) \;=\; \lambda_n v_n(x)\,,$$

$$\alpha_0 v_n(0) + \beta_0 v_n'(0) \;=\; 0 \;=\; \alpha_1 v_n(\ell) + \beta_1 v_n'(\ell)\,.$$

- Funkci f vyjádříme ve tvaru

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x)\,, \quad \text{kde} \quad d_n \;=\; \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^l f(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

- Řešení úlohy hledáme ve tvaru

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\,.$$

  Musí tedy platit

$$Ly(x) \;=\; L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n L v_n(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x)\,,$$

  takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x)\,,$$

  z čehož plyne

$$c_n \;=\; \frac{d_n}{\lambda_n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

  pokud všechna vlastní čísla jsou nenulová.
  Hledané řešení tedy je

$$y(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2}\int_0^\ell f(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi \;=\; \int_0^\ell \left(f(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(\xi)v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2}\right)\mathrm{d}\xi\,.$$

  Označíme-li

$$G(x,\xi) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(\xi)v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2}\,,$$

  lze řešení zapsat

$$y(x) \;=\; \int_0^\ell f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

1.2.2 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — metoda variace konstant

$$
\begin{aligned}
Ly(x) \;&\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,,\\
\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;&=\; 0 \;=\; \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,.
\end{aligned}
$$

- Najdeme řešení $u,\ v$ dvou pomocných homogenních úloh

$$
\begin{aligned}
Lu \;&=\; -\left(pu'\right)' + qu \;=\; 0\,, \qquad \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) \;=\; 0\,,\\
Lv \;&=\; -\left(pv'\right)' + qv \;=\; 0\,, \qquad \alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

  Funkce $u,\ v$ nejsou určeny jednoznačně. Vezmeme ty, které jsou lineárně nezávislé.

- Pro Wronskián $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ funkcí $u,\ v$ platí $p(x)W(x) \equiv K$, kde K je nenulová konstanta, neboť

$$
\begin{aligned}
(pW)' \;&=\; (p(uv' - u'v))' \;=\; p'uv' + pu'v' + puv'' - p'u'v \;- pu''v - pu'v' \;=\\
&=\; (pv'' + p'v')u \;- (pu'' + p'u')v \;=\; \left(pv'\right)' u - \left(pu'\right)' v \;= qvu - quv \;=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

  kdyby $K = 0$, pak by $W \equiv 0$, což by byl spor s lineární nezávislostí.

- Řešení nehomogenní úlohy hledáme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y(x) \;=\; c_1(x)u(x) + c_2(x)v(x)\,.$$

  Funkce y má být řešením dané nehomogenní rovnice, takže musí platit

$$
\begin{aligned}
f \;&=\; L(c_1u + c_2v) \;=\; -\big(p(c_1u)'\big)' + qc_1u - \big(p(c_2v)'\big)' + qc_2v \;=\\
&=\; -p\left(c_1''u + 2c_1'u' + c_1u''\right) - p'\left(c_1'u + c_1u'\right) + qc_1u -\\
& -p\left(c_2''v + 2c_2'v' + c_2v''\right) - p'\left(c_2'v + c_2v'\right) + qc_2v \;=\\
&=\; c_1\left(-pu'' - p'u' + qu\right) - pc_1'u' - p\left(c_1''u + c_1'u'\right) - p'c_1'u +\\
& c_2\left(-pv'' - p'v' + qv\right) - pc_2'v' - p\left(c_2''v + c_2'v'\right) - p'c_2'v \;=\\
&=\; c_1Lu - pc_1'u' - \big(p(c_1'u)\big)' + c_2Lv - pc_2'v' - \big(p(c_2'v)\big)' \;=\\
&=\; -p(c_1'u' + c_2'v') - \big(p(c_1'u + c_2'v)\big)'.
\end{aligned}
$$

  Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když funkce $c_1,\ c_2$ splňují soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
c_1'(x)u(x) + c_2'(x)v(x) \;&=\; 0\,,\\
c_1'(x)u'(x) + c_2'(x)v'(x) \;&=\; -\frac{f(x)}{p(x)}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

  Platí tedy

$$
c_1'(x) \;=\; \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} 0 & v(x)\\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v'(x)\end{vmatrix} \;=\; \frac{f(x)v(x)}{K}\,, \quad c_2'(x) \;=\; \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} u(x) & 0\\ u'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)}\end{vmatrix} \;=\; -\frac{f(x)u(x)}{K}\,.
\tag{1.2}
$$

- Funkce $y(x)$ má splňovat okrajové podmínky, tj.

$$
\begin{aligned}
\alpha_0\left[c_1(0)u(0) + c_2(0)v(0)\right] + \beta_0\left[c_1'(0)u(0) + c_1(0)u'(0) + c_2'(0)v(0) + c_2(0)v'(0)\right] \;&=\; 0\,,\\
\alpha_1\left[c_1(\ell)u(\ell) + c_2(\ell)v(\ell)\right] + \beta_1\left[c_1'(\ell)u(\ell) + c_1(\ell)u'(\ell) + c_2'(\ell)v(\ell) + c_2(\ell)v'(\ell)\right] \;&=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

  po úpravě s využitím (1.1)

$$
\begin{aligned}
c_1(0)(\alpha_0u(0) + \beta_0u'(0)) + c_2(0)(\alpha_0v(0) + \beta_0v'(0)) \;&=\; 0\,,\\
c_1(\ell)(\alpha_1u(\ell) + \beta_1u'(\ell)) + c_2(\ell)(\alpha_1v(\ell) + \beta_1v'(\ell)) \;&=\; 0\,;
\end{aligned}
$$

každá z funkcí splňuje jednu okrajovou podmínku, tedy

$$\begin{aligned} c_2(0)(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)) &= 0\,, \\ c_1(\ell)(\alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)) &= 0\,, \end{aligned}$$

takže

$$c_1(\ell) \;=\; 0\,, \quad c_2(0) \;=\; 0\,. \tag{1.3}$$

- Funkce $c_1,\ c_2$ jsou řešením rovnic (1.2) s počátečními podmínkami (1.3) a jsou tedy dány výrazy

$$c_1(x) \;=\; \frac{1}{K}\int_\ell^x f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi\,, \qquad c_2(x) \;=\; -\frac{1}{K}\int_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

- Řešení úlohy je

$$y(x) \;=\; -\frac{u(x)}{K}\int_x^\ell f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{v(x)}{K}\int_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Označíme-li

$$G(x,\xi) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{u(x)v(\xi)}{K}, & 0 \le x < \xi \le \ell \\ -\dfrac{v(x)u(\xi)}{K}, & 0 \le \xi < x \le \ell \end{cases},$$

lze řešení zapsat

$$y(x) \;=\; \int_0^\ell f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

1.2.3 Greenova funkce

Funkci $G : [0,\ell]\times[0,\ell] \to \mathbb{R}$ nazveme *Greenovou funkcí homogenní okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} Ly(x) \;\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;&=\; 0\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;=\; 0 \;&=\; \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

kde $p(x) > 0$ pro $x \in [0,l]$, jestliže

(i) G je spojitá pro $x \in [0,\ell]\times[0,\ell]$,

(ii) G je symetrická, tj. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$,

(iii) pro každé $\xi \in [0,\ell]$ má funkce $G(\cdot,\xi)$ spojité derivace druhého řádu,

(iv) pro každé $\xi \in [0,\ell]$ je funkce $G(\cdot,\xi)$ řešením uvažované okrajové úlohy,

(v) $\lim\limits_{x\to\xi+} G_x(x,\xi) - \lim\limits_{x\to\xi-} G_x(x,\xi) = -\dfrac{1}{p(\xi)}$ pro $\xi \in (0,\ell)$.

Platí: Má-li uvažovaná homogenní okrajová úloha jen triviální řešení $y \equiv 0$ a jsou-li $p \in C^1(0,\ell),\ q \in C^2(0,\ell)$, existuje právě jedna její Greenova funkce. Nehomogenní okrajová úloha

$$\begin{aligned} Ly(x) \;\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;&=\; f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;=\; 0 \;&=\; \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

má pak jediné řešení tvaru

$$y(x) \;=\; \int_0^\ell f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

D.: I. Kiguradze: Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic, MU Brno 1997, str. 82. Důkaz je proveden pro mnohem obecnější situaci. □

1.2.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;&=\; y_0\,, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) \;=\; y_1\,. \end{aligned}$$

Jestliže funkce $w = w(x)$ splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) \;=\; y_0\,, \qquad \alpha_1 w(\ell) + \beta_1 w'(\ell) \;=\; y_1$$

a funkce $u = u(x)$ je řešením úlohy

$$Lu(x) \;=\; f(x) - Lw(x)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) \;=\; 0 \;=\; \alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)\,,$$

pak funkce

$$y(x) \;=\; u(x) + w(x)$$

je řešením uvažované úlohy.

Funkci w je vhodné volit v co nejjednodušším tvaru, například polynom.

1.3 Cvičení

Řešte okrajové úlohy

1) $-y'' - \dfrac{2}{x}y' = 0,\ x \in (0,1);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to 0_+$.

2) $-\left(x^2 y'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

3) $-\left(xy'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to \infty$.

4) $-xy'' - y' = 0,\ x \in (1,2);\ y(1) = y_1,\ y(2) = 0.$

5) $-x^2y'' - xy' + k^2 y = 0,\ x \in (0,\ell);\ y(\ell) = 1$, y je omezená pro $x \to 0_+$; k je parametr.

6) $-xy'' - y' = -x,\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0.$

7) $-y'' = \sin x,\ x \in (0,2\pi);\ y'(0) = y'(2\pi) = 0.$

Najděte vlastní funkce okrajových úloh a vlastní čísla příslušných operátorů

8) $-v'' = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = v'(\ell) = 0.$

9) $-v'' = \lambda v,\ x \in \mathbb{R};\ v(x) = v(x + 2\pi).$

10) $-v'' + qv = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = 0,\ v(\ell) = 0$; q je parametr.

Řešte okrajové úlohy

11) $-y'' - \omega^2 y = f(x),\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0$; ω je parametr.

12) $-y'' - 3y = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in (0,\pi);\ y(0) = y(\pi) = 0.$

13) Najděte Greenovu funkci úlohy $-y'' + y = 0,\ y(0) = y(1) = 0.$

Výsledky: 1) $y(x) = y_0$ **2)** $y(x) = \frac{y_0}{x}$ **3)** $y(x) = y_0$ **4)** $y(x) = y_1 \frac{\ln 2 - \ln x}{\ln 2}$ **5)** $y(x) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{|k|}$ **6)** nemá řešení **7)** $y(x) = \sin x - x + C$, C je libovolná konstanta **8)** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{n\pi}{\ell}x,\ n = 0,1,2,\dots$ **9)** $\lambda_n = n^2$, $v_n(x) = C_n\cos nx + D_n \sin nx$, C_n, D_n jsou libovolné konstanty, $C_0 \neq 0$, $n = 0,1,2,\dots$ **10)** $\lambda_n = q + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$. **11)** $y(x) = B\sin\frac{k\pi}{\ell}x + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}(\xi - x)\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} = k \in \mathbb{N}$ a $\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi = 0$, B je libovolná konstanta;

$y(x) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi - \frac{\sin\omega x}{\omega\sin\omega\ell}\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi = 2\ell\int\limits_0^x f(\xi)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\sin\frac{k\pi}{\ell}x}{k^2\pi^2 - \omega^2\ell^2}\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} \notin \mathbb{N}$

12) $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \frac{\pi}{6}\left(\cos\sqrt{x} - \operatorname{cotg}\sqrt{3}\pi\,\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{6}(x - \pi)$ **13)** $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(1-x)\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{sh}1}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(1-\xi)}{\operatorname{sh}1}, & 0 \le x < \xi \le 1 \end{cases}$

Kapitola 2

Speciální funkce

2.1 Funkce Γ

2.1.1 Poznámky

1. Nevlastní integrál $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ absolutně konverguje pro každé $x > 0$.

   D.: Je-li $x \geq 1$, integrál $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ není nevlastní.
   Je-li $x < 1$, vezmeme $\delta \in (0, x)$. Pak $\lim\limits_{t\to 0+} t^{1-\delta}\left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| = \lim\limits_{t\to 0+} \mathrm{e}^{-t}t^{x-\delta} = 0$ a podle limitního srovnávacího kriteria pro nevlastní integrály druhého druhu a vzhledem k tomu, že nevlastní integrál $\int\limits_0^1 t^{-k}\mathrm{d}t$ konverguje pro $k < 1$, také nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right|\mathrm{d}t$ konverguje.
   Dále je

   $$\lim_{t\to\infty}((x+1)\ln t - t) = \lim_{\tau\to 0+}\left((x+1)\ln\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau}\right) = -\lim_{\tau\to 0+}\frac{\tau(x+1)\ln\tau + 1}{\tau} = -\infty,$$

   neboť podle de l'Hospitalova pravidla platí

   $$\lim_{\tau\to 0+}\tau\ln\tau = \lim_{\tau\to 0+}\frac{\ln\tau}{\frac{1}{\tau}} = \lim_{\tau\to 0+}\frac{\frac{1}{\tau}}{-\frac{1}{\tau^2}} = -\lim_{\tau\to 0+}\tau = 0,$$

   takže podle věty o limitě složené funkce dostaneme

   $$\lim_{t\to\infty} t^2\left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| = \lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x+1} = \lim_{t\to\infty} e^{(x+1)\ln t - t} = 0 < \infty\,.$$

   Podle limitního srovnávacího kriteria pro nevlastní integrály prvního druhu a z toho, že $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ konverguje, nyní dostáváme, že také integrál $\int\limits_1^\infty \left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right|\mathrm{d}t$ konverguje. $\Box$

2. Pro $x > 0$ položme

   $$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\,. \tag{2.1}$$

   Pro každé $x > 0$ a každé $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ pak platí

   $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,. \tag{2.2}$$

D.: Úplnou indukcí:

Integrací „per partes“ dostaneme $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}t = -\left[\mathrm{e}^{-t} t^x\right]_{t=0}^\infty + x \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t = x\Gamma(x)$, takže (2.2) platí pro $n = 0$.

Podobně $\Gamma(x+n+2) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x+n+1} \mathrm{d}t = -\left[\mathrm{e}^{-t} t^{x+n+1}\right]_{t=0}^\infty + (x+n+1) \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x+n} \mathrm{d}t =$
$= (x+n+1)\Gamma(x+n+1)$, což je indukční krok. $\square$

Podle (2.1) je

$$\Gamma(1) \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \;=\; -\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty \;=\; 1\,.$$

Z (2.2) nyní pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ plyne

$$1 = \Gamma(1) = \frac{\Gamma(n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} = \frac{\Gamma(n+2)}{(n+1)!}, \quad \text{tj. } \Gamma(n+2) = (n+1)!,$$

tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!\,$.

2.1.2 Definice

Funkce Γ je pro každé $x > 0$ definována vztahem (2.1), pro $x < 0,\ x \notin \mathbb{Z}$ je funkce Γ definována vztahem (2.2), kde za n vezmeme $[-x] = -[x] - 1$, t.j.

$$\Gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma(x - [x])}{x(x+1) \cdots (x - [x] - 1)}\,.$$

$\operatorname{Dom}\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

2.1.3 Věta

1. Pro každé $x \in \operatorname{Dom}\Gamma$ platí

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{neboli} \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

   a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2) \cdots (x-n)\Gamma(x-n)\,.$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ platí

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

D.:

1. Pro $x > 0$ byl první vztah dokázán v 2.1.1.2, pro $x \in (-1, 0)$ je podle definice $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, což je první vztah a pro $x < -1$ je

$$x\Gamma(x) = x\frac{\Gamma(x - [x])}{x(x+1) \cdots (x - [x] - 1)} = \frac{\Gamma(x + 1 - [x+1])}{(x+1)(x+2) \cdots (x + 1 - [x+1] - 1)} = \Gamma(x+1)\,,$$

   což je opět první vztah. Ten druhý z něho plyne indukcí.

2. Nechť $x \in (0, 1)$. Pak

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{-x} \mathrm{d}s \;=\; \iint\limits_{[0,\infty)\times[0,\infty)} \mathrm{e}^{-(t+s)} s^{-x} t^{x-1} \mathrm{d}s\mathrm{d}t\,.$$

Položíme $u = s+t,\ v = \dfrac{t}{s}$, neboli $s = \dfrac{u}{v+1},\ t = \dfrac{uv}{v+1}$. Podle věty o transformaci dvojného integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \left(\frac{v+1}{u}\right)^x \left(\frac{uv}{v+1}\right)^x \frac{v+1}{uv} \frac{u}{(v+1)^2} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s = \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1} \mathrm{d}v = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1} \mathrm{d}v\,.\end{aligned}$$

Podle známého vzorce z teorie integrálu [Jarník, I2, str. 277–281] je

$$\int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1} \mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

Nechť $x > 1$. Pak podle 1. je $\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-[x])\Gamma(x-[x])$. $1-x < 0$, takže podle definice

$$\Gamma(1-x) = \frac{\Gamma(1-x+[x])}{(1-x)(2-x)\cdots([x]-x)} = \frac{(-1)^{[x]}\Gamma(1-x+[x])}{(x-1)(x-2)\cdots(x-[x])}\,,$$

$x - [x] \in (0,1)$, takže podle již dokázaného je

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]} \frac{\pi}{\sin \pi(x-[x])} = \\ &= (-1)^{[x]} \frac{\pi}{\sin \pi x \cos \pi[x] - \cos \pi x \sin \pi[x]} = (-1)^{[x]} \frac{\pi}{(-1)^{[x]} \sin \pi x} = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.\end{aligned}$$

Nechť $x < 0$. Pak podle definice je $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)}$ a podle 1. je
$\Gamma(1-x) = -x(-x-1)\cdots(-x+1+[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}x(x+1)\cdots(x-[x]-1)\Gamma(1-x+[x])$.
Opět $x - [x] \in (0,1)$ a podle již dokázaného

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]} \frac{\pi}{\sin \pi(x-[x])} = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

□

Známe-li $\Gamma(x)$ pro $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, lze podle 2.1.3 vypočítat $\Gamma(x)$ pro jakékoliv $x \in \operatorname{Dom}\Gamma$. Již víme, že $\Gamma(1) = 1$. Položíme-li v 2.1.3.2 $x = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi \quad \text{neboli} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Odtud také plyne

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{2.3}$$

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí

$$\lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0+} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t = \infty, \text{ neboť } \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0+} \mathrm{e}^{-t} = 1 > 0,$$

a

$$\lim_{x\to 0-} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(1) \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty\,.$$

2.1.4 Logaritmická derivace funkce Γ

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Omezíme se na $\operatorname{Dom} \psi = (0, \infty)$.

Podle 2.1.3 platí

$$\begin{aligned}
\psi(x+1) &= \frac{1}{x} + \psi(x) \\
\psi(x) &= \psi(x-n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N},\ n < x \\
\psi(x+n) &= \psi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N} \qquad (2.4) \\
\psi(1-x) - \psi(x) &= \pi \operatorname{cotg} \pi x
\end{aligned}$$

Tyto vztahy lze využít pro výpočet hodnot funkce ψ, známe-li $\psi(x)$ pro $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí pro $x > 0$

$$\Gamma'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \ln t \mathrm{d}t \,. \qquad (2.5)$$

Položíme $\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \ln t \mathrm{d}t = 0.5772157\cdots$ (Eulerova konstanta). Dosadíme-li v (2.4) 1 za x, dostaneme

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \,.$$

Platí (tzv. Frullaniho integrál)

$$\ln t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi} - \mathrm{e}^{-\xi t}}{\xi} \mathrm{d}\xi \,. \qquad (2.6)$$

Dosadíme do (2.5) a dostaneme

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi} - \mathrm{e}^{-\xi t}}{\xi} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \left(\mathrm{e}^{-\xi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)} t^{x-1} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \left(\mathrm{e}^{-\xi} \Gamma(x) - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)} t^{x-1} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\xi \,.
\end{aligned}$$

Ve vnitřním integrálu zavedeme substituci $u = t(\xi + 1)$ a dostaneme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)} t^{x-1} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \left(\frac{u}{\xi+1} \right)^{x-1} \frac{\mathrm{d}u}{\xi+1} = \frac{1}{(\xi+1)^x} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^{x-1} \mathrm{d}u = \frac{1}{(\xi+1)^x} \Gamma(x) \,,$$

takže

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \left(\mathrm{e}^{-\xi} - (\xi+1)^{-x} \right) \mathrm{d}\xi = \Gamma(x) \left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi} \mathrm{d}\xi - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x} \right) ,$$

což znamená, že

$$\psi(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi} \mathrm{d}\xi - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x} \,.$$

Ve druhém integrálu zavedeme substituci $\xi + 1 = \mathrm{e}^t$:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^t \mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{e}^{tx}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t$$

a v prvním přeznačíme integrační proměnnou. Dostaneme

$$\psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) \mathrm{d}t \,. \tag{2.7}$$

Zejména pro $x = 1$ dostaneme

$$-\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) \mathrm{d}t \,.$$

Odečteme-li poslední dvě rovnice, dostaneme

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-tx}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t \,.$$

Zavedeme substituci $\eta = \mathrm{e}^{-t}$:

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} \mathrm{d}\eta \,. \tag{2.8}$$

Buď $s \in (0, 1)$ libovolné číslo. Funkce $\eta \mapsto \eta - \eta^x$ je na intervalu $[0, s]$ spojitá, takže podle první Weierstrassovy věty je na tomto intervalu ohraničená. Existuje tedy konstanta $c \geq 0$ taková, že

$$\left| \eta^n - \eta^{n+x-1} \right| = |\eta^n| \, |\eta - \eta^x| \leq s^n c$$

pro každé $n \geq 1$ a každé $\eta \in [0, s]$. Geometrická řada $\sum\limits_{n=+}^{\infty} cs^n$ konverguje. Podle Weierstrassova kriteria tedy řada

$$\sum_{n=0}^\infty \left(\eta^n - \eta^{n+x-1} \right) = 1 - \eta^{x-1} + \sum_{n=1}^\infty \left(\eta^n - \eta^{n+x-1} \right)$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na intervalu $[0, s]$. Odtud plyne, že následující výpočet je korektní.

$$\int_0^s \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} \mathrm{d}\eta = \int_0^s \left(\left(1 - \eta^{x-1}\right) \sum_{n=0}^\infty \eta^n \right) \mathrm{d}\eta = \int_0^s \sum_{n=0}^\infty \left(\eta^n - \eta^{n+x-1} \right) \mathrm{d}\eta =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^s \left(\eta^n - \eta^{n+x-1} \right) \mathrm{d}\eta = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x} \right) . \tag{2.9}$$

Přitom poslední řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[0, s]$; vzhledem k tomu, že s bylo libovolné číslo z intervalu $(0, 1)$, tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $[0, 1)$. Řada

$$\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}$$

konverguje podle Cauchyova-Maclaurinova Kriteria. Z 2.9 nyní plyne

$$\int_0^1 \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} \mathrm{d}\eta = \lim_{s \to 1-} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x} \right) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{s \to 1-} \left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x} \right) = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) .$$

Odtud a z 2.8 dostáváme vyjádření logaritmické derivace funkce Γ ve tvaru

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) . \tag{2.10}$$

2.1.5 Rozvoj funkce Γ ve Weierstrassův nekonečný součin

Podle (2.10) je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Gamma(t) \;=\; -\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+t}\right).$$

Integrujeme-li tuto rovnost podle t v mezích od 1 do $x+1$, dostaneme

$$\ln\Gamma(x+1) \;=\; -\gamma x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Odtud dostaneme

$$\Gamma(x+1) \;=\; \mathrm{e}^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}, \qquad \frac{1}{\Gamma(x+1)} \;=\; \mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

2.1.6 Asymptotické vyjádření funkce Γ

Z (2.7) s využitím (2.6) dostaneme

$$\frac{\Gamma'(\xi+1)}{\Gamma(\xi+1)} \;=\; \int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-t\xi}}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\mathrm{d}t \;=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t\xi}}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{d}t \;=\ln\xi+\frac{1}{2\xi}-\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{d}t.$$

Zintegrujeme tuto rovnost podle ξ v mezích od 1 do x:

$$\ln\Gamma(x+1)-\ln\Gamma(2) \;=\; x\ln x-x+1+\frac{1}{2}\ln x-\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-tx}}{t}\mathrm{d}t.$$

Při označení $f(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\frac{1}{t}$ a s využitím $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \Gamma(2)=1$ máme

$$\ln\Gamma(x) \;=\; \left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+1-\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

Označme

$$I \;=\; \int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \quad J \;=\; \int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t, \quad \omega(x) \;=\; \int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t.$$

Platí

$$J-I \;=\; \int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t \;=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{t}+\frac{1}{\mathrm{e}^{t/2}-1}\right)\frac{2}{t}\right)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t \;=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{1-(\mathrm{e}^{t/2}+1)}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\frac{e^{-t/2}}{t}\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t/2}}{t}-\frac{1}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

takže (při výpočtu využijeme (2.6))

$$J = \int_0^\infty \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \right) \mathrm{e}^{-t} + \frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \right) \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{\mathrm{e}^t - 1} \right) \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}}{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-t}(1 - \mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t - 1} \right) \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} \right) \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{2} \right) \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2 \left(\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t} \right) - t \left(2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2} \right)}{2t^2} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\left(-\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t/2} \right) t - \left(e^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2} \right)}{t^2} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \ln 2 = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \ln 2 =$$

$$= - \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} - \frac{1}{2} \ln 2 = \lim_{t \to 0} \left(-\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-t/2} + \mathrm{e}^{-t} \right) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \,.$$

Položíme-li v (2.11) $x = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$\ln \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} - I + J \,,$$

což spolu s předchozím výsledkem dá

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi \,.$$

Dosadíme do (2.11) a dostaneme

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \omega(x) \,.$$

Funkce f je na intervalu $(0, \infty)$ klesající, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$ a

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{t \to 0+} \frac{t\mathrm{e}^t - t - 2\mathrm{e}^t + 2 + 2t}{2t^2 \left(e^t - 1 \right)} = \lim_{t \to 0+} \frac{\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t + 1}{4t \left(\mathrm{e}^t - 1 \right) + 2t^2 \mathrm{e}^t} =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{-\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t}{(4 + 4t)\mathrm{e}^t + (4t + 2t^2)\,\mathrm{e}^t - 4} = \lim_{t \to 0+} \frac{\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t}{(8 + 4t + 4 + 8t + 2t^2)\,\mathrm{e}^t} = \frac{1}{12} \,,$$

což znamená, že

$$|\omega(x)| = \left| \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}t \right| \le \int_0^\infty |f(t)| \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}t \le \frac{1}{12} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}t = -\frac{1}{12x} \left[\mathrm{e}^{-tx} \right]_0^\infty = \frac{1}{12x} \,,$$

z čehož plyne, že $\lim\limits_{x \to \infty} \omega(x) = 0$, takže pro velká x lze psát

$$\ln \Gamma(x) \approx \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi \,, \qquad \text{neboli} \qquad \Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}\, x^{x - \frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-x} \,. \tag{2.12}$$

Odtud dostaneme

$$n! \;=\; \Gamma(n+1) \;\approx\; \sqrt{2\pi}\,(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n-1}$$

a poněvadž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n-1}}{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}\,1 \;=\; 1\,,$$

lze psát

$$n! \;\approx\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}$$

pro velká n (Stirlingova formule).

2.2 Besselovy funkce

2.2.1 Definice

Obyčejná lineární homogenní rovnice druhého řádu

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-\nu^2)y(x) \;=\; 0\,, \tag{2.13}$$

kde $\nu \in \mathbb{R}$, $x \in (0,\infty)$ se nazývá *Besselova rovnice řádu* ν.

Rovnici (2.13) lze ekvivalentně zapsat

$$x\,(xy'(x))' + (x^2-\nu^2)y(x) \;=\; 0\,.$$

2.2.2 Řešení rovnice (2.13) Frobeniovou metodou

Hledáme nějaké řešení rovnice (2.13). Budeme předpokládat, že je tvaru

$$y(x) \;=\; a_0x^\sigma + a_1x^{\sigma+1} + a_2x^{\sigma+2} + \cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{\sigma+k}\,, \tag{2.14}$$

kde $\sigma \in \mathbb{R}$ je tzv. *charakteristický součinitel*, jehož hodnotu určíme později. Pak je

$$\begin{array}{rclcrcrcl}
x^2y'' & = & a_0\sigma(\sigma-1)x^\sigma & + & a_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} & + & \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)(\sigma+k-1)x^{\sigma+k}\,,\\
xy'(x) & = & a_0\sigma x^\sigma & + & a_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} & + & \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)x^{\sigma+k}\,,\\
x^2y(x) & = & & & & & \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{\sigma+k}\,,\\
-\nu^2y(x) & = & -\nu^2a_0x^\sigma & - & \nu^2a_1x^{\sigma+1} & + & \sum_{k=2}^{\infty}(-\nu^2a_k)x^{\sigma+k}\,.
\end{array}$$

Tedy

$$a_0(\sigma^2-\nu^2)x^\sigma + a_1(\sigma^2+2\sigma+1-\nu^2)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(a_k(\sigma^2+2\sigma k+k^2-\nu^2)+a_{k-2}\right)x^{\sigma+k} \;=\; 0\,,$$

takže (2.14) je formálním řešením Besselovy rovnice (2.13) pokud platí rovnosti

$$\begin{array}{rcl}
a_0(\sigma^2-\nu^2) & = & 0\\
a_1(\sigma^2+2\sigma+1-\nu^2) & = & 0\\
a_k(\sigma^2+2\sigma k+k^2-\nu^2)+a_{k-2} & = & 0\,,\quad k=2,3,\ldots
\end{array}$$

První z těchto rovností je splněna, pokud σ a ν vyhovují tzv. *charakteristické rovnici*

$$\sigma^2-\nu^2 \;=\; 0\,,\quad \text{tj. } \sigma \;=\; \pm\nu\,. \tag{2.15}$$

Položíme $\sigma = \nu$ a dosadíme do zbývajících rovností. Dostaneme

$$a_1(2\nu+1) = 0 \tag{2.16}$$
$$a_k(2\nu+k)k = a_{k-2}\,, \quad k = 2,3,\dots\,. \tag{2.17}$$

Rovnost (2.16) a rovnosti (2.17) s lichými indexy k, tj. $k = 2m+1$ pro vhodné $m \in \mathbb{N}$, jsou zřejmě splněny, pokud $a_{2m+1} = 0$, $m = 0,1,2,\dots$.

Najdeme podmínky, za jakých jsou splněny rovnosti (2.17) se sudými indexy k. Pokud $2\nu + k \neq 0$ pro $k = 2,4,6,\dots,2m$, pak

$$a_{2m} = -\frac{a_{2(m-1)}}{2^2 m(m+\nu)} = -\frac{-\dfrac{a_{2(m-2)}}{2^2(m-1)(m-1+\nu)}}{2^2 m(m+\nu)} = \frac{a_{2(m-2)}}{2^4 m(m-1)(m+\nu)(m-1+\nu)} = \dots =$$
$$= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m(m-1)\cdots 1\cdot(m+\nu)(m-1+\nu)\cdots(1+\nu)} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m} m!(m+\nu)(m-1+\nu)\cdots(1+\nu)\Gamma(1+\nu)} =$$
$$= \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}.$$

Tento výpočet naznačuje, že lze volit

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}.$$

Pokud $2\nu + k = 0$ pro nějaké $k = 2m_1$, pak $2\nu + k$ je celé záporné číslo pro všechna $k = 2,4,6,\dots,2(m_1-1)$ a $2\nu + k > 0$ pro všechna $k = 2(m_1+1), 2(m_1+2),\dots$. Tedy $1+\nu, 2+\nu, \dots, m_1+\nu$ nejsou v definičním oboru funkce Γ a $m_1+\nu+1, m_1+\nu+2,\dots$ v něm jsou. V takovém případě lze volit

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2(m_1-1)} = 0, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \text{ pro } m \geq m_1.$$

Snadno ověříme, že při uvedené volbě budou rovnosti (2.17) splněny pro každý sudý index k.

Formální řešení rovnice (2.13) je tedy tvaru

$$y(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{2.18}$$

kde

$$k_0 = \begin{cases} 0, & \nu \notin (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}, \\ -\nu, & \nu \in (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Abychom ověřili, že se jedná o řešení, je potřeba ukázat, že tato řada konverguje pro každé $x > 0$. Pro poloměr konvergence r mocninné řady

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k}$$

podle Cauchyovy-Hadamardovy věty a s využitím (2.12) platí

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2\pi(k+1)^{k+1/2}(k+\nu+1)^{k+\nu+1/2}\mathrm{e}^{-2k+\nu-1}}} = 0\,,$$

takže tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Řada (2.18) tedy konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé $x > 0$. (Pro $x = 0$ nemusí být $y(x) = x^\nu S(x)$ vůbec definována.)

2.2.3 Definice

Funkce

$$J_\nu(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

se nazývá *Besselova funkce prvního druhu řádu* ν. Je-li pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ číslo $k+\nu+1$ celé nekladné (tj. $k+\nu+1 \notin \operatorname{Dom}\Gamma$), klademe k-tý člen uvažované řady roven 0.

Označme

$$u_\nu(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Pak je $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)$.

2.2.4 Poznámka

$$u_\nu(0) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,, \quad u_\nu'(0) \;=\; 0\,.$$

D.: První vzorec plyne z toho, že $\Gamma(1) = 1$.

$$\begin{aligned} u_\nu'(x) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \;= \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}\,. \end{aligned}$$

(Poslední rovnost plyne z faktu, že $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$.) □

2.2.5 Vlastnosti Besselovy funkce prvního druhu

1. Funkce $J_\nu(x)$ je spojitá na $(0, \infty)$.

   D.: Plyne z toho, že $u_\nu(x)$ jakožto součet mocninné řady je funkce spojitá. □

2. $\lim\limits_{x\to 0+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1\,, & \nu = 0 \\ 0\,, & \nu > 0 \text{ nebo } \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ \infty(-1)^{[\nu]}\,, & \nu \in (-\infty, 0)\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$.

   D.: Plyne bezprostředně z 2.2.4. □

3. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $J_n(x) = (-1)^n J_n(x)$ pro všechna $x \in (0, \infty)$.

   D.: $J_{-n}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x)$.
   □

4. $(x^{-\nu}J_\nu(x))' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,,\; (x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,.$

D.: Platí:

$$\begin{aligned}
\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right)' &= \left(2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right)' = \\
&= 2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)} = \\
&= 2^{-\nu}\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\
&= -2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu+1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1}
\end{aligned}$$

Druhý vztah lze dokázat analogicky. □

5. $J_{\nu+1}(x) \;=\; \dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)\,,\;\; J'_\nu(x) \;=\; \dfrac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right).$
   První formule (rekurentní vzorec) umožňuje vypočítat $J_{\nu+1}(x)$ ze znalosti $J_\nu(x)$ a $J_{\nu-1}(x)$; druhá formule je vzorec pro derivaci Besselovy funkce prvního druhu.

   D.: První formuli z 4. vynásobíme x^ν, druhou $x^{-\nu}$ a rozepíšeme derivaci součinu. Tím dostaneme

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \;=\; -J_{\nu+1}(x)\,, \quad J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \;=\; J_{\nu-1}(x)\,.$$

   Odečtením těchto rovnic dostaneme první formuli, sečtením druhou. □

6. Platí

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

7. $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x\,, \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x\,.$

   D.: Poněvadž podle 2.1.3 je pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(k-\frac{2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2^k}\sqrt{\pi} = \\
&= \frac{(2k)!}{(2k)!!2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{k!2^{2k}}\sqrt{\pi}\,,
\end{aligned}$$

kde $(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2$, tak platí $\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = k!\frac{(2k)!}{k!2^{2k}}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}}\sqrt{\pi}$ a tedy

$$J_{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,.$$

Druhý vztah se dokáže analogicky. □

Rekurentní formule uvedené v 5 spolu s vyjádřením funkcí J_0, J_1, J_{-n}, $J_{-1/2}$, $J_{1/2}$ uvedenými v 6, 3 a 7 umožňují vypočítat Besselovy funkce 1. druhu libovolného celočíselného a poločíselného řádu.

2.2.6 Věta (Nulové body Besselových funkcí celočíselného řádu)

Funkce J_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ má jednoduché nulové body $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots$ takové, že

$$0 < x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \cdots\,, \qquad \lim_{k\to\infty} x_{nk} = \infty$$

a posloupnost $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ nemá hromadné body. Funkce J_n, $n = 1, 2, \ldots$ má navíc n-násobný nulový bod $x_{n0} = 0$.

D.: Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, kap. XV. □

2.2.7 Věta (Orthogonalita Besselových funkcí celočíselného řádu)

Besselovy funkce J_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ splňují pro každé $a > 0$ a všechna $k, l \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{1}{2}a^2\left(J_{n+1}(x_{nk})\right)^2, & k = l \end{cases}$$

kde x_{nk} (resp. x_{nl}) je k-tý (resp. l-tý) jednoduchý nulový bod funkce J_n.

D.: Položme $f(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)$, $g(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{x_{nk}}{a}J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 J_n''\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right).$$

Poněvadž J_n je řešením Besselovy rovnice (2.13), platí

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^{-2}\left(-\frac{x_{nk}}{a}\xi J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) - \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right)J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{\xi^2}\left(\xi\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right)f(\xi)\right),$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right)f(\xi) = 0.$$

Analogicky dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}g(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right)f(\xi) = 0.$$

První rovnost vynásobíme ξg, druhou vynásobíme ξf a odečteme je:

$$\xi\left(gf'' - fg''\right) + \left(gf' - fg'\right) + \xi fg\left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2\right) = 0.$$

Po úpravě

$$\xi\left(gf''+g'f'-g'f'-fg''\right)+\left(gf'-fg'\right)+\xi fg\frac{x_{nk}^2-x_{nl}^2}{a^2}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi\left(gf'-fg'\right)\right)=\frac{x_{nl}^2-x_{nk}^2}{a^2}\xi fg.$$

Integrací poslední rovnosti v mezích od 0 do a dostaneme

$$a\left(g(a)f'(a)-f(a)g'(a)\right)=\frac{x_{nl}^2-x_{nk}^2}{a^2}\int\limits_0^a \xi f(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Poněvadž $f(a)=J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}a\right)=0$ a $g(a)=J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}a\right)=0$, platí

$$0=\frac{x_{nl}^2-x_{nk}^2}{a^2}\int\limits_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

takže pro $k\neq l$ je dokazovaná rovnost splněna.

Poněvadž J_n splňuje Besselovu rovnici (2.13), platí pro každé $x>0$ rovnost

$$x^2J_n(x)=n^2J_n(x)-xJ_n'(x)-x^2J_n''(x).$$

Integrací per partes s využitím této rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\int x\left(J_n(x)\right)^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2-\int x^2J_n(x)J_n'(x)\mathrm{d}x=\\&=\frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2-\int\left(n^2J_n(x)J_n'(x)-x\left(J_n'(x)\right)^2-x^2J_n''(x)J_n'(x)\right)\mathrm{d}x=\\&=\frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2-\int\left(\frac{n^2}{2}\left[\left(J_n(x)\right)^2\right]'-\left[\frac{x^2}{2}\left(J_n'(x)\right)^2\right]'\right)\mathrm{d}x=\\&=\frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2-\frac{n^2}{2}\left(J_n(x)\right)^2+\frac{x^2}{2}\left(J_n'(x)\right)^2=\frac{x^2}{2}\left(\left(J_n(x)\right)^2+\left(J_n'(x)\right)^2\right)-\frac{n^2}{2}\left(J_n(x)\right)^2.\end{aligned}$$

Podle 2.2.5.5 je $\left(J_n(x)\right)^2+\left(J_n'(x)\right)^2=\left(J_n(x)\right)^2+\left(J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\right)^2$ a tento výraz je podle 2.2.5.2 pro x z pravého okolí nuly ohraničený. To znamená, že

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{2}\left[\left(J_n(x)\right)^2+\left(J_n'(x)\right)^2\right]=0.$$

Dále podle 2.2.5.2 je také

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{2}\left(nJ_n(x)\right)^2=0.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}\int\limits_0^a \xi\left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2\mathrm{d}\xi&=\frac{a^2}{x_{nk}^2}\int\limits_0^{x_{nk}} x\left[J_n(x)\right]^2\mathrm{d}x=\\&=\frac{a^2}{x_{nk}^2}\left[\frac{x_{nk}^2}{2}\left(\left(J_n(x_{nk})\right)^2+\left(J_n'(x_{nk})\right)^2\right)-\frac{n^2}{2}\left(J_n(x_{nk})\right)^2\right]=\frac{a^2}{2}\left(J_n'(x_{nk})\right)^2.\end{aligned}$$

Podle 2.2.5.4 je

$$-x^{-n}J_{n+1}(x)=\left(x^{-n}J_n(x)\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}J_n(x)+x^{-n}J_n'(x),$$

takže $J_n'(x_{nk})=-J_{n+1}(x_{nk})$. Celkem tedy

$$\int\limits_0^a \xi\left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2\mathrm{d}\xi=\frac{a^2}{2}\left(J_{n+1}(x_{nk})\right)^2,$$

což je dokazovaná rovnost pro $k=l$. $\square$

2.2.8 Věta

Nechť $\nu \in \mathbb{Z}$ a v je řešením Besselovy rovnice (2.13) lineárně nezávislé na J_ν. Pak $\left|\lim\limits_{x\to 0+} v(x)\right| = \infty$.

D.: Označme

$$W = W(x) = W(x; J_\nu, v) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & v(x) \\ J_\nu'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)v'(x) - J_\nu'(x)v(x)$$

wronskián funkcí J_ν, v. S využitím faktu, že J_ν a v jsou řešením rovnice (2.13) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_\nu v' - J_\nu' v\right) = J_\nu' v' + J_\nu v'' - J_\nu'' v - J_\nu' v' = J_\nu v'' - J_\nu'' v =$$
$$= J_\nu \frac{(\nu^2 - x^2)v - xv'}{x^2} - v\frac{(\nu^2 - x^2)J_\nu - xJ_\nu'}{x^2} = \frac{1}{x}\left(J_\nu' v - J_\nu v'\right) = -\frac{1}{x} W.$$

Wronskián W tedy splňuje diferenciální rovnici $W' = -\dfrac{W}{x}$, což znamená, že

$$W(x) = \frac{C}{x},$$

kde C je nějaká nenulová konstanta (neboť funkce J_ν, v jsou nezávislé). Dále platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{J_\nu}\right) = \frac{v' J_\nu - v J_\nu'}{J_\nu^2} = \frac{W}{J_\nu^2} = \frac{C}{x J_\nu^2}.$$

Buď $\alpha > 0$ libovolná konstanta. Integrací poslední rovnosti v mezích od x do α dostaneme

$$\frac{v(x)}{J_\nu(x)} = D - C \int\limits_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2},$$

kde $D = \dfrac{v(\alpha)}{J_\nu(\alpha)}$ je konstanta. Odtud plyne, že pro každé $x \in (0, \alpha)$ platí

$$v(x) = J_\nu(x)\left(D - C\int\limits_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2}\right)$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = D \lim_{x\to 0+} J_\nu(x) - C \lim_{x\to 0+} J_\nu(x) \int\limits_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2}. \tag{2.19}$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\eta = \begin{cases} (1+\varepsilon)^2, & \nu = 0 \\ \varepsilon^2, & \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{cases}$. Pak $\eta > 0$ a podle 2.2.5.2 k němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\xi \in (0, \delta)$ je $\left(J_\nu(\xi)\right)^2 < \eta$. Odtud plyne, že pro $x \in (0, \delta)$ platí

$$\int\limits_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} = \int\limits_x^\delta \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} + \int\limits_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} > \frac{1}{\eta}\int\limits_x^\delta \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \int\limits_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} = \frac{1}{\eta}\ln\frac{\delta}{x} + \int\limits_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2},$$

tedy

$$\lim_{x\to 0+} \int\limits_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} \geq \int\limits_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} + \frac{1}{\eta}\lim_{x\to 0+} \ln\frac{\delta}{x} = \infty.$$

Odtud vzhledem k 2.2.5.2 a (2.19) dále plyne, že pro $\nu = 0$ je

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = (-\operatorname{sgn} C)\,\infty$$

a pro $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ podle de l'Hospitalova pravidla a podle 2.2.5.5 je

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = -C \lim_{x\to 0+} J_\nu(x) \int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\,(J_\nu(\xi))^2} = -C \lim_{x\to 0+} \frac{\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\,(J_\nu(\xi))^2}}{\frac{1}{J_\nu(x)}} = -C \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x\,(J_\nu(x))^2}}{-\frac{J'_\nu(x)}{(J_\nu(x))^2}} =$$
$$= -C \lim_{x\to 0+} \frac{1}{xJ'_\nu} = -C \lim_{x\to 0+} \frac{2}{x\,(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x))}\,.$$

Podle 2.2.5.2 je funkce $x \mapsto J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}$ v pravém okolí nuly ohraničená a tedy $\left|\lim_{x\to 0+} v(x)\right| = \infty$. $\square$

2.2.9 Věta

Je-li $\nu \notin \mathbb{Z}$, jsou Besselovy funkce prvního druhu J_ν a $J_{-\nu}$ řešením rovnice (2.13) a jsou lineárně nezávislé.

D.: Funkce $J_\nu,\ J_{-\nu}$ byly v 2.2.2 nalezeny jako řešení rovnice (2.13). Stačí tedy ověřit tvrzení o nezávislosti.
Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\nu > 0$.
Wronskián funkcí $J_\nu,\ J_{-\nu}$ je

$$\begin{aligned}
W(x, J_\nu, J_{-\nu}) &= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x)\right)' - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} u_\nu(x)\right)' = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(-\frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} u_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u'_{-\nu}(x)\right) - \\
&\quad - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} u_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} u'_\nu(x)\right) = \\
&= u_\nu(x)u'_{-\nu}(x) - u_{-\nu}(x)u'_\nu(x) - \frac{2\nu}{x} u_\nu(x)u_{-\nu}(x)\,.
\end{aligned}$$

Podle 2.2.4 pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ platí $\left|\lim_{x\to 0+} W(x, J_\nu, J_{-\nu})\right| = \infty$, což znamená, že pro nějaké $x > 0$ je $W(x, J_\nu, J_{-\nu}) \neq 0$ a tedy podle známé věty z teorie lineárních homogenních obyčejných diferenciálních rovnic funkce $J_\nu,\ J_{-\nu}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2.13). $\square$

Pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ tedy Besselovy funkce prvního druhu J_ν a J_{-nu} tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2.13). V případě $\nu \in \mathbb{Z}$ máme pouze jedno bázové řešení (sr. 2.2.5.3).

2.2.10 Definice

Funkce Y_ν definovaná pro každé $\nu \in \mathbb{R}$ a každé $x \in (0, \infty)$ vztahem

$$Y_\nu(x) = \lim_{\xi\to\nu} \frac{J_\xi(x)\cos\pi\nu - J_{-\xi}(x)}{\sin\pi\xi}$$

se nazývá *Besselova funkce druhého druhu řádu ν*. (Někdy také *Neumannova funkce*.)

Pokud $\nu \notin \mathbb{Z}$, je jmenovatel zlomku za limitou nenulový a tedy pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ lze psát

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}\,.$$

Je-li $\nu = n \in \mathbb{Z}$, jsou čitatel i jmenovatel zlomku za limitou nulové a limitu lze tedy vypočítat podle de l'Hospitalova pravidla:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x)\right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n}\right)\,.$$

2.2.11 Věta

Funkce Y_ν je řešením rovnice (2.13) pro libovolné $\nu \in \mathbb{R}$. Pro wronskián funkcí J_ν a Y_ν platí $W(x, J_\nu, Y_\nu) = \dfrac{2}{\pi x}$. (Funkce J_ν a Y_ν tedy tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2.13).)

D.: Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, str. 58–76. $\square$

2.2.12 Poznámka

Besselovy funkce druhého druhu splňují stejné vztahy, jako funkce prvního druhu:

$$\begin{aligned}
\left(x^{-\nu} Y_\nu(x)\right)' &= -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x)\,, \\
\left(x^{\nu} Y_\nu(x)\right)' &= x^{\nu} Y_{\nu-1}(x)\,, \\
Y_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x)\,, \\
Y_\nu'(x) &= \frac{1}{2}\left(Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x)\right)
\end{aligned}$$

2.3 Legendreovy polynomy

2.3.1 Definice

Legendreův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definován vztahem

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n\,.$$

Zejména

$$\begin{array}{lll}
P_0(x) = 1 & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_1(x) = x & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{array}$$

Poněvadž

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}\,,$$

platí

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}\,.$$

Tedy pro $m \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
P_{2m} &= \frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-1}}{\mathrm{d}x^{2m-1}} \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k (4m-2k)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-1} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-1}}{\mathrm{d}x^{2m-1}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-1} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-2}}{\mathrm{d}x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)(4m-2k-1)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-2} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-2}}{\mathrm{d}x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)!}{2^{2m} k!(2m-k)!(4m-2k-2)!} x^{4m-2k-2} = \cdots = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (4m-2k)!}{2^{2m} k!(2m-k)!(2m-2k)!} x^{2(m-k)} ,
\end{aligned}$$

analogicky

$$P_{2m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k-2)!}{2^{2m-1} k!(2m-k-1)!(2m-2k-1)!} x^{2(m-k)-1} ,$$

souhrnně

$$P_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} . \tag{2.20}$$

2.3.2 Věta

Legendreův polynom P_n je pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ řešením diferenciální rovnice

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 .$$

D.: Položme $\eta(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$. Pak $\eta'(x) = \frac{2xn(x^2-1)^{n-1}}{2^n n!}$, takže $(x^2-1)\eta'(x) = 2xn\eta(x)$. Derivujme tuto nerovnost $(n+1)$-krát (s využitím Leibnizovy formule):

$$\begin{aligned}
(x^2-1)\eta^{(n+2)}(x) + (n+1)2x\eta^{(n+1)}(x) + \frac{n(n+1)}{2} 2\eta^{(n)}(x) &= 2n \left(x\eta^{(n+1)}(x) + (n+1)\eta^{(n)}(x) \right) , \\
(x^2-1)\eta^{(n+2)}(x) + 2x\eta^{(n+1)}(x) - n(n+1)\eta^{(n)}(x) &= 0 ,
\end{aligned}$$

a poněvadž $\eta^{(n)}(x) = P_n(x)$, tvrzení je dokázáno. □

Rovnici z tvrzení věty lze také zapsat ve tvaru

$$\left((1-x^2)y'(x) \right)' + n(n+1)y(x) = 0 . \tag{2.21}$$

2.3.3 Věta (Orthogonalita Legendreových polynomů)

Pro Legendreovy polynomy platí

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, & m = n. \end{cases}$$

D.: Buďte $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Rovnici (2.21) jednou napíšeme pro $y(x) = P_m(x)$ a vynásobíme $P_n(x)$, podruhé ji napíšeme pro $y(x) = P_n(x)$ a vynásobíme $P_m(x)$:

$$\begin{aligned} \left((1-x^2)P_m'(x)\right)' P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) &= 0\,, \\ \left((1-x^2)P_n'(x)\right)' P_m(x) + n(n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Tyto rovnice odečteme, upravíme a zintegrujeme v mezích od -1 do 1. Dostaneme

$$\begin{aligned} \left((1-x^2)P_m'(x)\right)' P_n(x) - \left((1-x^2)P_n'(x)\right)' P_m(x) + (m(m+1) - n(n+1))P_n(x)P_m(x) &= 0\,, \\ \left((1-x^2)(P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x))\right)' + (m-n)(m+n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0\,, \\ \left[(1-x^2)(P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x))\right]_{-1}^{1} + (m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x &= 0\,, \end{aligned}$$

a poněvadž první sčítanec se rovná nule, platí pro $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x \;=\; 0\,.$$

Pro výpočet $\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \mathrm{d}x$ použijeme n-krát metodu per partes. Pro zjednodušení zápisu označíme $Q(x) = (x^2-1)^n$ a uvědomíme si, že 1 a -1 jsou $2n$-násobné kořeny polynomu Q.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(x) Q^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \left(\left[Q^{(n-1)}(x)Q^{(n)}(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q^{(n+1)}(x)Q^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x \right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(n+1)}(x)Q^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(2n)}(x)Q(x)\mathrm{d}x = \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} (2n)!(x^2-1)^n \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Pro výpočet integrálu $\int_{-1}^{1} (x+1)^n(x-1)^n \mathrm{d}x$ opět použijeme n-krát metodu per partes:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n \mathrm{d}x &= \left[(x+1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(x+1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} (x+1)^{n-1}(x-1)^{n+1}\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{n}{n+1}\left(\left[(x+1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+2}}{n+2}\right]_{-1}^{1} - \frac{n-1}{n+2}\int_{-1}^{1}(x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2}\mathrm{d}x \right) = \\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}(x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2}\mathrm{d}x = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}(-1)^n \int_{-1}^{1}(x-1)^{2n}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n \left[\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1} = -\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n \frac{(-2)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}\,.$$

□

2.3.4 Rekurentní vztahy pro Legendreovy polynomy

Pomocí (2.20) lze odvodit:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots \\ P_n'(x) &= \frac{n}{1-x^2} \left(P_{n-1}(x) - x P_n(x)\right)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

2.4 Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

2.4.1 Definice

Čebyševův-Laguerreův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro každé $x > 0$ definován vztahem

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right).$$

Zejména

$L_0(x) = 1$ $\quad$ $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ $\quad$ $L_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

$L_1(x) = -x + 1$ $\quad$ $L_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ $\quad$ $L_5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

2.4.2 Explicitní vyjádření Čebyševova-Laguerreova polynomu

Nechť $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x^k$. S využitím Leibnizovy formule dostaneme

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \mathrm{e}^{-x} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} x^n = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-x} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}\,, \tag{2.22}$$

takže

$$a_{nk} = \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{a_{n(k+1)}}{a_{nk}} = -\frac{k!}{(k+1)!} \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = -\frac{k!n!k!(n-k)!}{(k+1)!n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k-n}{(k+1)^2}\,,$$

tedy

$$a_{n(k+1)} = \frac{k-n}{(k+1)^2} a_{nk}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \qquad a_{n0} = \binom{n}{0} = 1\,.$$

2.4.3 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

S využitím (2.22) dostaneme

$$\begin{aligned} nL_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n}{k!} x^k + n \,, \\ xL_n'(x) &= x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} x^k \,, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} nL_n(x) - xL_n'(x) &= n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{n}{k} - 1 \right) x^k = n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-k}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{k!} x^k = \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \frac{x^k}{k!} = nL_{n-1}(x) \,. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme vyjádření derivace Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí tohoto polynomu a polynomu nižšího stupně:

$$L_n'(x) = \frac{n}{x} \left(L_n(x) - L_{n-1}(x) \right) . \tag{2.23}$$

S využitím (2.22) také dostaneme

$$\begin{aligned} L_n'(x) - L_{n-1}'(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right] \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{n}{n-k} - 1 \right] \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \frac{x^k}{k!} = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{x^k}{k!} = -L_{n-1}(x) \,. \end{aligned}$$

Máme tedy další rekurentní formuli

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) = 0 \,. \tag{2.24}$$

Z formulí (2.23) a (2.24) dostaneme

$$\frac{n}{x} \left(L_n(x) - L_{n-1}(x) \right) = L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x) \,,$$

tedy

$$L_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n} \right) L_{n-1}(x) + \frac{x}{n} L_{n-1}'(x) \,, \tag{2.25}$$

což je formule pro výpočet Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí Čebyševova-Laguerreova polynomu stupně nižšího a jeho derivace. Napíšeme-li tuto formuli pro $n+1$ místo pro n a za L_n' dosadíme z (2.23), dostaneme

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1} \right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} \frac{n}{x} \left(L_n(x) - L_{n-1}(x) \right) .$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \,.$$

Tento vzorec lze použít k postupnému výpočtu Čebyševových-Laguerreových polynomů z prvních dvou

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

2.4.4 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Derivováním rovnice (2.23) dostaneme

$$L_n''(x) \;=\; -\frac{n}{x^2}\left(L_n(x) - L_{n-1}(x)\right) + \frac{n}{x}\left(L_n'(x) - L_{n-1}'(x)\right).$$

Do této rovnice dosadíme z (2.24) za výraz $L_n'(x) - L_{n-1}'(x)$ a upravíme:

$$\begin{aligned} xL_n''(x) &= -\frac{n}{x}\left(L_n(x) - L_{n-1}(x)\right) - nL_{n-1}(x)\,, \\ xL_n''(x) &= -\frac{n}{x}L_n(x) + \left(\frac{n}{x} - n\right) L_{n-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Za výraz $L_{n-1}(x)$ v poslední rovnici dosadíme z (2.23) a dostaneme

$$xL_n''(x) \;=\; -\frac{n}{x}L_n(x) + \frac{n(1-x)}{x}\left(-\frac{x}{n}L_n'(x) + L_n(x)\right),$$

po úpravě

$$xL_n''(x) \;=\; (x-1)L_n'(x) - nL_n(x)\,.$$

To znamená, že Čebyševovy-Laguerreovy polynomy L_n jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(x\mathrm{e}^{-x}y'\right)' + n\mathrm{e}^{-x}y = 0.$$

Čebyševovy-Laguerreovy polynomy jsou řešením této rovnice s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}y(x) = 0.$$

2.4.5 Věta (Orthonormalita Čebyševových-Laguerrových polynomů)

Pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy platí

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}.$$

D.: Pro každé $0 < l < n$ platí

$$\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+n} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(k+n)(k+n-1)\cdots(k+l+1)x^{k+l} \;=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(k+n)!}{(k+l)!}x^{k+l},$$

takže

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; 0\,; \tag{2.26}$$

také platí $\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) = P(x)\mathrm{e}^{-x}$, kde $P(x)$ je nějaký polynom, takže

$$\lim_{x\to\infty} L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; 0 \tag{2.27}$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$.

Nechť pro určitost je $m \leq n$. Uvažujme integrál

$$J \;=\; \int_0^\infty L_m(x)L_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

K jeho výpočtu použijeme m krát metodu per partes a vztahy (2.26), (2.27):

$$J = \frac{1}{n!}\left(\left[L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty L'_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\right) =$$
$$= -\frac{1}{n!}\int_0^\infty L'_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^m}{n!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

S využitím 2.4.2 dostaneme

$$J = \frac{(-1)^m}{n!}\int_0^\infty \frac{(-1)^m}{m!}\binom{m}{m}m!\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $m = n$, pak podle 2.1.2 je

$$J = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = \frac{1}{n!}n! = 1\,,$$

Jeli $m < n$, pak podle (2.26) a (2.26) je

$$J = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\right]_0^\infty = 0\,.$$

□

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2}L_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\infty)$.

2.4.6 Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Zobecněný Čebyševův-Laguerreův polynom stupně $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ je pro všechna reálná $x > 0$ a $s > -1$ definován vztahem

$$Q_n^s(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}x^{-s}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^{n+s}\right).$$

Tyto polynomy jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x) + (s+1-x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(x^{s+1}\mathrm{e}^{-x}y'\right)' + n\mathrm{e}^{-x}x^s y = 0.$$

Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy splňují rekurentní formule

$$(n+1)Q_{n+1}^s(x) = (2n+s+1-x)Q_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_n^s(x) = \frac{1}{x}\left(nQ_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x)\right),$$
$$Q_n^{s+1}(x) - Q_{n-1}^{s+1}(x) = Q_n^s(x)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_n^s(x) = -Q_{n-1}^{s+1}(x)$$

a rovnici

$$\int_0^\infty Q_m^s(x)Q_n^s(x)\mathrm{e}^{-x}x^s\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, & m = n\\ 0, & m \neq n\end{cases}.$$

Z poslední rovnice plyne, že funkce

$$\Phi_n^s(x) \;=\; x^{s/2}\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)}}\,Q_n^s(x), \quad n=0,1,2,\dots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\infty)$.

2.5 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

2.5.1 Definice

Čebyševův-Hermiteův polynom stupně $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ je pro každé $x\in\mathbb{R}$ definován vztahem

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Zejména

$$\begin{array}{lll} H_0(x)=1 & H_2(x)=4x^2-2 & H_4(x)=16x^4-48x^2+12 \\ H_1(x)=2x & H_3(x)=8x^3-12x & H_5(x)=32x^5-160x^3+120x \end{array}$$

2.5.2 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím Leibnizovy formule pro výpočet vyšší derivace součinu funkcí dostaneme pro každé $n\geq 1$

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) \;&=\; (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\mathrm{e}^{-x^2} \;=\; (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right) \;=\; 2(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x\mathrm{e}^{-x^2}\right) \;= \\ &=\; 2(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}x\,\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\mathrm{e}^{-x^2} \;=\; 2(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\left[\binom{n}{0}x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}+\binom{n}{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\right] \;= \\ &=\; 2x(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}-2n(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2} \;=\; 2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\,, \end{aligned}$$

tedy

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0\,. \tag{2.28}$$

Této rovnice lze využít k postupnému výpočtu Čebyševových-Hermiteových polynomů pomocí prvních dvou.

Dále platí

$$\begin{aligned} H_n'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}\right] \;=\; 2x(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}-(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\mathrm{e}^{-x^2} \;= \\ &=\; 2xH_n(x)-H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Odtud s využitím (2.28) dostaneme

$$H_n'(x) \;=\; 2nH_{n-1}(x)\,, \tag{2.29}$$

tj. vyjádření derivace polynomu H_n pomocí polynomu nižšího stupně.

2.5.3 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím vztahů (2.29) a (2.28) dostaneme

$$\begin{aligned} H_n''(x) \;&=\; (2nH_{n-1}(x))' \;=\; (2xH_n(x)-H_{n+1}(x))' \;=\; 2H_n(x)+2xH_n'(x)-H_{n+1}'(x) \;= \\ &=\; 2H_n(x)+2xH_n'(x)-2(n+1)H_n(x) \;=\; 2xH_n'(x)-2nH_n(x)\,. \end{aligned}$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ je tedy Čebyševův-Hermiteův polynom $H_n(x)$ řešením diferenciální rovnice

$$y''(x)-2xy'(x)+2ny(x) \;=\; 0\,, \tag{2.30}$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(\mathrm{e}^{-x^2}y'\right)' + 2n\mathrm{e}^{-x^2}y \;=\; 0\,.$$

Poznamenejme ještě, že Čebyševův-Hermiteův polynom je řešením rovnice (2.30) s okrajovými podmínkami

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x^2}y(x) \;=\; \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x^2}y(x) \;=\; 0\,.$$

2.5.4 Věta (Orthogonalita Čebyševových-Hermiteových polynomů)

Pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy platí

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 2^n n!\sqrt{\pi}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

D.: Pro určitost budeme předpokládat, že $m \le n$. Označme

$$J \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \;=\; (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme m krát metodu per partes; přitom využijeme (2.29) a skutečnost, že pro libovolný polynom P platí

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x^2}P(x) \;=\; \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x^2}P(x) \;=\; 0\,.$$

$$J \;=\; (-1)^n\left(\left[H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m'(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right) \;=$$

$$=\; (-1)^{n-1}2m\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \;=\; (-1)^{n-2}2m2(m-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{m-2}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \;=$$

$$=\; \cdots \;=\; (-1)^{n-m}2^m m!\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $m < n$, pak

$$J \;=\; (-1)^{n-m}2^m m!\left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} \;=\; 0\,;$$

je-li $m = n$, pak podle (2.3) je

$$J \;=\; 2^n n!\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \;=\; 2^n n!\sqrt{\pi}\,.$$

$\square$

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\,H_n(x)\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(-\infty,\infty)$.

2.5.5 Rekurentní vztahy pro koeficienty Čebyševových-Hermiteových polynomů

Hledáme řešení rovnice (2.30) ve tvaru mocninné řady $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x^k$.
Platí

$$
\begin{aligned}
2ny(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2n a_{nk} x^k \,, \\
2xy'(x) &= 2x \sum_{k=0}^{\infty} k a_{nk} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2k a_{nk} x^k \,, \\
y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_{nk} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_{nk} x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{n(k+2)} x^k \,.
\end{aligned}
$$

Po dosazení do rovnice (2.30) dostaneme

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) a_{n(k+2)} - 2k a_{nk} + 2n a_{nk} \right] x^k = 0 \,,
$$

a tedy

$$
a_{n(k+2)} = \frac{2(n-k)}{(k+2)(k+1)} \, a_{nk} \,, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n-2.
$$

Kapitola 3

Distribuce

3.1.1 Základní pojmy

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na celém prostoru $\mathbb{R}^n$. *Nosič funkce* φ definujeme jako uzávěr množiny $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$ a značíme ho $\operatorname{Supp}\varphi$.

Symbolem $\mathcal{D}$ označíme množinu funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$, které zde jsou třídy C^∞ (mají spojité všechny parciální derivace libovolného řádu) a jejichž nosič je kompaktní množina.

Na množině $\mathcal{D}$ definujeme metriku ρ vztahem

$$\rho(\varphi, \psi) \;=\; \sup\left\{ \left| \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} (\varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})) \right| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\, (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \right\}.$$

Množinu $\mathcal{D}$ s touto metrikou nazýváme *prostor testovacích funkcí*, jeho prvky nazýváme *testovací funkce*.

Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$T(\varphi + \psi) \;=\; T(\varphi) + T(\psi), \quad T(c\varphi) \;=\; cT(\varphi)\,,\; c \in \mathbb{R}$$

nazýváme *lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí*. Obraz funkce φ při zobrazení T budeme značit

$$T(\varphi),\; T \cdot \varphi,\; T\varphi.$$

Množinu všech lineárních funkcionálů $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazýváme *prostor duální k* $\mathcal{D}$ a značíme ji $\mathcal{D}'$.

3.1.2 Definice

Spojitý lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá *distribuce*.

Podrobněji: Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazveme distribuce, jestliže

$(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}) \qquad T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi\,,$

$(\forall \varphi \in \mathcal{D})\,(\forall c \in \mathbb{R}) \qquad T(c\varphi) = cT\varphi\,,$

$(\forall \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D})\,(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \qquad \varphi_n \to \varphi$ v prostoru $(\mathcal{D}, \rho) \;\Rightarrow\; T\varphi_n \to T\varphi$ v $\mathbb{R}$ s přirozenou metrikou.

3.1.3 Příklady distribucí

1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každou kompaktní množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existuje konečný integrál $\int_K f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$ (tzv. *lokálně integrabilní funkce*). Definujme $T_f \in \mathcal{D}'$ vztahem

   $$T_f\varphi \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

   $T_f\varphi$ budeme také značit $\langle\; f \;|\; \varphi \;\rangle$, nebo podrobněji $\langle\; f(\mathbf{x}) \;|\; \varphi(\mathbf{x}) \;\rangle$.
   Distribuce $T \in \mathcal{D}'$ taková, že existuje lokálně integrabilní funkce f pro niž $T\varphi = \langle\; f \;|\; \varphi \;\rangle$ pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}$, se nazývá *regulární distribuce*. Distribuce, která není regulární, se někdy nazývá *singulární*.
   Každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ lze považovat za regulární distribuci. Tedy $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$. Proto se distribuce někdy nazývají *zobecněné funkce*.

2. *Diracova distribuce* δ přiřadí každé testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ hodnotu $\varphi(0)$. Diracova distribuce není regulární. Přesto se používá zápis

$$\left\langle\ \delta\ \middle|\ \varphi\ \right\rangle\ =\ \left\langle\ \delta(\mathbf{x})\ \middle|\ \varphi(\mathbf{x})\ \right\rangle\ =\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\ =\ \varphi(0)\,.$$

3.1.4 Nosič distribuce

Řekneme, že distribuce $T \in \mathcal{D}'$ je na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *nulová*, jestliže $T\varphi = 0$ pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ takovou, že $\operatorname{Supp}\varphi \subseteq \Omega$.
Nosič distribuce T je nejmenší (vzhledem k množinové inklusi) uzavřená množina taková, že na jejím komplementu je T nulová.

3.1.5 Základní operace v prostoru distribucí

- Součet distribucí $T, S \in \mathcal{D}'$:
  $T + S \in \mathcal{D}'$ je distribuce, pro niž platí
  $$(T + S)\varphi\ =\ T\varphi + S\varphi$$
  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.
- Násobení distribuce $T \in \mathcal{D}'$ funkcí $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ třídy C^∞:
  Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$ testovací funkce, pak φ má kompaktní nosič. To znamená, že také funkce $a\varphi$ má kompaktní nosič, tedy $a\varphi \in \mathcal{D}$.
  $aT \in \mathcal{D}'$ je distribuce, pro niž platí
  $$(aT)\varphi\ =\ T(a\varphi)$$
  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.
- Translace (posunutí) distribuce $T \in \mathcal{D}$ o vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$:
  Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$, pak funkce $\varphi_{\vec{h}}$ definovaná vztahem $\varphi_{\vec{h}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} + \vec{h})$ má kompaktní nosič, je tedy také testovací funkcí.
  Translace distribuce $T \in \mathcal{D}'$ o $\vec{h}$ je distribuce $\tau_{\vec{h}}T \in \mathcal{D}'$, pro niž platí
  $$\left(\tau_{\vec{h}}T\right)\varphi\ =\ T\varphi_{\vec{h}}$$
  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.
  Pro regulární distribuci určenou funkcí f platí
  $$\left(\tau_{\vec{h}}T_f\right)\varphi\ =\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x} + \vec{h})\mathrm{d}\mathbf{x}\ =\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \vec{h})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Nechť $\mathbf{x}_0 = 0 + \vec{h}$. Translace Diracovy distribuce o vektor $\vec{h}$, je distribuce $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, pro niž platí

$$\left\langle\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ \middle|\ \varphi(\mathbf{x})\ \right\rangle\ =\ \left\langle\ \delta(\mathbf{x})\ \middle|\ \varphi(\mathbf{x} + \vec{h})\ \right\rangle\ =\ \varphi(\mathbf{x}_0)$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}$. Tato distribuce se nazývá *Diracova distribuce soustředěná v bodě* $\mathbf{x}_0$.

3.1.6 Derivování distribucí

Nechť f je diferencovatelná (a tedy lokálně integrabilní) funkce, $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\ &=\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n\ =\\
&=\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left([f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n\ =\\
&=\ -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n\ =\ -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\,,
\end{aligned}$$

poněvadž $\mathrm{Supp}(f\varphi)$ je kompaktní.
Jako zobecnění této úvahy definujeme:

Parciální derivace podle první proměnné distribuce $T \in \mathcal{D}'$ je distribuce $\frac{\partial}{\partial x_1}T$, pro niž platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}T\right)\varphi \;=\; -T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}$.

Obecně

$$\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}T\right)\varphi \;=\; (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_n}T\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\varphi\right).$$

Každá distribuce má derivace libovolného řádu.

Každá lokálně integrabilní funkce f určuje regulární distribuci. Tato distribuce má derivaci libovolného řádu. V tomto smyslu lze říci, že každá lokálně integrabilní funkce f má derivaci libovolného řádu. Tato distribuce však obecně není funkcí ale distribucí. Nazýváme ji *distributivní derivací funkce f*.

3.1.7 Heavisidova skoková funkce (distribuce)

Funkce $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

je lokálně integrabilní. Určuje tedy regulární distribuci, pro niž platí

$$\langle\; H \mid \varphi \;\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_{0}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Dále platí

$$\langle\; H' \mid \varphi \;\rangle \;=\; -\langle\; H \mid \varphi' \;\rangle \;=\; -\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x \;=\; -\left[\varphi(x)\right]_0^{\infty} \;=\; \varphi(0) \;=\; \langle\; \delta \mid \varphi \;\rangle\,,$$

tedy distributivní derivací funkce H je Diracova distribuce (soustředěná v bodě 0).

Obecně: Funkce $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

určuje regulární distribuci:

$$\begin{aligned}\langle\; H \mid \varphi \;\rangle \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H(x_1, x_2, \ldots, x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \;= \\ &=\; \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cdots\int_{0}^{\infty}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\,.\end{aligned}$$

Poněvadž

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} H \;\middle|\; \varphi \right\rangle &= (-1)^n \left\langle H \;\middle|\; \tfrac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \varphi \right\rangle = \\
&= (-1)^n \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \\
&= (-1)^n \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2 \partial x_3 \cdots \partial x_n} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right]_{x_1=0}^\infty \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \cdots \mathrm{d}x_n = \\
&= -(-1)^n \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2 \partial x_3 \cdots \partial x_n} \varphi(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \cdots \mathrm{d}x_n = \cdots = \\
&= (-1)^{2n} \varphi(0, 0, \ldots, 0) = \varphi(0, 0, \ldots, 0) \,,
\end{aligned}
$$

je $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} H = \delta$.

3.1.8 Distributivní derivace funkcí jedné proměnné

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je třídy C^∞ na každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ a nechť každá její derivace je lokálně integrabilní. Tato funkce určuje regulární distribuci T_f.

Označme $\sigma_m = \lim\limits_{x \to 0+} f^{(m)}(x) - \lim\limits_{x \to 0-} f^{(m)}(x)$ a $T'_f = \dfrac{\partial}{\partial x} T$, $T''_f = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} T$ $\ldots$, $T_f^{(k)} = \dfrac{\partial^k}{\partial x^k} T$.

Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}$ platí

$$
\begin{aligned}
T'_f \varphi &= -\left\langle f(x) \;\middle|\; \varphi'(x) \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} f(x) \varphi'(x) \mathrm{d}x - \int_0^\infty f(x) \varphi'(x) \mathrm{d}x = \\
&= -\left[f(x) \varphi(x) \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 f'(x) \varphi(x) \mathrm{d}x - \left[f(x) \varphi(x) \right]_0^\infty + \int_0^\infty f'(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \\
&= \lim_{x \to 0+} f(x) \varphi(x) - \lim_{x \to 0-} f(x) \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \\
&= \varphi(0) \left(\lim_{x \to 0+} f(x) - \lim_{x \to 0-} f(x) \right) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \\
&= \sigma_0 \varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \sigma_0 \left\langle \delta \;\middle|\; \varphi \right\rangle + \left\langle f' \;\middle|\; \varphi \right\rangle = \sigma_0 \left\langle \delta \;\middle|\; \varphi \right\rangle + T_{f'} \varphi \,,
\end{aligned}
$$

symbolicky

$$
T'_f = \sigma_0 \delta + T_{f'} \,.
$$

Obecně

$$
T_f^{(k)} \varphi = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} \sigma_m \varphi^{(k-m-1)}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) \varphi(x) \mathrm{d}x \,,
$$

Symbolicky

$$
T_f^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \delta^{(k-m-1)} + T_{f^{(k)}} \,.
$$

3.1.9 Konvergence distribucí

Řekneme, že posloupnost distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}'$ *konverguje pro* $k \to \infty$ *k distribuci* $T \in \mathcal{D}'$ a píšeme

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T\,,$$

jestliže pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ je $\lim\limits_{k\to\infty} T_k\varphi = T\varphi$ (v tomto případě jde o konvergenci číselných posloupností).

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}'$ je posloupnost distribucí taková, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ existuje limita posloupnosti čísel $\{T_k\varphi\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$T(\varphi) \;=\; \lim_{k\to\infty} T_k\varphi\,.$$

Pak T je lineární (to plyne z linearity každé z distribucí T_k a z linearity operátoru limity posloupností) a spojité (důkaz např. v: Laurent Schwartz: Théorie des distributions, Paris 1973). To znamená, že T je distribuce.

3.1.10 δ-vytvořující posloupnosti

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost lokálně integrabilních funkcí na $\mathbb{R}^n$ takových, že $\lim\limits_{k\to\infty} T_{f_k} = \delta$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle\; f_k \;\middle|\; \varphi \;\right\rangle = \varphi(0)$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *δ-vytvořující posloupnost*, funkce f_k se nazývají *impulsní funkce*.

Příklady δ-vytvořujících posloupností:

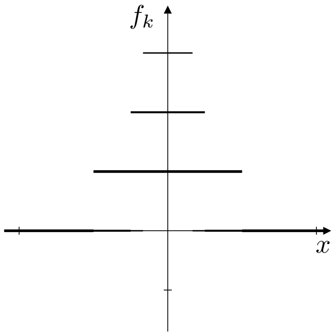
$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} k, & |x| \le \dfrac{1}{2k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{2k} \end{cases}, \qquad f_k(x) \;=\; \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \le \dfrac{1}{k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{k} \end{cases},$$

$$f_k(x) \;=\; \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-kx^2/2}\,, \qquad f_k(x) \;=\; \frac{\sin kx}{\pi x}\,,$$

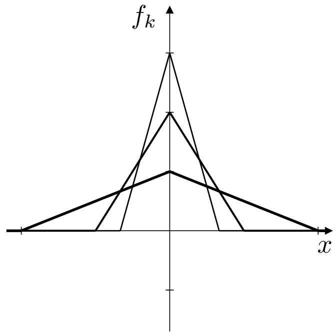
$$f_k(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{\alpha_k}{x^2+\alpha_k^2},\ \text{ kde } \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ je libovolná posloupnost kladných čísel taková, že } \lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0\,,$$

$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\ell} + \dfrac{1}{\ell}\sum\limits_{m=1}^{k} \cos\dfrac{\pi m}{\ell}x, & |x| \le \ell \\ 0, & |x| > \ell \end{cases}.$$

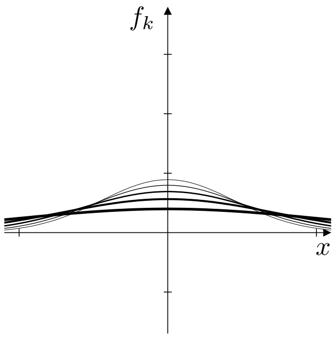
Na následujících obrázcích je znázorněno několik prvních členů některých δ-vytvořujících posloupností. S rostoucím k se zmenšuje síla čáry.



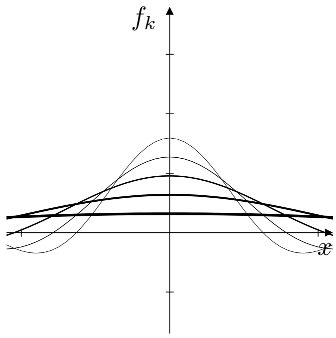
$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \le 1/(2k) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



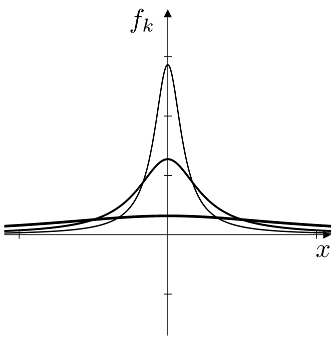
$$f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \le 1/k \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



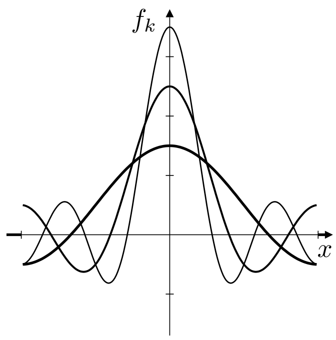
$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kx^2}$$



$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x}$$



$$f_k(x) = \frac{1}{\pi}\frac{k^2}{k^4x^2 + 1}$$



$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} \cos n\pi x, & |x| \le 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Kapitola 4

Metody charakteristik

4.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

4.1.1 Lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4.1}$$

Řešením je funkce $u = u(x,y)$.

Hledáme vrstevnice funkce u. Nechť mají parametrické vyjádření $x = x(t)$, $y = y(t)$. Pak $u\left(x(t), y(t)\right) = const$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\left(x(t), y(t)\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

Porovnáním s (4.1) vidíme, že pokud funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ jsou řešeními systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x,y), \\ y' &= b(x,y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

pak jsou parametrickými rovnicemi vrstevnic řešení rovnice (4.1). Systém (4.2) se nazývá *charakteristická soustava rovnic rovnice* (4.1), jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (4.1).

Nechť rovnice $\varphi(x,y) = c$ je implicitním popisem charakteristik rovnice (4.1), tj. vrstevnic řešení této rovnice, a Φ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Pak $u = u(x,y) = \Phi\left(\varphi(x,y)\right)$ je obecným řešením rovnice (4.1).

D.: Podle „řetězového pravidla" pro parciální derivaci složené funkce je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Phi'\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \Phi'\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, na charakteristikách $x = x(t)$, $y = y(t)$ platí $\varphi\left(x(t), y(t)\right) = c$ a tedy

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi'\left(\varphi(x,y)\right)\left(a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \Phi'\left(\varphi(x,y)\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) =$$

$$= \Phi'\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi\left(x(t), y(t)\right) = 0.$$

□

4.1.2 Okrajová úloha pro lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Nechť $x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ je parametrický popis rovinné křivky, která protíná každou z charakteristik rovnice (4.1) právě jednou, a nechť f je funkce se stejným definičním oborem jako φ a ψ. Podmínka

$$u\left(\varphi(\tau), \psi(\tau)\right) = f(\tau) \tag{4.3}$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (4.1).

Heuristická úvaha: Podmínku (4.3) si lze představit jako prostorovou křivku. Dále si lze představit, že máme vrstevnice řešení, tj. charakteristiky, vytvořené např z drátu. Tyto vrstevnice umisťujeme na křivku vyjadřující okrajovou podmínku.

Nechť charakteristiky rovnice (4.1), tj. trajektorie systému (4.2), mají parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2), \\ y &= y(t, c_1, c_2), \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde c_1, c_2 jsou nějaké konstanty. Dále nechť okrajová podmínka je parametricky vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\tau), \\ y &= \psi(\tau), \\ u &= f(\tau). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pro jednu hodnotu parametru t, řekněme pro $t = 0$, vrstevnice protíná křivku, na níž je zadána okrajoví podmínka, tedy

$$\begin{aligned} x(0, c_1, c_2) &= \varphi(\tau), \\ y(0, c_1, c_2) &= \psi(\tau). \end{aligned}$$

Z těchto rovnic vypočítáme konstanty c_1, c_2 v závislosti na parametru τ, tedy $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$. Toto vyjádření dosadíme do (4.4) a dostaneme soustavu dvou rovic pro dvě neznámé t, τ:

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1(\tau), c_2(\tau)), \\ y &= y(t, c_1(\tau), c_2(\tau)). \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme; zejména vyjádříme τ pomocí x a y, tj. $\tau = \tau(x, y)$ a dosadíme do poslední z rovnic (4.5). Tím dostaneme řešení úlohy (4.1), (4.3) ve tvaru $u(x, y) = f\left(\tau(x, y)\right)$.

4.1.3 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \tag{4.6}$$

Řešením je opět funkce $u = u(x, y)$. Předpokládejme, že toto řešení je implicitně dáno rovnicí $F(x, y, u) = 0$, tedy

$$F(x, y, u(x, y)) = 0.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x, y, u(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(x, y, u(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

První z těchto rovnic vynásobíme funkcí a, druhou z nich funkcí b, sečteme je a upravíme s využitím (4.6):

$$0 = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Pokud funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $u = u(t)$ jsou řešením následující *charakteristické soustavy rovnic rovnice* (4.6)

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y, u), \\ y' &= b(x, y, u), \\ u' &= c(x, y, u), \end{aligned} \tag{4.7}$$

pak podle předchozí rovnosti platí

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\left(x(t), y(t), u(t)\right) = 0.$$

Trajektorie systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic (4.7) — prostorové křivky — se nazývají *charakteristiky rovnice* (4.6). Z předchozího výpočtu plyne, že podél charakteristik je funkce F konstantní.

Nechť rovnice $\varphi_1(x,y,u) = c_1$ a $\varphi_2(x,y,u) = c_2$ jsou implicitním popisem charakteristik rovnice (4.6) (jednorozměrné variety v třírozměrném prostoru) a Φ je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. Pak funkce $u = u(x,y)$ implicitně zadaná rovnicí

$$\Phi\left(\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)\right) = 0 \tag{4.8}$$

je obecným řešením rovnice (4.6).

D.: Rovnici (4.8), v níž u považujeme za funkci proměnných x a y, derivujme parciálně podle proměnné x:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Označíme-li $A = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}$, dostaneme z předchozí rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right).$$

Analogickým postupem bychom dostali

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right).$$

Poněvadž na charakteristikách platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_1\left(x(t), y(t), u(t)\right) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_2\left(x(t), y(t), u(t)\right) = 0$$

dostaneme vzhledem k (4.7):

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}a + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}b\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}a + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}b\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_1\left(x(t), y(t), u(t)\right) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_2\left(x(t), y(t), u(t)\right) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = c.$$

□

Nechť $x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ je parametrický popis nějaké rovinné křivky, a nechť f je reálná funkce se stejným definičním oborem jako funkce φ, ψ. Podmínka

$$u\left(\varphi(\tau), \psi(\tau)\right) = f(\tau) \tag{4.9}$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (4.6). Okrajovou úlohu řešíme analogicky jako okrajovou úlohu (4.1), (4.3):

Nechť charakteristiky rovnice (4.6) mají parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, c_3),\\ y &= y(t, c_1, c_2, c_3),\\ u &= u(t, c_1, c_2, c_3), \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou nějaké konstanty. Má-li soustava rovnic

$$\begin{aligned} x(0,c_1,c_2,c_3) &= \varphi(\tau), \\ y(0,c_1,c_2,c_3) &= \psi(\tau), \\ u(0,c_1,c_2,c_3) &= f(\tau) \end{aligned} \tag{4.11}$$

pro neznámé c_1, c_2, c_3 řešení $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $c_3 = c_3(\tau)$, dosadíme je do prvních dvou rovnic soustavy (4.10):

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1(\tau), c_2(\tau), c_3(\tau)), \\ y &= y(t, c_1(\tau), c_2(\tau), c_3(\tau)). \end{aligned}$$

Má-li tato soustava rovnic řešení $\tau = \tau(x,y)$, $t = t(x,y)$, dosadíme je do třetí z rovnic (4.10). Tím dostaneme řešení úlohy (4.6), (4.9) ve tvaru

$$u = u\left(t(x,y), c_1(\tau(x,y)), c_2(\tau(x,y)), c_3(\tau(x,y))\right).$$

4.1.4 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnici

$$a_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u(x_1,\dots,x_n)}{\partial_n} = f(x_1,\dots,x_n,u), \tag{4.12}$$

kde $a_1,\dots,a_n, f$ jsou spojité funkce $n+1$ proměnných a u je (hledaná) funkce n proměnných, nazýváme *quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu*; v případě $f \equiv 0$ *homogenní*, v opačném *nehomogenní*. Pokud funkce $a_1,\dots,a_n$ nezávisí na poslední proměnné a funkce f závisí na poslední proměnné lineárně, nazýváme tuto rovnici *lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu*.

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) &= a_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)), \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t) &= a_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= f(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)), \end{aligned}$$

nazýváme *(rozšířená) charakteristická soustava rovnice* (4.12). Trajektorie $\big(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)\big)$ řešení charakteristické soustavy (křivky v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$) nazýváme *charakteristiky rovnice* (4.12).

Buď $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená množina a

$$\Gamma = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \varphi_1(s_1,\dots,s_{n-1}),\dots,x_n = \varphi_n(s_1,\dots,s_{n-1}), (s_1,\dots,s_{n-1}) \in D\}$$

regulární $(n-1)$-rozměrná nadplocha v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$. Dále buď $u_0 = u_0(s_1,\dots,s_{n-1})$ spojitá funkce definovaná na D. Podmínka

$$u(\varphi_1(s_1,\dots,s_{n-1}),\dots,\varphi_n(s_1,\dots,s_{n-1})) = u_0(s_1,\dots,s_{n-1}), \qquad (s_1,\dots,s_{n-1}) \in D \tag{4.13}$$

se nazývá *okrajová podmínka* pro rovnici (4.12).

Ze spojitosti funkcí $a_1,\dots,a_n,\ f$ plyne, že charakteristická soustava s Cauchyovými podmínkami

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \varphi_1(s_1,\dots,s_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_n(0) &= \varphi_n(s_1,\dots,s_{n-1}), \\ u(0) &= u_0(s_1,\dots,s_{n-1}), \end{aligned}$$

má pro každé $(s_1,\dots,s_{n-1})$ řešení (podle Peanovy věty, viz např. Kalas J., Ráb M.: Obyčejné diferenciální rovnice, MU 2001, str. 67). Označme toto řešení

$$(\psi_1(t,s_1,\dots,s_{n-1}),\dots,\psi_n(t,s_1,\dots,s_{n-1}),\psi_{n+1}(t,s_1,\dots,s_{n-1}))\,.$$

Platí

$$\psi_1(0,s_1,\dots,s_{n-1})=\varphi_1(s_1,\dots,s_{n-1}),\ \dots\ ,\psi_n(0,s_1,\dots,s_{n-1})=\varphi_n(s_1,\dots,s_{n-1})\,,$$
$$\psi_{n+1}(0,s_1,\dots,s_{n-1})=u_0(s_1,\dots,s_{n-1})$$

tedy

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial s_j}(0,s_1,\dots,s_{n-1})=\frac{\partial\varphi_i}{\partial s_j}(s_1,\dots,s_{n-1})\,,\ i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots n-1,\quad \text{pro každé } (s_1,\dots,s_{n-1})\in D$$

a dále

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}(0,s_1,\dots,s_{n-1})=a_i(\varphi_1(s_1,\dots,s_{n-1}),\dots,\varphi_n(s_1,\dots,s_{n-1}),u_0((s_1,\dots,s_{n-1}))\,.$$

Funkcemi $\psi_1,\dots,\psi_n$ je určeno zobrazení $\Psi:\mathbb{R}\times D\to\mathbb{R}^n$. Jacobián $J=J(s_1,\dots,s_{n-1})$ zobrazení Ψ v bodě $(0,s_1,\dots,s_{n-1})$ je

$$\begin{vmatrix} a_1(\varphi_1(s_1,\dots,s_{n-1}),\dots,\varphi_n(s_1,\dots,s_{n-1}) & \dots & a_n(\varphi_1(s_1,\dots,s_{n-1}),\dots,\varphi_n(s_1,\dots,s_{n-1}) \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s_1}(s_1,\dots,s_{n-1}) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial s_1}(s_1,\dots,s_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s_{n-1}}(s_1,\dots,s_{n-1}) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial s_{n-1}}(s_1,\dots,s_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Je-li $J(s_1,\dots,s_{n-1})\neq 0$ pro každé $(s_1,\dots,s_{n-1})\in D$, existuje inversní zobrazení $\Psi^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\times D$ (podle věty o existenci inversního zobrazení, viz např. Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU 1999, str. 84).

Položme $u(x_1,\dots,x_n)=\psi_{n+1}\left(\Psi^{-1}(x_1,\dots,x_n)\right)$. Pak u je řešení úlohy (4.12), (4.13):

$$\sum_{k=1}^n a_k\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\partial t}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial x_k}\right) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^n\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial s_j}\sum_{k=1}^n\frac{\partial s_j}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\partial t}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f\,.$$

Toto řešení je jediné.

4.2 Klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu

Rovnici

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2u(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}+c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\,, \tag{4.14}$$

kde u je (hledaná) funkce a $a_{ij},\ b_i,\ c,\ f,\ i=1.2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,n$ jsou funkce n proměnných takové, že jejich definiční obory mají neprázdný průnik D, $a_{ij}(\mathbf{x})=a_{ji}(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}\in D$ a existuje dvojice indexů $i,\ j$, pro něž $a_{ij}\not\equiv 0$ nazýváme *lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu*; v případě $f\equiv 0$ *homogenní*, v opačném *nehomogenní.*

Pro homogenní rovnici platí *princip superpozice:* Je-li α libovolná konstanta a u_1, u_2 jsou řešení rovnice

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2u(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}+c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0\,,$$

pak také αu_1 a $u_1 + u_2$ jsou řešením této rovnice. (Platnost tohoto tvrzení lze ověřit přímým dosazením.) Funkce $u \equiv 0$ je zřejmě také řešením této rovnice. Odtud plyne, že množina všech řešení homogenní rovnice tvoří vektorový prostor.

Buď $\mathbf{x}_0 \in D$ libovolný bod. Pak $A = (a_{ij}(\mathbf{x}_0))$ je symetrická matice typu $n \times n$. Touto maticí je definována kvadratická forma $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \;=\; (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, A\, (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}_0)\xi_i\xi_j\,.$$

Platí Sylvesterův [1814 – 1897] zákon setrvačnosti kvadratických forem: Existuje regulární matice B typu $n \times n$ a jednoznačně určená přirozená čísla $k,\ m,\ 0 \le k \le m \le n$ taková, že po transformaci

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \;=\; B\, (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$$

má kvadratická forma Ψ tvar $\sum\limits_{i=1}^{k} \eta_i^2 - \sum\limits_{i=k+1}^{m} \eta_i^2$. (Přitom klademe $\sum\limits_{i=p}^{q} \alpha_i = 0$ pro $p > q$.)

Rovnice (4.14) se nazývá

eliptická		$m = n$ a $k \in \{0, n\}$,
hyperbolická		$m = n$ a $k \in \{1, n-1\}$,
ultrahyperbolická	*v bodě* $\mathbf{x}_0 \in D$, jestliže	$m = n$ a $2 \le k \le n-2$,
parabolické		$m < n$,
parabolická v užším smyslu		$m = n-1$ a $k = 0$, nebo $k = m = n-1$.

Rovnice (4.14) se nazývá *eliptická, hyperbolická, … v otevřené množině* $G \subseteq D$, je-li eliptická, hyperbolická, … v každém bodě $\mathbf{x} \in G$.

4.3 Kanonický tvar lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} \;=\; F(x, y, u, u_x, u_y)\,, \tag{4.15}$$

pro funkce $A,\ B,\ C$ platí $|A(x,y)| + |B(x,y)| + |C(x,y)| > 0$ pro všechna $(x,y) \in D = \operatorname{Dom} A \cap \operatorname{Dom} B \cap \operatorname{Dom} C$, funkce F je lineární v každém z argumentů $u,\ u_x,\ u_y$. Uvažujme kvadratickou formu $\Psi(r,s) = Ar^2 + 2Brs + Cs^2$. Pokud $A \ne 0$, platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 \;=\; A\left(r + \frac{B}{A}s\right)^2 - \frac{B^2}{A}s^2 + Cs^2 \;=\; A\left(r + \frac{B}{A}s\right)^2 - \frac{1}{A}(B^2 - AC)s^2\,,$$

pokud $C \ne 0$, platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 \;=\; C\left(s + \frac{B}{C}r\right)^2 - \frac{B^2}{C}r^2 + Ar^2 \;=\; C\left(s + \frac{B}{C}r\right)^2 - \frac{1}{C}(B^2 - AC)r^2\,,$$

pokud $A = C = 0$, pak $B \ne 0$ a platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 \;=\; 2Brs \;=\; \frac{B}{2}(r+s)^2 - \frac{B}{2}(r-s)^2\,.$$

Odtud plyne: Je-li pro každé (x,y) z otevřené množiny $G \subseteq D$

$(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y) > 0$		hyperbolická	
$(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y) = 0$	pak rovnice (4.15) je	parabolická	v G
$(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y) < 0$		eliptická	

4.3.1 Transformace rovnice (4.15)

Buďte $\varphi, \psi : G \to \mathbb{R}$ takové funkce, že $\varphi_x(x,y)\psi_y(x,y) - \varphi_y(x,y)\psi_x(x,y) \ne 0$ pro všechna $(x,y) \in G$. Pak transformace

$$\xi \;=\; \varphi(x,y)\,, \qquad \eta \;=\; \psi(x,y) \tag{4.16}$$

bijektivně zobrazí množinu G na otevřenou množinu a rovnici (4.15) transformuje na tvar (využíváme formule pro druhé parciální derivace složené funkce)

$$a(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,, \tag{4.17}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \varphi_y^2\left(A\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + C\right)\,, \\ b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y\,, \\ c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = \psi_y^2\left(A\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C\right)\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

a funkce $\tilde{F}$ je lineární v každém z argumentů $u,\ u_x,\ u_y$.

Při hledání inversní transformace k transformaci (4.16) řešíme soustavu rovnic (4.16) pro neznámé $x,\ y$. Přitom první z rovnic je implicitně dána funkce $y_1 = y_1(x)$, pro jejíž derivaci platí $y_1' = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, a druhou z rovnic je implicitně dána funkce $y_2 = y_2(x)$, pro jejíž derivaci platí $y_1' = -\dfrac{\psi_x}{\psi_y}$ (podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce, viz např. Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU 1999, str. 96).

4.3.2 Charakteristiky rovnice (4.15)

Obyčejná diferenciální rovnice

$$A(x,y)y'^2 - 2B(x,y)y' + C(x,y) = 0 \tag{4.19}$$

se nazývá *charakteristická rovnice parciální diferenciální rovnice* (4.15). Její řešení se nazývají *charakteristiky*.

Z předchozích úvah je vidět, že platí: Je-li rovnice (4.15) hyperbolická, má dvě jednoparametrické množiny charakteristik, které jsou řešeními obyčejných diferenciálních rovnic

$$y' = \frac{B(x,y) + \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)} \quad \text{a} \quad y' = \frac{B(x,y) - \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)}\,. \tag{4.20}$$

Je-li rovnice (4.15) parabolická, má jednu jednoparametrickou množinu charakteristik, které jsou řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}\,. \tag{4.21}$$

Je-li rovnice (4.15) eliptická, nemá reálné charakteristiky.

4.3.3 Kanonický tvar hyperbolické rovnice

Jsou-li $\varphi(x,y) = C_1$ a $\psi(x,y) = C_2$ implicitní popisy řešení rovnic (4.20) (tedy charakteristiky rovnice (4.15), pak $-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$ a $-\dfrac{\psi_x}{\psi_y}$ jsou kořeny charakteristické rovnice (4.19), takže v (4.18) dostaneme $a = c = 0$. Kanonický tvar hyperbolické rovnice (4.15) je

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,,$$

kde F_1 je funkce lineární v každém z argumentů $u,\ u_\xi,\ u_\eta$.

4.3.4 Kanonický tvar parabolické rovnice

Je-li $\varphi(x,y) = x$ a $\psi(x,y) = C_1$ je implicitní popis řešení rovnice (4.21), pak $\varphi_x = 1,\ \varphi_y = 0,\ -\dfrac{\psi_x}{\psi_y} = \dfrac{B}{A}$ a $-\dfrac{\psi_x}{\psi_y}$ je kořenem charakteristické rovnice (4.20), takže v (4.18) dostaneme $c = 0$, $a = A$ a

$$b = A\psi_x + B\psi_y = \psi_y\left(A\frac{\psi_x}{\psi_y} + B\right) = \psi_y(-B + B) = 0\,.$$

Kanonický tvar parabolické rovnice (4.15) je

$$u_{\xi\xi} = F_2(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,,$$

kde F_2 je funkce lineární v každém z argumentů $u,\ u_\xi,\ u_\eta$.

4.3.5 Kanonický tvar eliptické rovnice

Je-li $\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)=C$ implicitní popis řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{B(x,y)+\mathrm{i}\sqrt{A(x,y)C(x,y)-(B(x,y))^2}}{A(x,y)}\,,$$

pak transformace (4.16) převede eliptickou rovnici (4.15) na její kanonický tvar

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta} = F_3(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,,$$

kde F_3 je funkce lineární v každém z argumentů $u,\ u_\xi,\ u_\eta$.

4.3.6 Kanonický tvar lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných s konstantními koeficienty

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy} = du_x+eu_y+fu+g(x,y)\,, \tag{4.22}$$

kde $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ a $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Výše popsané transformace převedou tuto rovnici na některý z tvarů

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= d_1u_\xi+e_1u_\eta+f_1u+g_1(\xi,\eta)\,, & &\text{pokud } b^2-ac>0\,,\\ u_{\xi\xi} &= d_2u_\xi+e_2u_\eta+f_2u+g_2(\xi,\eta)\,, & &\text{pokud } b^2-ac=0\,,\\ u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta} &= d_3u_\xi+e_3u_\eta+f_3u+g_3(\xi,\eta)\,, & &\text{pokud } b^2-ac<0\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Zavedeme novou neznámou funkci v vztahem

$$u = v\,\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}\,,$$

kde $\lambda,\ \mu$ jsou zatím neurčené konstanty. Pak je

$$\begin{aligned} u_\xi &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda v+v_\xi)\,, & u_{\xi\xi} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda^2v+2\lambda v_\xi+v_{\xi\xi})\,,\\ u_\eta &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu v+v_\eta)\,, & u_{\xi\eta} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda\mu v+\mu v_\xi+\lambda v_\eta+v_{\xi\eta})\,,\\ & & u_{\eta\eta} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu^2v+2\mu v_\eta+v_{\eta\eta})\,. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic (4.23) a vykrátíme výrazem $\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}\neq 0$:

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} &= (d_1-\mu)v_\xi+(e_1-\lambda)v_\eta+(d_1\lambda+e_1\mu-\lambda\mu+f_1)v+\tilde g_1(\xi,\eta) \quad \text{pro hyperbolickou rovnici,}\\ v_{\xi\xi} &= (d_2-2\lambda)v_\xi+e_2v_\eta+(d_2\lambda+e_2\mu-\lambda^2+f_2)v+\tilde g_2(\xi,\eta) \quad \text{pro parabolickou rovnici,}\\ v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta} &= (d_3-2\lambda)v_\xi+(e_3-2\mu)v_\eta+(d_3\lambda+e_3\mu-\lambda^2-\mu^2+f_3)v+\tilde g_3(\xi,\eta) \quad \text{pro eliptickou rovnici.} \end{aligned}$$

Konstanty $\lambda,\ \mu$ zvolíme tak, aby pravé strany byly co nejjednodušší. Konkrétně:

- Pro hyperbolickou rovnici $\mu=d_1,\ \lambda=e_1$. Dostaneme
$$v_{\xi\eta} = (e_1d_1+f_1)v+\tilde g_1(\xi,\eta)\,.$$
- Pro parabolickou rovnici $\lambda=\dfrac{d_2}{2},\ \mu=-\dfrac{4f_2+d_2^2}{4e_2}$. Dostaneme
$$v_{\xi\xi} = e_2v_\eta+\tilde g_2(\xi,\eta)\,.$$
- Pro eliptickou rovnici $\lambda=\dfrac{d_3}{2},\ \mu=\dfrac{e_3}{2}$. Dostaneme
$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta} = \frac{d_3^2+e_3^2+4f_3}{4}v+\tilde g_3(\xi,\eta)\,.$$

4.4 Počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

4.4.1 Řešení počáteční úlohy pro homogenní hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (kmity nekonečné struny)

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)\,, \tag{4.24}$$
$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) = \psi(x)\,, \qquad x \in (-\infty,\infty)\,, \tag{4.25}$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná a funkce ψ je diferencovatelná.

Charakteristická rovnice parciální rovnice (4.24) je $x'^2 - a^2 = 0$, tedy $x' = \pm a$, z čehož $x(t) = \pm at + const$. Transformací

$$\xi = x - at\,, \qquad \eta = x + at$$

přejde rovnice (4.24) na tvar

$$u_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0\,.$$

Odtud plyne, že u_ξ nezávisí na η, tedy

$$u_\xi(\xi,\eta) = f(\xi)\,.$$

Tuto rovnici zintegrujeme podle ξ a dostaneme

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)\,,$$

kde F je funkce primitivní k f a G je libovolná funkce. Zpětnou transformací tedy dostaneme řešení rovnice (4.24) ve tvaru

$$u(t,x) = F(x-at) + G(x+at)\,, \tag{4.26}$$

kde F, G jsou libovolné dvakrát diferencovatelné funkce. Určíme je tak, aby byly splněny počáteční podmínky (4.25), tedy

$$F(x) + G(x) = \varphi(x)\,, \qquad -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x)\,.$$

Integrací druhé rovnice dostaneme

$$F(x) - G(x) = -\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,,$$

kde x_0 je nějaké číslo. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= \varphi(x)\,, \\ F(x) - G(x) &= -\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

a dostaneme

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,, \qquad G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Dosazením do (4.26) nyní dostaneme řešení úlohy (4.24), (4.25) ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Poslední formule se nazývá *d'Alembertův vzorec.*

4.4.2 Řešení počáteční úlohy pro homogenní hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s obecným počátkem

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x)\,, \qquad (t,x)\in(\sigma,\infty)\times(-\infty,\infty)\,, \tag{4.27}$$

$$u(\sigma,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(\sigma,x) = \psi(x)\,, \qquad x\in(-\infty,\infty)\,, \tag{4.28}$$

kde $a>0$, $\sigma\in\mathbb{R}$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná a funkce ψ je diferencovatelná.

Transformací $\tau = t-\sigma$ tato úloha přejde na

$$\begin{aligned} u_{\tau\tau}(\tau,x) &= a^2 u_{xx}(\tau,x)\,, \qquad (\tau,x)\in(0,\infty)\times(-\infty,\infty)\,,\\ u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_\tau(0,x) &= \psi(x)\,, \qquad x\in(-\infty,\infty)\,. \end{aligned}$$

Podle 4.4.1 má tato úloha řešení

$$u(\tau,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-a\tau)+\varphi(x+a\tau)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a\tau}^{x+a\tau}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,,$$

takže řešení úlohy (4.27), (4.28) je

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-a(t-\sigma))+\varphi(x+a(t-\sigma))}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

4.4.3 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní hyperbolickou rovnici ve dvou proměnných s homogenní počáteční podmínkou (buzené kmity nekonečné struny)

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(-\infty,\infty)\,, \tag{4.29}$$

$$u(0,x) = 0\,, \quad u_t(0,x) = 0\,, \qquad x\in(-\infty,\infty)\,, \tag{4.30}$$

kde $a>0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a funkce f je spojitá.

Řešení hledáme ve tvaru $u(t,x)=\int\limits_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma$. Platí

$$u(0,x) = 0\,, \quad \text{a} \quad u_t(t,x) = w(t,x,t) + \int\limits_0^t w_t(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\,.$$

Ke splnění podmínky $u_t(0,x)=0$ stačí, aby pro všechna $\sigma>0$ funkce $w=w(t,x,\sigma)$ splňovala

$$w(\sigma,x,\sigma) = 0\,. \tag{4.31}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(w(t,x,t)+\int\limits_0^t w_{|1}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(0+\int\limits_0^t w_{|1}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right) = \\ &= w_{|1}(t,x,t)+\int\limits_0^t w_{|1,1}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\,,\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) &= \int\limits_0^t w_{|2,2}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\,. \end{aligned}$$

Má platit $u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) = f(t,x)$, tedy $f(t,x) = w_{|1}(t,x,t) + \int\limits_0^t \big(w_{|1,1}(t,x,\sigma) - a^2 w_{|2,2}(t,x,\sigma)\big)\,\mathrm{d}\sigma$.
Poslední rovnice bude splněna například pro funkci $w = w(t,x,\sigma)$, která splňuje pro každé $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} w_{tt}(t,x,\sigma) &= a^2 w_{xx}(t,x,\sigma)\,, && (t,x) \in (\sigma,\infty) \times (-\infty,\infty)\,, && (4.32)\\ w_t(\sigma,x,\sigma) &= f(\sigma,x)\,, && x \in (-\infty,\infty)\,. && (4.33) \end{aligned}$$

Podle 4.4.2 je řešení úlohy (4.32), (4.31), (4.33) dáno formulí

$$w(t,x,\sigma) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi\,,$$

takže řešení úlohy (4.29), (4.30) je

$$u(t,x) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma\,.$$

4.4.4 Řešení obecné počáteční úlohy pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, && (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty)\,, && (4.34)\\ u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x \in (-\infty,\infty)\,, && (4.35) \end{aligned}$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a funkce f je spojitá.

Přímým výpočtem ověříme, že je-li $v = v(t,x)$ řešením úlohy (4.24), (4.25) a $v = v(t,x)$ je řešením úlohy (4.29), (4.30), pak $u = u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ je řešením úlohy (4.34), (4.35). Podle 4.4.1 a 4.4.3 je řešení dané úlohy

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma\,.$$

Ještě ukážeme, že úloha (4.34), (4.35) nemá jiné řešení. Jsou-li $u_1 = u_1(t,x)$ a $u_2 = u_2(t,x)$ řešení úlohy (4.34), (4.35), pak $u_0 = u_0(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ je řešením homogenní rovnice (4.24) s homogenními počátečními podmínkami (4.30). Analogicky jako v 4.4.1 ukážeme, že

$$u_0(t,x) = F(x-at) + G(x+at)$$

a pro funkce F, G platí

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= 0\,, \quad \text{neboli} \quad G(x) = -F(x)\,,\\ F'(x) - G'(x) &= 0 \end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že $F(x) \equiv const$ a dále

$$u_0(t,x) = F(x-at) + G(x+at) = F(x-at) - F(x+at) \equiv const - const = 0\,.$$

Tedy $u_1 \equiv u_2$.

4.4.5 Řešení hyperbolické rovnice ve dvou nezávisle proměnných s obecnými počátečními podmínkami a s jednou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, && (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,, && (4.36)\\ u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x \in (0,\infty)\,, && (4.37)\\ u(t,0) &= 0\,, && t \in (0,\infty)\,, && (4.38) \end{aligned}$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a platí $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Definujme liché rozšíření funkcí $\varphi,\ \psi,\ f(t,\cdot)$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & x \geq 0 \\ -f(t,-x), & x < 0 \end{cases}.$$

Řešení úlohy (4.36), (4.37), (4.38) je

$$u(t,x) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \tilde{f}(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (4.36), (4.37) s nehomogenní okrajovou podmínkou

$$u(t,0) = \alpha(t)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{4.39}$$

kde α je dvakrát diferencovatelná funkce, je tvaru $u(t,x) = v(t,x) + \alpha(t)$, kde funkce v je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v_{tt}(t,x) &= a^2 v_{xx}(t,x) + f(t,x) - \alpha''(t)\,, && (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \\ v(0,x) = \varphi(x) - \alpha(0)\,, \quad v_t(0,x) &= \psi(x) - \alpha'(0)\,, && x \in (0,\infty)\,, \\ v(t,0) &= 0\,, && t \in (0,\infty)\,. \end{aligned}$$

4.4.6 Řešení hyperbolické rovnice ve dvou nezávisle proměnných s obecnými počátečními podmínkami a s okrajovými podmínkami Dirichletova typu (kmity konečné struny upevněné na obou koncích)

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell)\,, \tag{4.40}$$

$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) = \psi(x)\,, \qquad x \in (0,\ell)\,, \tag{4.41}$$

$$u(t,0) = u(t,\ell) = 0\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{4.42}$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a platí

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0\,.$$

Definujme 2ℓ-periodické liché rozšíření funkcí $\varphi,\ \psi,\ f(t,\cdot)$. Toto rozšíření je dáno sinovými řadami

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^\ell \varphi(\xi) \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x\,, \\ \tilde{\psi}(x) &= \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^\ell \psi(\xi) \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x\,, \\ \tilde{f}(t,x) &= \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^\ell f(t,\xi) \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x\,, \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)\right) &= \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^\ell \varphi(\xi) \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \left(\sin\frac{n\pi}{\ell}(x-at) + \sin\frac{n\pi}{\ell}(x+at) \right) = \\ &= \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^\ell \varphi(\xi) \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x \cos\frac{n\pi a}{\ell}t\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\int\limits_{x-at}^{x+at}\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right) = \\
&= \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left[\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi\right]_{\xi=x+at}^{x-at} = \\
&= \frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int\limits_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-at)-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+at)\right) = \\
&= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int\limits_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi a}{\ell}t\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x-a(t+\sigma)}\tilde{f}(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\ell}f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)}\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma = \\
&= \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\ell}f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left[\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi\right]_{\xi=x-a(t+\sigma)}^{x+a(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\ell}f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-a(t-\sigma))-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+a(t-\sigma))\right)\mathrm{d}\sigma = \\
&= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\ell}f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi a}{\ell}(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma = \\
&= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\int\limits_0^t\sin\frac{n\pi a}{\ell}(t-\sigma)\left(\int\limits_0^{\ell}f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma\,.
\end{aligned}
$$

Označíme-li tedy

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{a\pi}{\ell}\,, \\
A_n &= \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\,, \\
B_n &= \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\,, \\
G(x,\xi,t-\sigma) &= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\sin\frac{n\pi a}{\ell}(t-\sigma)\,,
\end{aligned}
$$

lze řešení úlohy (4.40), (4.41), (4.42) zapsat ve tvaru

$$
u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\int\limits_0^t\int\limits_0^{\ell}f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.
$$

Označíme-li dále $\alpha_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$ a $\varphi_n=\operatorname{arctg}\dfrac{B_n}{A_n}$, platí

$$
A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t = \alpha_n\cos(n\omega t-\varphi_n)
$$

a řešení úlohy (4.40), (4.41), (4.42) lze zapsat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \sin\frac{n\pi}{\ell}x + \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma,\xi) G(x,\xi,t-\sigma) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (4.40), (4.41) s nehomogenní okrajovou podmínkou

$$u(t,0) = \mu_0(t)\,, \quad u(t,\ell) = \mu_1(t)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{4.43}$$

kde α, β jsou dvakrát diferencovatelné funkce, je tvaru $u(t,x) = v(t,x)+U(t,x)$, kde funkce $U = U(t,x)$ splňuje podmínky (4.43) a funkce $v = v(t,x)$ je řešením úlohy

$$v_{tt}(t,x) \;=\; a^2 v_{xx}(t,x) + f(t,x) - U_{tt}(t,x) + a^2 U_{xx}(t,x)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\ell)\,, \tag{4.44}$$

$$v(0,x) \;=\; \varphi(x) - U(0,x)\,, \quad v_t(0,x) \;=\; \psi(x) - U_t(0,x)\,, \qquad x \in (0,\ell)\,, \tag{4.45}$$

$$v(t,0) \;=\; v(t,\ell) \;=\; 0\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{4.46}$$

Za funkci U stačí vzít

$$U(t,x) \;=\; \mu_0(t) + \frac{x}{\ell}(\mu_1(t) - \mu_0(t))\,.$$

Při této volbě je $U_{xx} \equiv 0$.

4.5 Cvičení

Najděte obecné řešení rovnice

1) $u_x = 6x^2 u_y$ 2) $(z+y-x)u_x + (z+x-y)u_y + zu_z = 0$

Najděte řešení rovnice, které splňuje danou podmínku

3) $u_x + yz_y = 0,\ u(0,y) = \dfrac{1}{y}$

4) $u_t + au_x = 0,\ u(x,0) = \sin x$

5) $u_t + au_x = x^2 t + 1,\ u(x,0) = x+2$

6) $yu_x - xu_y = y^2 - x^2,\ u(x,a) = x^2 - a^2$

7) $xzu_x + yzu_y + xy = 0,\ u(x,\dfrac{1}{x}) = 1$

8) $2xu_x + yu_y = 4z + 1,\ u(x,1) = x^2$

Určete typ lineární rovnice druhého řádu

9) $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ 10) $x^2 u_{xx} - 2x\sin y\, u_{xy} + \sin^2 y\, u_{yy} = 0$

Danou rovnici převeďte na kanonický tvar

11) $\mathrm{e}^{2x}u_{xx} + 2\mathrm{e}^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0$

12) $xyu_{xx} - (x^2+y^2)u_{xy} + xyu_{yy} + yu_x + xu_y = 0,\ x \neq y$

13) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ 14) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$

Najděte obecné řešení rovnice

15) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ 16) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$

17) Řešte počáteční úlohu $u_{tt} = u_{xx} + \sin x;\quad u(0,x) = x,\ u_t(0,x) = \dfrac{1}{x}$.

Výsledky: 1) $u(x,y) = \Phi(2x^3+y)$ **2)** $u(x,y,z) = \Phi(x+y-2z, z^2(x-y))$ **3)** $u(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{y}$ **4)** $u(x,t) = \sin(x-at)$ **5)** $u(x,t) = \frac{a^2}{12}t^4 - \frac{ax}{3}t^3 + \frac{x^2}{2}t^2 - (a-1)t + x + 2$ **6)** $u(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2a^2 - a\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ **7)** $u(x,y) = \sqrt{2-xy}$ **8)** $u(x,y) = x^2 + \frac{1}{4}(y^4-1)$ **9)** hyperbolická pro $y<0$, eliptická pro $y>0$ **10)** parabolická **11)** $u_{\eta\eta} = (\frac{1}{\eta-\xi\eta^2}-1)u_\xi - u_\eta$ **12)** $u_{\xi\eta} = \frac{\xi}{\eta^2-\xi^2}u_\eta$ **13)** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$ **14)** $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{4}{9}$, $v = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\xi + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta}$, $\xi = \frac{1}{2}x - y$, $\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ **15)** $u(x,y) = \varPhi(xy)\ln y + \varPsi(xy)$ **16)** $u(x,y) = \varPhi(\frac{y}{x})\sqrt{xy} + \varPsi(xy)$ **17)** $u(t,x) = x + \ln\sqrt{\left|\frac{x+t}{x-t}\right|} + \sin x - \cos x \sin t$

Kapitola 5

Metody integrálních transformací

5.1 Fourierova transformace

Fourierova transformace $\mathcal{F}$ převádí reálnou funkci f jedné reálné proměnné na komplexní funkci $\hat{f}$ jedné reálné proměnné definovanou vztahem

$$\hat{f}(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.$$

O funkci f předpokládáme, že je definovaná na $\mathbb{R}$ a konverguje dostatečně rychle k nule pro $|x| \to \infty$ tak, aby nevlastní integrál na pravé straně konvergoval. *Inversní Fourierova transformace* $\mathcal{F}^{-1}$ převádí funkci $\hat{f}$ zpět na funkci f na celém $\mathbb{R}$; funkce f je přitom dána vztahem

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Konvoluce funkcí f, g definovaných na $\mathbb{R}$ je funkce $f * g$ daná vztahem

$$f * g(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

(O nevlastním integrálu opět předpokládme, že konverguje.) Fourierův obraz konvoluce funkcí f, g je

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f*g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \;=\; \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V tomto dvojném integrálu zavedeme substituci $x = y + z$. Pak

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi},$$

tedy

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) \;=\; \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \;=\; \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}\mathrm{d}z\right) \;=\; \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

To znamená, že

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}. \tag{5.1}$$

5.1.1 Řešení počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (vedení tepla v tenké homogenní nekonečné tyči)

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty), \tag{5.2}$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in (-\infty,\infty). \tag{5.3}$$

O všech funkcích i jejich derivacích opět předpokládáme, že „jdou dostatečně rychle k nule pro $|x| \to \infty$“. Na rovnici (5.2) aplikujeme Fourierovu transformaci (funkci u považujeme za funkci proměnné x; t považujeme za parametr):

$$\mathcal{F}(u_t)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \hat{u}_t(t,\xi),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_{xx})(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \left[u_x(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}(-\mathrm{i}\xi)\mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{i}\xi \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\left(\left[u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}(-\mathrm{i}\xi)\mathrm{d}x\right) = \\ &= -\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = -\xi^2\hat{u}(t,\xi).\end{aligned}$$

Rovnice (5.2) se tedy transformuje na rovnici

$$\hat{u}_t(t,\xi) = -a^2\xi^2\hat{u}(t,\xi), \tag{5.4}$$

což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu (ξ hraje roli parametru). Její řešení je

$$\hat{u}(t,\xi) = C\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t},$$

kde C je konstanta. Určíme ji z transformované počáteční podmínky (5.3), tj. z podmínky

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi). \tag{5.5}$$

Je tedy

$$C = \hat{u}(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.$$

Označme $G(t,x)$ vzor funkce $\hat{G}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}$ při Fourierově transformaci, tedy

$$G(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\xi\sqrt{a^2t} - \frac{\mathrm{i}x}{2\sqrt{a^2t}}\right)^2 - \frac{x^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\xi\sqrt{a^2t} - \frac{\mathrm{i}x}{2\sqrt{a^2t}}\right)^2}\mathrm{d}\xi.$$

Substitucí $\eta = \xi\sqrt{a^2t} - \dfrac{\mathrm{i}x}{2\sqrt{a^2t}}$ a s využitím (2.3) dostaneme

$$G(t,x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a^2t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Řešení úlohy (5.4), (5.5) lze zapsat ve tvaru

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\hat{G}(t,\xi).$$

Inversní Fourierovou transformací s využitím (5.1) dostaneme řešení úlohy (5.2), (5.4) ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \varphi(\cdot) * G(t,\cdot)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) G(t, x-y) \mathrm{d}y\,,$$

tedy

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{d}y.$$

Na závěr ještě poznamenejme, že řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x), && (t,x) \in (\tau,\infty) \times (-\infty,\infty), \\ u(\tau,x) &= \varphi(x), && x \in (-\infty,\infty), \end{aligned}$$

kde $\tau \in \mathbb{R}$, je

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 (t-\tau)}\right) \mathrm{d}y.$$

5.1.2 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

Nejprve uvažujme úlohu s homogenní počáteční podmínkou:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x), && (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty), && (5.6) \\ u(0,x) &= 0, && x \in (-\infty,\infty). && (5.7) \end{aligned}$$

Řešení budeme hledat ve tvaru $u(t,x) = \int_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma$. Pak je počáteční podmínka (5.7) splněna. Dále platí

$$u_t(t,x) \;=\; w(t,x,t) + \int_0^t w_t(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma, \qquad u_{xx}(t,x) \;=\; \int_0^t w_{xx}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Aby byla splněna rovnice (5.6), musí platit

$$0 \;=\; u_t(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) - f(t,x) \;=\; w(t,x,t) + \int_0^t \left(w_t(t,x,\sigma) - a^2 w_{xx}(t,x,\sigma)\right) \mathrm{d}\sigma - f(t,x)$$

pro všechna $(t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty)$. Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když pro každé $\tau \in (0,\infty)$ bude funkce w řešením úlohy

$$\begin{aligned} w_t(t,x,\tau) &= a^2 w_{xx}(t,x,\tau), && (t,x) \in (\tau,\infty) \times (-\infty,\infty), \\ w(\tau,x,\tau) &= f(\tau,x), && x \in (-\infty,\infty). \end{aligned}$$

Avšak řešení této úlohy je podle 5.1.1 dáno vzorcem

$$w(t,x,\tau) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 (t-\tau)}\right) \mathrm{d}y.$$

To znamená, že řešení úlohy (5.6), (5.7) je

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} f(\sigma,y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 (t-\sigma)}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma.$$

Řešení obecné počáteční úlohy pro parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (5.6), (5.3) je součtem řešení úloh (5.2), (5.3) a (5.6), (5.7), tj.

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma,\xi)}{\sqrt{t-\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\sigma)}\right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\sigma.$$

Při označení

$$G(x,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 \tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}\right)$$

lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi) G(x,\xi,t-\sigma) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\sigma.$$

5.2 Laplaceova transformace

Buď M množina reálných funkcí definovaných na intervalu $(0,\infty)$ takových, že integrál $\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ konverguje a $\lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$ pro všechna $p > 0$. *Laplaceova transformace* $\mathcal{L}$ převádí reálnou funkci $f \in M$ na reálnou funkci $\mathcal{L}f$ definovanou na intervalu $(0,\infty)$ vztahem

$$\mathcal{L}f(p) \;=\; \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Z uvedeného definičního vztahu plyne, že Laplaceův obraz funkce $f \in M$ je funkcí ohraničenou. Obrazy některých funkcí v Laplaceově transformaci jsou uvedeny v tabulce 5.1.

Vypočítáme Laplaceův obraz derivace funkce:

$$\mathcal{L}(f')(p) \;=\; \int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \;=\; \left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]_{t=0}^{\infty} + p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \;=\; -\lim_{t\to 0+} f(t) + p\mathcal{L}f(p).$$

Při označení $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ tedy platí

$$\mathcal{L}(f')(p) \;=\; p\mathcal{L}f(p) - f(0+). \tag{5.8}$$

5.2.1 Řešení počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s jednou okrajovou podmínkou

$$u_t(t,x) \;=\; a^2 u_{xx}(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\infty), \tag{5.9}$$

$$u(0,x) \;=\; 0, \qquad x \in (0,\infty), \tag{5.10}$$

$$u(t,0) \;=\; \mu(t), \qquad t \in (0,\infty). \tag{5.11}$$

Na rovnici (5.9) aplikujeme Laplaceovu transformaci (funkci u považujeme za funkci nezávisle proměnné t a x považujeme za parametr). S využitím (5.8) a (5.10) dostaneme

$$p\mathcal{L}u(p,x) \;=\; a^2\mathcal{L}u_{xx}(p,x),$$

což je obyčejná lineární rovnice druhého řádu pro neznámou funkci $\mathcal{L}u$; nyní roli parametru hraje p. Fundamentální systém řešení této rovnice je tvořen funkcemi

$$\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{|a|}x}, \qquad \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{|a|}x}.$$

$f(t)$	$\mathcal{L}f(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$	$f(t)$	$\mathcal{L}f(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{p}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t^n,\ n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$t^a,\ a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\sin^2\omega t$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
$t\mathrm{e}^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\cos^2\omega t$	$\frac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
$t^n\mathrm{e}^{at},\ n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\mathrm{sh}\,at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$t^\nu\mathrm{e}^{at},\ \nu>-1$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{(p-a)^{\nu+1}}$	$\mathrm{ch}\,at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$t\,\mathrm{sh}\,at$	$\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$t\,\mathrm{ch}\,at$	$\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
		$J_\nu(at),\ \nu>-1$	$\frac{\left(\sqrt{p^2+a^2}-p^\nu\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{p^2+a^2}}$

Tabulka 5.1: **„Operátorový slovník“ pro Laplaceovu transformaci**

Pouze první z nich je ohraničená. Obecné řešení transformované rovnice tedy je

$$\mathcal{L}u(p,x) \;=\; C(p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{|a|}x}.$$

Aby byla splněna podmínka (5.11), musí být $C(p) = \mathcal{L}\mu(p)$. Laplaceův obraz řešení úlohy (5.9) (5.10) (5.11) tedy je

$$\mathcal{L}u(p,x) \;=\; \mathcal{L}\mu(p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{|a|}x}.$$

5.3 Cvičení

Řešte úlohu

1) $u_t = a^2u_{xx}$, $t>0$, $x>0$
$u(0,x) = T$, $x>0$; $u(t,0) = 0$, $t>0$

2) $u_t = a^2u_{xx}$, $t>0$, $x>0$
$u(0,x) = 0$, $x>0$; $u(t,0) = K$, $t>0$

3) $u_t = a^2u_{xx}$, $t>0$, $x>0$
$u(0,x) = 0$, $x>0$; $u(t,0) = A\delta(t)$, $t>0$

Výsledky: 1) $T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right)$ **2)** $K\left(1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right)$, přitom $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi$ je integrál chyb
3) $A\frac{x}{2\sqrt{\pi a^2t^3}}\mathrm{e}^{x^2/(4a^2t)}$

Kapitola 6

Metoda separace proměnných (Fourierova)

6.1 Hyperbolické rovnice

6.1.1 Homogenní hyperbolická rovnice ve dvou proměnných s obecnými počátečními a homogenními okrajovými podmínkami

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, && (6.1)\\
u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x\in(0,\ell)\,, && (6.2)\\
\alpha_0 u(t,0)+\beta_0 u_x(t,0) = 0 &= \alpha_1 u(t,\ell)+\beta_1 u_x(t,\ell)\,, && t\in(0,\infty)\,, && (6.3)
\end{aligned}
$$

kde $a>0$, φ,ψ jsou spojité funkce splňující okrajové podmínky

$$\alpha_0\varphi(0)+\beta_0\varphi_x(0) = 0 = \alpha_1\varphi(\ell)+\beta_1\varphi_x(\ell)\,, \qquad \alpha_0\psi(0)+\beta_0\psi_x(0) = 0 = \alpha_1\psi(\ell)+\beta_1\psi_x(\ell)\,.$$

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru součinu, ve kterém jeden činitel závisí pouze na t a druhý pouze na x, tedy

$$u(t,x) = T(t)X(x)\,.$$

Pak je $u_{tt}=T''X$, $u_{xx}=TX''$ a tedy $T''X=a^2TX''$, po úpravě

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Levá strana poslední rovnosti závisí pouze na t, pravá pouze na x. To znamený, že tyto výrazy na nezávisle proměnných nezávisí, tedy

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda\,.$$

Odtud dostaneme

$$T''(t)+\lambda a^2 T(t) = 0\,, \tag{6.4}$$

$$-X''(x) = \lambda X(x)\,. \tag{6.5}$$

K tomu, aby funkce $u=TX$ splňovala okrajové podmínky (6.3) stačí, aby tyto podmínky splňovala funkce X, tedy

$$\alpha_0X(0)+\beta_0X'(0) = 0 = \alpha_1X(\ell)+\beta_1X'(\ell)\,. \tag{6.6}$$

Rovnice (6.5) s okrajovou podmínkou (6.6) je Sturmova-Liouvilleova úloha (sr. 1.1.5). Existuje tedy posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost vlastních funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, že

$$0\le\lambda_1<\lambda_2<\cdots\,, \quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$$

α_0	β_0	α_1	β_1	λ_n	$v_n(x)$	$\|v_n\|^2$
1	0	1	0	$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	$\sin\frac{n\pi}{\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
1	0	0	1	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\sin\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	1	0	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	0	1	$0, \quad \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	$1, \quad \cos\frac{n\pi}{\ell}x$	$\ell, \quad \frac{\ell}{2}$
1	0	h	1	kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda_n} = -h\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\,\ell\right)$	$\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell(h^2+\lambda_n)+h}{2(h^2+\lambda_n)}$
0	1	h	1	kladné kořeny rovnice $h = \sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\,\ell\right)$	$\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell(h^2+\lambda_n)+h}{2(h^2+\lambda_n)}$
h	1	h	1	kladné kořeny rovnice $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} = 2\,\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda_n}\,\ell\right)$	$\sqrt{\lambda_n}\,\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + h\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\lambda_n\ell + h^2\ell + 2h}{2}$

Tabulka 6.1: **Vlastní hodnoty a vlastní funkce úlohy (6.5), (6.6) pro speciální tvary okrajových podmínek**

a Fourierova řada každé funkce splňující podmínky (6.6) stejnoměrně k této funkci konverguje. Vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (6.5), (6.6) jsou uvedeny v tabulce 6.1.

Řešení rovnice (6.4), ve které klademe $\lambda = \lambda_n$ je

$$T_n(t) \;=\; A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,at + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,at\,.$$

Odtud plyne, že každá z funkcí

$$u_n(t,x) \;=\; \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,at + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,at\right) v_n(x)$$

je řešením rovnice (6.1) s okrajovými podmínkami (6.3). Tedy také jejich lineární kombinace, tj. funkce

$$u(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,at + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,at\right) v_n(x) \tag{6.7}$$

je řešením rovnice (6.1) s okrajovými podmínkami (6.3). Aby byly splněny počáteční podmínky (6.2), musí platit

$$u(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x) \;=\; \varphi(x)\,, \qquad u_t(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n}\,a v_n(x) \;=\; \psi(x)\,,$$

což znamená, že A_n a $B_n\lambda_n$ jsou Fourierovy koeficienty funkcí φ a ψ vzhledem k ortogonálnímu systému $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy

$$A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^\ell \varphi(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,, \quad B_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\,\|v_n\|^2}\int_0^\ell \psi(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,, \qquad \text{kde } \|v_n\|^2 = \int_0^\ell (v_n(\xi))^2\mathrm{d}\xi\,. \tag{6.8}$$

Řešení úlohy (6.1), (6.2), (6.3), je tedy dána řadou (6.7), jejíž koeficienty jsou dány formulemi (6.8).

6.1.2 Nehomogenní hyperbolická rovnice ve dvou nezávisle proměnných s homogenními počátečními i okrajovými podmínkami

$$u_{tt}(t,x) = a^2u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, \tag{6.9}$$

$$u(0,x) = 0\,, \quad u_t(0,x) = 0\,, \qquad x\in(0,\ell)\,, \tag{6.10}$$

$$\alpha_0u(t,0)+\beta_0u_x(t,0) = 0 = \alpha_1u(t,\ell)+\beta_1u_x(t,\ell)\,, \qquad t\in(0,\infty)\,, \tag{6.11}$$

kde f je po částech spojitá funkce.

Nechť $\lambda_1,\lambda_2,\ \dots$ jsou vlastní čísla a $v_1=v_1(x),\ v_2=v_2(x),\ \dots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (6.5), (6.6). Funkci $f(t,\cdot)$ vyjádříme jako Fourierovu řadu vzhledem k systému funkcí $v_1,\ v_2,\ \dots$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)v_n(x)\,, \quad \text{kde } F_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^\ell f(t,\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Analogicky jako v metodě variace konstant pro obyčejné lineární rovnice (viz např. Ráb M.: Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic, MU 1998, str. 67) budeme řešení úlohy (6.9), (6.10), (6.11) hledat ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)v_n(x)\,.$$

Tato funkce splňuje okrajovou podmínku (6.11). Dále

$$u_{tt}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t)v_n(x)\,, \qquad u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)v_n''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\lambda_nv_n(x)\,,$$

neboť v_n splňuje (6.5). Aby byly splněny také (6.9) a (6.10), musí platit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n''(t)+a^2\lambda_nC_n(t)\right)v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)v_n(x)\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n(0)v_n(x) = 0\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}C_n'(0)v_n(x) = 0\,.$$

To znamená, že funkce $C_n=C_n(t)$ jsou řešením Cauchyovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$C_n''(t)+a^2\lambda_nC_n(t) = F_n(t)\,,$$

$$C_n(0) = C_n'(0) = 0\,.$$

Tuto úlohu lze vyřešit např. metodou variace konstant. Její řešení je

$$C_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t F_n(\sigma)\sin a\sqrt{\lambda_n}\,(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\,,$$

po dosazení za F_n

$$C_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\,\|v_n\|^2}\int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)v_n(\xi)\sin a\sqrt{\lambda_n}\,(t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (6.9), (6.10), (6.11) tedy je

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\,\|v_n\|^2}\left(\int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)v_n(\xi)\sin a\sqrt{\lambda_n}\,(t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\right)v_n(x)\,.$$

Označíme-li

$$G(x,\xi,\tau) \;=\; \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\,\|v_n\|^2}v_n(x)v_n(\xi)\sin a\sqrt{\lambda_n}\,\tau\,,$$

lze řešení úlohy (6.9), (6.10), (6.11) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

6.1.3 Nehomogenní hyperbolická rovnice ve dvou proměnných s obecnými počátečními a homogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2u_{xx}(t,x)+f(t,x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, && (6.12)\\
u(0,x) = \varphi(x)\,,\quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x\in(0,\ell)\,, && (6.13)\\
\alpha_0u(t,0)+\beta_0u_x(t,0) = 0 &= \alpha_1u(t,\ell)+\beta_1u_x(t,\ell)\,, && t\in(0,\infty)\,, && (6.14)
\end{aligned}$$

Řešení je tvaru $u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)$ kde $v(t,x)$ je řešením úlohy (6.1), (6.2), (6.3) a $w(t,x)$ je řešením úlohy (6.9), (6.10), (6.11).

6.1.4 Obecná úloha pro nehomogenní hyperbolickou rovnici ve dvou proměnných

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2u_{xx}(t,x)+f(t,x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, && (6.15)\\
u(0,x) = \varphi(x)\,,\quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x\in(0,\ell)\,, && (6.16)\\
\alpha_0u(t,0)+\beta_0u_x(t,0) = \mu_0(t)\,,\ \alpha_1u(t,\ell)+\beta_1u_x(t,\ell) &= \mu_1(t)\,, && t\in(0,\infty)\,, && (6.17)
\end{aligned}$$

Řešení je tvaru $u(t,x)=v(t,x)+U(t,x)$, kde funkce $U=U(t,x)$ splňuje okrajové podmínky (6.17) a funkce $v=v(t,x)$ je řešením úlohy (4.44), (4.45), (4.46). Za funkci $U=U(t,x)$ stačí vzít

$$U(t,x) \;=\; \frac{(\alpha_0\mu_1(t)-\alpha_1\mu_0(t))x+(\alpha_1\ell+\beta_1)\mu_0(t)-\beta_0\mu_1(t)}{\alpha_0\alpha_1\ell+\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0}\,. \qquad (6.18)$$

Při této volbě je $U_{xx}\equiv 0$.

6.1.5 Hyperbolické rovnice s nehomogenitou tvaru αu_t (tlumené kmity konečné struny)

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2u_{xx}(t,x)-\alpha u_t(t,x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, && (6.19)\\
u(0,x) = \varphi(x)\,,\quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x\in(0,\ell)\,, && (6.20)\\
\alpha_0u(t,0)+\beta_0u_x(t,0) = 0 &= \alpha_1u(t,\ell)+\beta_1u_x(t,\ell)\,, && t\in(0,\infty)\,, && (6.21)
\end{aligned}$$

Zavedeme novou neznámou funkci $w=w(t,x)$ vztahem

$$u(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}w(t,x)$$

(sr. 4.3.6). Pak je

$$u_t(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}\left(w_t(t,x)-\frac{\alpha}{2}w(t,x)\right)\,,$$

$$u_{tt}(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}\left(w_{tt}(t,x)-\alpha w_t(t,x)+\frac{\alpha^2}{4}w(t,x)\right),\, u_{xx}(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}w_{xx}(t,x)\,.$$

Dosadíme do rovnice (6.19), do podmínky (6.21) a upravíme:

$$w_{tt}(t,x) \;=\; w_{xx}(t,x)+\frac{\alpha^2}{4}w(t,x)\,, \tag{6.22}$$

$$\alpha_0 w(t,0)+\beta_0 w_x(t,0) \;=\; 0 \;=\; \alpha_1 w(t,\ell)+\beta_1 w_x(t,\ell)\,,\quad t\in(0,\infty)\,, \tag{6.23}$$

Řešení okrajové úlohy (6.22), (6.23) budeme opět hledat ve tvaru $w(t,x)=T(t)X(x)$. Po dosazení do rovnice (6.22) a úpravě dostaneme

$$\frac{T''(t)-\frac{\alpha^2}{4}T(t)}{a^2T(t)} \;=\; \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Pravá strana poslední rovnice závisí pouze na x, levá strana závisí pouze na t a to znamená, že výrazy na obou stranách jsou konstantní. Opět je položíme rovny $-\lambda$. Funkce X je opět řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (6.5), (6.6) a funkce T je řešením rovnice

$$T''(t)+\left(\lambda a^2-\frac{\alpha^2}{4}\right)T(t) \;=\; 0\,.$$

Předpokládejme, že $\alpha<4a^2\lambda_n$ (tlumení je malé). Pak řešení poslední rovnice pro $\lambda=\lambda_n$ je

$$T_n(t) \;=\; A_n\cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t+B_n\sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t\,.$$

Řešení úlohy (6.22), (6.23) tedy je

$$w(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t+B_n\sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t\right)v_n(x)\,,$$

kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ jsou vlastní čísla a $v_1,\ v_2,\ \ldots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (6.5), (6.6). Řešení rovnice (6.19) s okrajovou podmínkou (6.21) je

$$u(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t+B_n\sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t\right)v_n(x)\,. \tag{6.24}$$

Platí

$$u(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}A_n v_n(x)\,.$$

takže ke splnění první z podmínek (6.20) stačí, aby

$$A_n \;=\; \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,. \tag{6.25}$$

Dále

$$\begin{aligned}u_t(t,x) \;=\;& -\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t+B_n\sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t\right)v_n(x)+\\ &+\mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}\sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t+B_n\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}\cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}t\right)v_n(x)\,,\end{aligned}$$

takže

$$u_t(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2-\alpha^2}}{2}-\frac{\alpha}{2}A_n\right)v_n(x)\,.$$

Aby byla splněna druhá z podmínek (6.20) stačí, aby

$$B_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} - \frac{\alpha}{2} A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell \psi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi \,,$$

neboli

$$B_n = \frac{2}{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}\, \|v_n\|^2} \int_0^\ell \Big(\psi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\varphi(x) \Big) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi \,. \tag{6.26}$$

Řešení úlohy (6.19), (6.20), (6.21) je tedy dáno řadou (6.24), kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ jsou vlastní čísla a $v_1,\ v_2,\ \ldots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (6.5), (6.6) a koeficienty A_n, B_n jsou dány formulemi (6.25) a (6.26).

6.2 Parabolické rovnice

6.2.1 Parabolická rovnice ve dvou proměnných (vedení tepla v tenké tyči)

Budeme řešit parabolickou rovnici homogenní

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) \,, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell) \,, \tag{6.27}$$

nebo nehomogenní

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x) \,, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell) \,, \tag{6.28}$$

s počáteční podmínkou nehomogenní

$$u(0,x) = \varphi(x) \,, \qquad x \in (0,\ell) \,, \tag{6.29}$$

nebo homogenní

$$u(0,x) = 0 \,, \qquad x \in (0,\ell) \,, \tag{6.30}$$

a okrajovými podmínkami homogenními

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = 0 = \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell) \,, \qquad t \in (0,\infty) \,, \tag{6.31}$$

nebo nehomogenními

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \mu_0(t) \,, \quad \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell) = \mu_1(t) \,, \qquad t \in (0,\infty) \,. \tag{6.32}$$

Přitom předpokládáme, že $a > 0$, funkce φ a f jsou po částech spojité a funkce μ_0, μ_1 jsou diferencovatelné.

Nejdříve budeme řešit úlohu (6.27), (6.29), (6.31). Řešení budeme opět předpokládat ve tvaru

$$u(t,x) = T(t) X(x) \,.$$

Dosazením do (6.27) a (6.31) ukážeme, že funkce $X = X(x)$ je řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (6.5), (6.6) a funkce $T = T(t)$ splňuje rovnici

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \,,$$

tedy

$$T(t) = C \mathrm{e}^{-a^2 \lambda t} \,.$$

Jsou-li $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ vlastní hodnoty a $v_1,\ v_2,\ \ldots$ vlastní funkce úlohy (6.5), (6.6), pak řešení rovnice (6.27) splňující podmínku (6.31) je

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-a^2 \lambda_n t} v_n(x) \,. \tag{6.33}$$

Aby byla splněna podmínka (6.29), musí platit

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(x) = \varphi(x) \,,$$

což znamená, že

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi\,, \quad \text{kde } \|v_n\|^2 = \int_0^\ell (v_n(\xi))^2 \mathrm{d}\xi\,. \tag{6.34}$$

Řešení úlohy (6.27), (6.29), (6.31) je tedy dáno řadou (6.33), jejíž koeficienty jsou dány formulemi (6.34), tedy

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \left(\int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t} v_n(x)\,.$$

Při označení

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} v_n(x) v_n(\xi) \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t} \tag{6.35}$$

lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi\,.$$

Analogicky jako při metodě variace konstant u obyčejných diferenciálních lineárních nehomogenních rovnic budeme řešení úlohy (6.28), (6.30), (6.31) hledat ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n(x)\,,$$

kde $v_1,\ v_2,\ \ldots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (6.5), (6.6). Pak je

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(t) v_n(x)\,, \qquad u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n(t) v_n(x)\,,$$

neboť funkce v_n je řešením rovnice (6.5) s $\lambda = \lambda_n$. Funkci $f(t,\cdot)$ vyjádříme jako součet Fourierovy řady vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí $v_1,\ v_2,\ \ldots$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x)\,, \quad \text{kde } F_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell f(t,\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi\,,$$

Dosazením do rovnice (6.28) a podmínky (6.30) dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n'(t) + a^2\lambda_n C_n(t) \right) v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x)\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0) v_n(x) = 0\,.$$

Přitom λ_n je vlastní hodnota úlohy (6.5), (6.6), jíž přísluší vlastní funkce v_n, $n = 1, 2, \ldots$. Funkce C_n jsou tedy řešením Cauchyovy úlohy pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$C_n'(t) + a^2\lambda_n C_n(t) = F_n(t)\,, \qquad C_n(0) = 0\,.$$

Řešení této úlohy je

$$C_n(t) = \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t} \int_0^t F_n(\sigma) \mathrm{e}^{a^2\lambda_n \sigma} \mathrm{d}\sigma\,,$$

po dosazení za F_n dostaneme

$$C_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma,\xi) v_n(\xi) \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n(t-\sigma)} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (6.28), (6.30), (6.31) je tedy

$$u(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)v_n(\xi)\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n(t-\sigma)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\right)v_n(x)\,.$$

Při označení (6.35) lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (6.28), (6.29), (6.31) je tvaru

$$u(t,x) \;=\; v(t,x)+w(t,x)\,,$$

kde $v=v(t,x)$ je řešením úlohy (6.27), (6.29), (6.31) a $w=w(t,x)$ je řešením úlohy (6.28), (6.30), (6.31). Řešení úlohy (6.28), (6.29), (6.31) je tedy

$$u(t,x) \;=\; \int_0^\ell \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (6.28), (6.29), (6.32) je tvaru

$$u(t,x) \;=\; v(t,x)+U(t,x)\,,$$

kde funkce $U=U(t,x)$ splňuje okrajové podmínky (6.32) a $v=v(t,x)$ je řešením rovnice

$$u_t(t,x) \;=\; a^2u_{xx}(t,x)+f(t,x)-\left(U_t(t,x)-a^2U_{xx}(t,x)\right), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0,x) \;=\; \varphi(x)-U(0,x)\,, \qquad x\in(0,\ell)$$

a homogenními okrajovými podmínkami (6.31). Za funkci $U=U(t,x)$ opět stačí vzít (6.18).

Interpretace funkce G: Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned}
u_t(t,x) &= a^2u_{xx}(t,x), && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell),\\
u(0,x) &= \varphi(x), && x\in(0,\ell),\\
u(t,0) &= u(t,\ell) \;=\; 0, && t\in(0,\infty).
\end{aligned}$$

(Vedení tepla v homogenní tyči, která byla zahřáta na teplotu $\varphi(x)$ a jejíž konce udržujeme na nulové teplotě.) Množství tepla, kterým se teplota tělesa o hmotnosti m změní o Δu, je

$$Q=cm\Delta u,$$

kde c je specifické teplo. Má-li těleso na počátku děje nulovou teplotu a je zahřáto na teplotu u, pak $\Delta u=u$. Je-li tedy tyč v bodě vzdáleném ξ od jejího začátku zahřáta z nulové teploty na teplotu $\varphi(\xi)$, je množství tepla dodaného části tyče o malé délce $\Delta\xi$ ve vzdálenosti ξ od jejího začátku rovno

$$\Delta Q \;=\; c\,(\rho\Delta\xi)\,\varphi(\xi),$$

kde ρ je lineární hustota tyče. Limitním přechodem $\Delta\xi\to 0$ dostaneme $\mathrm{d}Q=c\rho\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$, takže celkové množství tepla dodaného tyči je

$$Q \;=\; c\rho\int_0^\ell \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Představme si nyní, že tyč měla nulovou teplotu a v čase $t = 0$ vznikl v bodě $\xi^* \in (0, \ell)$ bodový teplotní impuls, který „zahřál bod ξ^*“ na teplotu u_0, zbytek tyče ponechal na teplotě 0, tj.

$$\varphi(x) = u_0 \delta(x - \xi^*)$$

(δ je Diracova distribuce). Velikost tohoto impulsu byla

$$Q = c\rho \int_0^\ell \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi = c\rho u_0 \int_0^\ell \delta(\xi - \xi^*) \mathrm{d}\xi = c\rho u_0 .$$

Pak

$$u(t,x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi = u_0 \int_0^\ell \delta(x - \xi^*) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi = u_0 G(x,\xi^*,t) = \frac{Q}{c\rho} G(x,\xi^*,t).$$

Odtud plyne, že $G(x,\xi,t)$ vyjadřuje teplotní účinek okamžitého bodového zdroje tepla mohutnosti $Q = c\rho$ umístěného v bodě ξ intervalu $[0, \ell]$.

6.3 Eliptické rovnice

6.3.1 Laplaceova rovnice ve dvou proměnných s okrajovými podmínkami na obdélníku

Budeme řešit rovnici

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,, \qquad (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \tag{6.36}$$

s některými z okrajových podmínek

$$\alpha_0 u(0,y) + \beta_0 u_x(0,y) \;=\; 0 \;=\; \alpha_1 u(a,y) + \beta_1 u_x(a,y)\,, \qquad y \in (0,b)\,, \tag{6.37}$$

$$\alpha_0 u(0,y) + \beta_0 u_x(0,y) \;=\; \mu_0(y)\,, \quad \alpha_1 u(a,y) + \beta_1 u_x(a,y) \;=\; \mu_1(y)\,, \qquad y \in (0,b)\,, \tag{6.38}$$

$$\gamma_0 u(x,0) + \delta_0 u_y(x,0) \;=\; 0 \;=\; \gamma_1 u(x,b) + \delta_1 u_y(x,b)\,, \qquad x \in (0,a)\,, \tag{6.39}$$

$$\gamma_0 u(x,0) + \delta_0 u_y(x,0) \;=\; \nu_0(x)\,, \quad \gamma_1 u(x,b) + \delta_1 u_y(x,b) \;=\; \nu_1(x)\,, \qquad x \in (0,a)\,. \tag{6.40}$$

Řešení úlohy (6.36), (6.37), (6.40) budeme hledat ve tvaru součinu výrazů, z nichž jeden závisí pouze na x a druhý pouze na y, tedy

$$u(x,y) \;=\; X(x)Y(y)\,.$$

Pak je $u_{xx} = X''Y$, $u_{yy} = XY''$. Po dosazení do rovnice (6.36) a úpravě dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \;=\; -\frac{Y''(y)}{Y(y)}\,.$$

Výraz na levé straně nezávisí na y, výraz na pravé straně nezávisí na x a to znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě, řekněme $-\lambda$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \;=\; -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \;=\; -\lambda\,.$$

Opět vidíme, že funkce $X = X(x)$ je řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (6.5), (6.6). Funkce $Y = Y(y)$ je řešením rovnice

$$Y''(y) - \lambda Y(y) \;=\; 0\,.$$

Jsou-li $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ vlastní hodnoty a $v_1,\ v_2,\ \ldots$ odpovídající vlastní funkce úlohy (6.5), (6.6), přičemž $\lambda_1 > 0$, je řešení poslední rovnice s $\lambda = \lambda_n$ tvaru

$$Y(y) \;=\; A_n \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\, y} + B_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\, y}\,,$$

a tedy řešení rovnice (6.36) s podmínkou (6.37) je tvaru

$$u(x,y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\,y} + B_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\,y}\right) v_n(x)\,. \tag{6.41}$$

Aby byla splněna podmínka (6.40), musí platit

$$\begin{aligned}
\nu_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_0(A_n+B_n) + \delta_0\sqrt{\lambda_n}\,(A_n-B_n)\right) v_n(x)\,,\\
\nu_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_1\left(A_n \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\,b} + B_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\,b}\right) + \delta_1\sqrt{\lambda_n}\left(A_n \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\,b} - B_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\,b}\right)\right) v_n(x)\,,
\end{aligned}$$

což znamená, že koeficienty A_n, B_n jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
(\gamma_0+\delta_0\sqrt{\lambda_n}\,)A_n + (\gamma_0-\delta_0\sqrt{\lambda_n}\,)B_n &= \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^a \nu_0(\eta)v_n\eta\,\mathrm{d}\eta\,,\\
(\gamma_1+\delta_1\sqrt{\lambda_n}\,)\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\,b}A_n + (\gamma_1-\delta_1\sqrt{\lambda_n}\,)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\,b}B_n &= \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^a \nu_1(\eta)v_n(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Řešení úlohy (6.36), (6.37), (6.40) je dáno řadou (6.41), kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ vlastní hodnoty a $v_1,\ v_2,\ \ldots$ odpovídající vlastní funkce úlohy (6.5), (6.6), přičemž $\lambda_1 > 0$. Koeficienty A_n, B_n řady (6.41) jsou řešením soustavy algebraických rovnic (6.42), pokud je tato soustava jednoznačně řešitelná.

Řešení úlohy (6.36), (6.38), (6.39) lze najít analogicky. Řešení úlohy (6.36), (6.38), (6.40) je tvaru

$$u(x,y) \;=\; v(x,y) + w(x,y)\,,$$

kde $v = v(x,y)$ je řešení úlohy (6.36), (6.37), (6.40) a $w = w(x,y)$ je řešení úlohy (6.36), (6.38), (6.39).

6.3.2 Laplaceova rovnice ve dvou proměnných s Dirichletovými okrajovými podmínkami na kruhu

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,, \qquad x^2+y^2 < R^2\,, \tag{6.43}$$

$$u(x,y) \;=\; g(x,y)\,, \qquad x^2+y^2 = R^2\,. \tag{6.44}$$

Předpokládáme, že $R > 0$ a funkce g je spojitá.

Provedeme transformaci do polárních souřadnic

$$x \;=\; r\cos\varphi\,, \qquad y \;=\; r\sin\varphi\,.$$

Rovnice (6.43) se transformuje na tvar

$$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \;=\; 0\,. \tag{6.45}$$

Označme $f(\varphi) = g(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$. Z podmínky (6.44) dostaneme

$$u(R,\varphi) \;=\; f(\varphi)\,, \qquad \varphi\in[0,2\pi]\,. \tag{6.46}$$

Funkce $u = u(r,\varphi)$ musí být 2π-periodická, tedy

$$u(r,\varphi) \;=\; u(r,\varphi+2\pi)\,, \qquad r\in(0,R]\,,\ \varphi\in\mathbb{R}\,. \tag{6.47}$$

Hodnota funkce $u = u(r,\varphi)$ nemůže pro $r = 0$ záviset na úhlu φ a samozřejmě musí být konečná, tedy

$$u(0,\varphi) \;=\; \mathit{const}\in\mathbb{R}\,, \qquad \varphi\in\mathbb{R}\,. \tag{6.48}$$

Řešení rovnice (6.45) budeme hledat ve tvaru součinu funkcí, z nichž jedna závisí pouze na r a druhá pouze na φ, tedy

$$u(r,\varphi) \;=\; X(r)\Phi(\varphi)\,.$$

Po dosazení do rovnice (6.45) dostaneme

$$X''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}X'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}X(r)\Phi''(\varphi) \;=\; 0\,,$$

po vynásobení výrazem $\dfrac{r^2}{X(r)\Phi(\varphi)}$ a jednoduché úpravě

$$r^2\frac{X''(r)}{X(r)} + r\frac{X'(r)}{X(r)} \;=\; -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\,.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné r, výraz na pravé straně pouze na proměnné φ a to znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě, řekněme λ. Funkce $\Phi = \Phi(\varphi)$ je tedy řešením rovnice

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) \;=\; 0 \tag{6.49}$$

a funkce $X = X(r)$ je řešením rovnice

$$r^2X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) \;=\; 0\,. \tag{6.50}$$

Z podmínky (6.47) dostaneme

$$\Phi(\varphi) \;=\; \Phi(\varphi + 2\pi)\,, \tag{6.51}$$

tedy funkce Φ je 2π-periodická. Kdyby $\lambda < 0$, pak by řešení rovnice (6.49) bylo $\Phi(\varphi) \;=\; a\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,\varphi} + b\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,\varphi}$; v tomto případě by funkce Φ nemohla být nenulová periodická. Pokud $\lambda = 0$, pak $\Phi(\varphi) \;=\; b_0\varphi + a_0$; aby tato funkce byla nenulová periodická, musí být $b_0 = 0,\ a_0 \neq 0$. Je-li $\lambda > 0$ a řešení rovnice (6.49) je

$$\Phi(\varphi) \;=\; a\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + b\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi\,.$$

Aby tato funkce byla 2π-periodická, musí být

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi+2\pi) \;&=\; a\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi\cos 2\pi\sqrt{\lambda} - a\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi\sin 2\pi\sqrt{\lambda} + b\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi\cos 2\pi\sqrt{\lambda} + b\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi\sin 2\pi\sqrt{\lambda} \;=\\
&=\; \cos\sqrt{\lambda}\,\varphi(a\cos 2\pi\sqrt{\lambda} + b\sin 2\pi\sqrt{\lambda}) + \sin\sqrt{\lambda}\,\varphi(b\cos 2\pi\sqrt{\lambda} - a\sin 2\pi\sqrt{\lambda}) \;=\\
&=\; \Phi(\varphi)\,,
\end{aligned}$$

neboli

$$a \;=\; a\cos 2\pi\sqrt{\lambda} + b\sin 2\pi\sqrt{\lambda}\,, \qquad b \;=\; b\cos 2\pi\sqrt{\lambda} - a\sin 2\pi\sqrt{\lambda}\,.$$

Vyřešíme-li poslední soustavu rovnic pro neznámé $\cos 2\pi\sqrt{\lambda}$ a $\sin 2\pi\sqrt{\lambda}$, dostaneme $\cos 2\pi\sqrt{\lambda} = 1$, $\sin 2\pi\sqrt{\lambda} = 0$, což znamená, že $2\pi\sqrt{\lambda} \;=\; 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne, že netriviální řešení má úloha (6.49) (6.51) pouze pro hodnoty $\lambda = \lambda_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Toto řešení je

$$\Phi_n(\varphi) \;=\; a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Nyní budeme řešit rovnici (6.50) s $\lambda = n^2$:

$$r^2X''(r) + rX'(r) - n^2X(r) \;=\; 0\,.$$

Jedná se o Eulerovu rovnici. Řešíme ji substitucí $s = \ln r$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}X\,,$$

po dosazení

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}X - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X - n^2X \;=\; 0$$

a po úpravě

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}X - n^2X \;=\; 0\,.$$

Řešení této rovnice je

$$X(s) \;=\; \begin{cases} c_0 + d_0 s\,, & \text{pro } n = 0 \\ c_n \mathrm{e}^{ns} + d_n \mathrm{e}^{-ns}\,, & \text{pro } n > 0 \end{cases}\,, \qquad \text{tj. } X(r) \;=\; \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r\,, & \text{pro } n = 0 \\ c_n r^n + d_n r^{-n}\,, & \text{pro } n > 0 \end{cases}\,.$$

Aby byla splněna podmínka (6.48), musí být $d_n = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Je tedy

$$X_n(r) \;=\; c_n r^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Řešení úlohy (6.45), (6.47), (6.48) je tedy lineární kombinací součinů funkcí $\Phi_n = \Phi_n(\varphi)$ a $X_n = X_n(r)$, tj.

$$u(r, \varphi) \;=\; a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right)\,,$$

při označení $A_0 = 2a_0 b_0,\; A_n = a_n c_n,\; B_n = b_n c_n$ dostaneme

$$u(r, \varphi) \;=\; \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

Dosadíme do podmínky (6.46):

$$u(R, \varphi) \;=\; \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) \;=\; f(\varphi)$$

takže

$$A_n \;=\; \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \cos n\sigma \mathrm{d}\sigma\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \qquad B_n \;=\; \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \sin n\sigma \mathrm{d}\sigma\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Celkem je

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) \;&=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\sigma \cos n\varphi + \sin n\sigma \sin n\varphi)\right) \mathrm{d}\sigma \;=\; \\ &=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma - \varphi)\right) \mathrm{d}\sigma\,. \end{aligned}$$

Výraz $\cos n(\sigma - \varphi)$ je reálnou částí komplexního čísla $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\sigma - \varphi)}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma - \varphi)$$

je reálnou částí výrazu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\sigma - \varphi)} \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}\right)^n \;=\; \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R} \frac{1}{1 - \dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}} \;=\; \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}} \;=\; \\ &=\; \frac{r(\cos(\sigma - \varphi) + \mathrm{i}\sin(\sigma - \varphi))}{R - r\cos(\sigma - \varphi) - \mathrm{i}r\sin(\sigma - \varphi)} \;=\; \\ &=\; \frac{r(\cos(\sigma - \varphi) + \mathrm{i}\sin(\sigma - \varphi))(R - r\cos(\sigma - \varphi) + \mathrm{i}r\sin(\sigma - \varphi))}{(R - r\cos(\sigma - \varphi))^2 + r^2\sin^2(\sigma - \varphi)}\,. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\sigma-\varphi) &= \frac{1}{2}+\frac{Rr\cos(\sigma-\varphi)-r^2\cos^2(\sigma-\varphi)-r^2\sin^2(\sigma-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2\cos^2(\sigma-\varphi)+r^2\sin^2(\sigma-\varphi)} = \\
&= \frac{1}{2}+\frac{Rr\cos(\sigma-\varphi)-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2} = \\
&= \frac{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2+2Rr\cos(\sigma-\varphi)-2r^2}{2(R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2)} = \\
&= \frac{R^2-r^2}{2(R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2)}\,.
\end{aligned}
$$

Řešení úlohy (6.45), (6.46), (6.47), (6.48) je tedy

$$
u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\sigma\,,\ \text{pro } r<R\,,\qquad u(r,\varphi) = f(\varphi)\,,\ \text{pro } r=R\,.
$$

Výraz

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\sigma
$$

se nazývá *Poissonův integrál*, výraz

$$
K(r,\varphi,R,\sigma) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}
$$

se nazývá *Poissonovo jádro.*

Vrátíme se k původním proměnným, tj. provedeme zpětnou transformaci

$$
r = \sqrt{x^2+y^2}\,,\qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.
$$

Pak je

$$
\begin{aligned}
R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2 &= R^2-2Rr(\cos\sigma\cos\varphi+\sin\sigma\sin\varphi)+r^2 = \\
&= x^2+y^2-2R(x\cos\sigma+y\sin\sigma)+R^2(\cos^2\sigma+\sin^2\sigma) = (x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2\,.
\end{aligned}
$$

Řešení úlohy (6.43), (6.44) je tedy

$$
u(x,y) = \frac{R^2-x^2-y^2}{2\pi R}\int_0^{2\pi} g(R\cos\sigma,R\sin\sigma)\frac{R}{(x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2}\mathrm{d}\sigma\,.
$$

Označíme-li $\mathbf{x}=(x,y)$, $S_{(0,0)}^R$ kružnici se středem v počátku a poloměrem R, S bod na této kružnici, lze řešení zapsat pomocí křivkového integrálu

$$
u(\mathbf{x}) = \frac{R^2-\|\mathbf{x}\|^2}{2\pi R}\int_{S_{(0,0)}^R} g(S)\frac{\mathrm{d}S}{\|\mathbf{x}-S\|^2}\,. \tag{6.52}
$$

Tato formule se nazývá *Poissonův vzorec.*

6.3.3 Poissonova rovnice ve dvou proměnných s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami na kruhu

$$\Delta u(x,y) \;=\; G(x,y)\,, \qquad x^2+y^2<R^2\,, \tag{6.53}$$

$$u(x,y) \;=\; 0\,, \qquad x^2+y^2=R^2\,. \tag{6.54}$$

Předpokládáme, že $R>0$ a funkce G je spojitá. Rovnici transformujeme do polárních souřadnic

$$x \;=\; r\cos\varphi\,, \qquad y \;=\; r\sin\varphi\,.$$

Při označení $F(r,\varphi)=G(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ se rovnice (6.53) transformuje na tvar

$$u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} \;=\; F(r,\varphi)\,. \tag{6.55}$$

Analogicky jako u Laplaceovy rovnice musí funkce $u=u(r,\varphi)$ splňovat podmínky

$$u(R,\varphi) \;=\; 0\,, \qquad \varphi\in[0,2\pi]\,, \tag{6.56}$$

$$u(r,\varphi) \;=\; u(r,\varphi+2\pi)\,, \qquad r\in(0,R]\,,\ \varphi\in\mathbb{R}\,, \tag{6.57}$$

$$u(0,\varphi) \;=\; const\in\mathbb{R}\,, \qquad \varphi\in\mathbb{R}\,. \tag{6.58}$$

Poněvadž podle (6.57) je funkce $u(r,\cdot)$ 2π-periodická pro každé $r\in(0,R]$, lze ji hledat ve tvaru

$$u(r,\varphi) \;=\; \frac{a_0(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(r)\cos n\varphi+b_n(r)\sin n\varphi\right)\,.$$

Pravá strana rovnice (6.55) bude

$$\frac{a_0''(r)}{2}+\frac{a_0'(r)}{2r}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(a_n''(r)+\frac{a_n'(r)}{r}-\frac{n^2a_n(r)}{r^2}\right)\cos n\varphi+\left(b_n''(r)+\frac{b_n'(r)}{r}-\frac{n^2b_n(r)}{r^2}\right)\sin n\varphi\right)\,.$$

Funkce $F(r,\cdot)$ je také 2π-periodická, proto ji můžeme také vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$F(r,\varphi) \;=\; \frac{c_0(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n(r)\cos n\varphi+d_n(r)\sin n\varphi\right)\,.$$

kde

$$c_n(r) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\alpha)\cos n\alpha d\alpha\,, \quad n=0,1,2,\dots\,, \qquad d_n(r) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\alpha)\sin n\alpha d\alpha\,, \quad n=0,1,2,\dots\,.$$

Porovnáním koeficientů vidíme, že funkce $a_n=a_n(r)$ a $b_n=b_n(r)$ jsou řešením Eulerových obyčejných diferenciálních rovnic

$$r^2a_n''(r)+ra_n'(r)-n^2a_n(r) \;=\; \frac{r^2}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\alpha)\cos n\alpha d\alpha\,, \quad n=0,1,2,\dots\,,$$

$$r^2b_n''(r)+rb_n'(r)-n^2b_n(r) \;=\; \frac{r^2}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\alpha)\sin n\alpha d\alpha\,, \quad n=1,2,\dots$$

s okrajovými podmínkami

$$a_n(R) \;=\; 0\,, \quad a_n(r) \text{ je omezená pro } r\to 0+\,,$$

$$b_n(R) \;=\; 0\,, \quad b_n(r) \text{ je omezená pro } r\to 0+\,.$$

Vyšetříme speciální případ, kdy pravá strana rovnice (6.53) je konstantní, $G \equiv c$. Pak také $F \equiv c$ a tedy

$$\int_0^{2\pi} c d\alpha \;=\; 2\pi c\,, \qquad \int_0^{2\pi} c\cos n\alpha d\alpha \;=\; \int_0^{2\pi} c\sin n\alpha d\alpha \;=\; 0 \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots .$$

Funkce $a_0 = a_0(r)$ je řešením rovnice

$$r^2 a_0''(r) + r a_0'(r) \;=\; 2cr^2\,,$$

tedy $a_0(r) = \frac{c}{2}r^2 + A\ln r + B$. Poněvadž $a_0(r)$ je omezená pro $r \to 0+$, musí být $A = 0$; poněvadž $a_0(R) = 0$, musí být $B = -\frac{c}{2}R^2$. Celkem

$$a_0(r) \;=\; \frac{c}{2}(r^2 - R^2)\,.$$

Funkce $a_n = a_n(r)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ jsou řešením rovnice

$$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) \;=\; 0\,,$$

tedy $a_n(r) = Ar^n + Br^{-n}$. Poněvadž $a_0(r)$ je omezená pro $r \to 0+$, musí být $B = 0$; poněvadž $a_n(R) = 0$, musí být $A = 0$. Analogické úvahy provedeme pro funkce $b_n = b_n(r)$, $n = 1, 2, \ldots$. Celkem dostaneme

$$a_n(r) \;=\; b_n(r) \;=\; 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Dosazením do řady vyjadřující funkci $u = u(r, \varphi)$ dostaneme

$$u(r, \varphi) \;=\; \frac{c}{4}(r^2 - R^2)$$

a návratem k původním proměnným dostaneme řešení úlohy (6.53), (6.54) s $G \equiv c$ ve tvaru

$$u(x, y) \;=\; \frac{c}{4}(x^2 + y^2 - R^2)\,.$$

6.4 Cvičení

1) Řešte úlohu o chvění struny délky l, je-li

a) struna upevněna na obou koncích, na počátku je ve vzdálenosti c od jednoho konce vychýlena na vzdálenost h od rovnovážné polohy a nepohybuje se.

b) struna upevněna na obou koncích a je rozechvěna úderem plochého tvrdého kladívka o šířce 2δ, jehož střed se struny dotkne ve vzdálenosti c od jednoho konce a jež se pohybuje rychlostí v.

c) struna je upevněna na obou koncích a působí na ni konstatntní síla f; na počátku je struna v rovnovážné poloze a nepohybuje se.

d) struna je upevněna na jednom konci, druhý konec vykonává harmonický pohyb s amplitudou A a frekvencí $\omega = \frac{a\pi}{l}$. (Na počátku je druhý konec vychýlen na vzdálenost A a struna je v klidu.)

2) Řešte úlohu o chladnutí homogenní tyče délky l která byla stejnoměrně zahřáta na teplotu u_0, na jejímž bočním povrchu nedochází k výměně tepla a

a) jeden její konec udržujeme na teplotě 0, druhý je tepelně izolován.

b) jeden její konec udržujeme na teplotě u_1, druhý na teplotě u_2.

c) na koncích nastává výměna tepla s prostředím nulové teploty.

3) Homogenní koule o poloměru R byla zahřáta tak, že její počáteční teplota v libovolném bodě závisí pouze na vzdálenosti r tohoto bodu od středu koule, tj. $u(0, x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$. Povrch koule udržujeme na nulové teplotě. Určete teplotu koule v libovolném bodě a libovolném čase.

Řešte úlohu

4) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$
$u(0, y) = Ay(b - y)$, $u(a, y) = 0$, $0 \le y \le b$; $u(x, 0) = B\sin\frac{\pi x}{a}$, $u(x, b) = 0$, $0 \le x \le a$

5) $u_{xx} + u_{yy} = -2$, $0 < x < a$, $-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$
$u(0,y) = u(a,y) = 0$, $-\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$; $u(x,-\frac{b}{2}) = u(x,\frac{b}{2}) = 0$, $0 \le x \le a$

Výsledky:

1a) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$$u(0,x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & x \in [0,c) \\ \frac{h}{c-l}(x-l), & x \in [c,l], \end{cases}, \ u_t(0,x) = 0$$

$u(t,0) = u(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{2l^2h}{c(l-c)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{\pi n}{l}c) \sin(\frac{\pi n}{l}x) \cos(\frac{a\pi n}{l}t)$$

1b) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$$u(0,x) = 0, \ u_t(0,x) = \begin{cases} v, & x \in [c-\delta, c+\delta] \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$u(t,0) = u(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{4lv}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{\pi n}{l}c) \sin(\frac{\pi n}{l}\delta) \sin(\frac{\pi n}{l}x) \sin(\frac{a\pi n}{l}t)$$

1c) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$

$u(0,x) = u_t(0,x) = 0$

$u(t,0) = u(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{4l^2 f}{a^2\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(1 - \cos\left(\frac{a\pi(2n+1)}{l}t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}x\right)$$

1d) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$u(0,x) = \dfrac{A}{l}x, \ u_t(0,x) = 0$

$u(t,0) = 0, \ u(t,l) = A\cos\omega t$

$$u(t,x) = \frac{A}{l}\left(x\cos(\frac{a\pi}{l}t) - at\sin(\frac{a\pi}{l}t)\right) + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3-n} \sin\left(\frac{a\pi(n+1)}{l}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

2a) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(0,x) = u_0$; $u(t,0) = 0, \ u_x(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2l}\pi x)}{(2n+1)\exp\left\{\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2l}\right)^2 t\right\}}, \text{ stacionární stav } u \equiv 0$$

2b) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(0,x) = u_0$; $u(t,0) = u_1, \ u(t,l) = u_2$

$$u(t,x) = \frac{u_2-u_1}{l}x + u_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_0 - u_1 + (-1)^{n+1}(u_0-u_2))\sin(\frac{\pi n}{l}x)}{n\exp\left\{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right\}}, \text{ stacionární stav } u(x) = u_1 + \frac{u_2-u_1}{l}x$$

2c) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(0,x) = u_0$; $u_x(t,0) = hu(t,0), \ u_x(t,l) = -hu(t,l)$

$$u(x,t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a^2\lambda_n t)}{\lambda_n l + h^2 l + 2h} \left(\sin(\sqrt{\lambda_n}\, l) - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\cos(\sqrt{\lambda_n}\, l) - 1\right)\right)\left(\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) + h\sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)\right),$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ jsou kladné kořeny rovnice $\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2\,\mathrm{cotg}(\sqrt{\lambda} l)$

3) $u_t = a^2 \Delta u$

$u(0,x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

$u(t,x,y,z) = 0$ pro $x^2+y^2+z^2 = R^2$

$$u(t,x,y,z) = \frac{2}{R\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{n\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}\right) \int_0^R \rho f(\rho)\sin(\frac{n\pi\rho}{R})\mathrm{d}\rho$$

4) $$u(x,y) = \frac{B\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(b-y)}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)} + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right)}{(2n+1)^3\,\mathrm{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi a}{b}\right)}$$

5) $$u(x,y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{2n+1}{a}\pi y\right)\sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right)}{(2n+1)^3\,\mathrm{ch}\left(\frac{2n+1}{2a}\pi b\right)}$$

Kapitola 7

Metody řešení eliptické rovnice

7.1 Integrace per partes a Greenovy vzorce

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (\nu_1(x,y), \nu_2(x,y))$ jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Integrací podle jedné proměnné ověříme, že platí

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} f\nu_1 \,\mathrm{d}S\,, \qquad \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} f\nu_2 \,\mathrm{d}S\,.$$

Položíme-li $f = uv$, kde u, v jsou diferencovatelné funkce na $\overline{\Omega}$, dostaneme vzorce pro integraci per partes u dvojných integrálů:

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} uv\nu_1 \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} uv\nu_2 \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Odtud plyne

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}\nu_1 \mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y}\nu_2 \mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\nu_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\nu_2\right) \mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Výraz $\dfrac{\partial v}{\partial x}\nu_1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\nu_2$ je derivace funkce v ve směru jednotkového vektoru vnější normály. Označíme ho $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ a dostaneme *první Greenův vzorec*

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} \mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Analogicky odvodíme

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Odečtením prvních Greenových vzorců dostaneme *druhý Greenův vzorec*

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}S\,.$$

Analogické vzorce platí i pro funkce více proměnných: Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, u, v diferencovatelné funkce na $\overline{\Omega}$ a $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$. Pak platí

- Integrace per partes
$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}V \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} uv\,\nu_i\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V\,, \qquad i=1,2,\ldots,n\,.$$
- První Greenův vzorec
$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}V \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V\,.$$
- Druhý Greenův vzorec
$$\int\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V \;=\; \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S\,.$$

7.2 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme *Poissonovu rovnici*
$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\Omega \tag{7.1}$$
s *Dirichletovou*
$$u(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega \tag{7.2}$$
nebo *Neumannovou*
$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\nu} = g_1(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega \tag{7.3}$$
okrajovou podmínkou. Nechť funkce u_1, u_2 současně splňují rovnici (7.1) s některou z podmínek (7.2) nebo (7.3). Položme $u = u_1 - u_2$. Pro $\mathbf{x}\in\Omega$ platí
$$\Delta u(\mathbf{x}) = \Delta u_1(\mathbf{x}) - \Delta u_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0,$$
tedy funkce u splňuje na Ω Laplaceovu rovnici. Pro $\mathbf{x}\in\partial\Omega$ platí
$$u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) - g_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\nu} = \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial\nu} - \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial\nu} = g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{x}) = 0,$$
zejména tedy $u(\mathbf{x})\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\nu} = 0$ na $\partial\Omega$. S využitím prvního Greenova vzorce dostaneme
$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} u\Delta u\mathrm{d}V + \int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}V = 0 + \int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}V.$$
Odtud plyne, že $\nabla u(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x}\in\Omega$ a tedy, že $u(\mathbf{x}) = const$. To dále znamená, že $u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = const$ pro $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$, neboť řešení každé z úloh (7.1), (7.2) a (7.1), (7.3) je spojité na $\bar{\Omega}$. V případě Dirichletovy podmínky je $const = 0$, neboť $u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x}\in\Omega$.

Platí tedy: Všechna řešení úlohy (7.1), (7.2) jsou shodná, tj. úloha (7.1), (7.2) má nejvýše jedno řešení; všechna řešení úlohy (7.1), (7.3) se liší o aditivní konstantu.

7.3 Laplaceova rovnice a harmonické funkce

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast (otevřená souvislá množina). Řekneme, že funkce u definovaná na Ω je *harmonická*, má-li spojité parciální derivace druhého řádu, na Ω splňuje *Laplaceovu rovnici*
$$\Delta u \;=\; 0$$
$\left(\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$ a je-li Ω neohraničená, platí navíc
$$\limsup_{\mathbf{x}\in\Omega,|\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{x}|^{n-2}u(\mathbf{x}) \;<\; \infty\,.$$
($|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ je euklidovská vzdálenost bodu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ od počátku $(0, 0, \ldots, 0)$.)

7.3.1 Laplaceův operátor v křivočarém souřadném systému

Souřadnice $x_1, x_2, \dots, x_n$ transformujeme na souřadnice $q_1, q_2, \dots, q_n$. Pak je

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n)\,, \qquad q_i \;=\; q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \\
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\,, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2}
\end{aligned}
$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$. Tedy

$$
\Delta_{q_1, q_2, \dots, q_n} u \;=\; \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2}\,.
$$

Speciální případy:

- Polární souřadnice v rovině

$$
x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn} x) + 2k\pi
$$

$$
\Delta_{r,\varphi} u \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}
$$

- Cylindrické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$
x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\; z = z, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn} x) + 2k\pi,\; z = z
$$

$$
\Delta_{r,\varphi,z} u \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
$$

- Sférické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$
x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\; y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\; z = r\sin\vartheta,
$$

$$
r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn} x) + 2k\pi,\; \vartheta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
$$

$$
\Delta_{r,\varphi,\vartheta} u \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)
$$

7.3.2 Jednoduché harmonické funkce v rovině

Rovnice

$$
u_{xx} + u_{yy} \;=\; 0
$$

má v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi$ tvar

$$
u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r \;=\; 0\,.
$$

Snadno ověříme, že funkce

$$
u(r,\varphi) \;=\; r^k\cos k\varphi \qquad \text{a} \qquad v(r,\varphi) \;=\; r^k\sin k\varphi\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots
$$

jsou řešením poslední rovnice. Vyjádříme tyto funkce v kartézských souřadnicích

$u(r,\varphi)$	1	$r\cos\varphi$	$r\sin\varphi$	$r^2\cos 2\varphi$	$r^2\sin 2\varphi$	$r^3\cos 3\varphi$	$r^3\sin 3\varphi$	$\dots$
$u(x,y)$	1	x	y	x^2-y^2	$2xy$	x^3-3xy^2	$3x^2y-y^3$	$\dots$

Získáme polynomy stupně k, které nazýváme *jednoduché harmonické funkce stupně* k. Nechť Ω je ohraničená oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ je jednoduchá uzavřená křivka implicitně daná rovnicí $P(x,y)=0$, kde P je polynom stupně nejvýše k. Řešení rovnice

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y) \;=\; 0\,, \qquad (x,y)\in\Omega$$

s některou z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} u(x,y) &= g_1(x,y)\,, \quad (x,y)\in\partial\Omega\,,\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}(x,y) &= g_2(x,y)\,, \quad (x,y)\in\partial\Omega\,,\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}(x,y) &= h(g_3(x,y)-u(x,y))\,, \quad (x,y)\in\partial\Omega\,, \end{aligned}$$

g_1 je polynom stupně nejvýše k; $g_2,\ g_3$ jsou polynomy stupně nejvýše $k-1$ a $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ značí derivaci ve směru vnější normály, lze v tomto případě hledat ve tvaru lineární kombinace jednoduchých harmonických funkcí stupně nejvýše k.

7.3.3 Kruhová a kulová inverse

Kruhová inverse vzhledem ke kružnici $x^2+y^2=a^2$, v polárních souřadnicích $r=a$, je zobrazení $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{xa^2}{x^2+y^2},\,\frac{ya^2}{x^2+y^2}\right) \;=\; \frac{a^2}{|(x,y)|^2}(x,y)\,,$$

v polárních souřadnicích

$$(r,\varphi)\mapsto\left(\frac{a^2}{r},\varphi\right).$$

Kruhová inverse je prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, x^2+y^2\ge a^2\}$ na množinu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, 0<x^2+y^2\le a^2\}$, body kružnice jsou pevné (samodružné) body tohoto zobrazení.

Funkce $u=u(r,\varphi)$ je harmonická na množině $\{(r,\varphi):\, r<a\}$ právě tehdy, když funkce

$$v=v(r',\varphi)=u\left(\frac{a^2}{r'},\varphi\right)=u(r,\varphi)$$

je harmonická na množině $\{(r',\varphi):\, r'>a\}$.

D.: $r=\dfrac{a^2}{r'}$, $\dfrac{\partial r}{\partial r'}=-\dfrac{a^2}{r'^2}=-\dfrac{r^2}{a^2}$, tedy

$$\begin{aligned} v_{r'}(r',\varphi) &= v_r(r',\varphi)\frac{\partial r}{\partial r'} \;=\; -\frac{r^2}{a^2}u_r(r,\varphi)\,,\\ v_{r'r'}(r',\varphi) &= \frac{\partial}{\partial r}v_{r'}(r',\varphi)\frac{\partial r}{\partial r'} \;=\; \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a^2}u_r(r,\varphi)\right)\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \;=\\ &= \frac{r^2}{a^4}\left(2ru_r(r,\varphi)+r^2u_{rr}(r,\varphi)\right) \;=\; \frac{2r^3}{a^4}u_r(r,\varphi)+\frac{r^4}{a^4}u_{rr}(r,\varphi)\,,\\ \Delta_{r',\varphi}\,v(r',\varphi) &= v_{r'r'}(r',\varphi)+\frac{1}{r'^2}v_{\varphi\varphi}(r',\varphi)+\frac{1}{r'}v_{r'}(r',\varphi) \;=\\ &= \frac{2r^3}{a^4}u_r(r,\varphi)+\frac{r^4}{a^4}u_{rr}(r,\varphi)+\frac{r^2}{a^4}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)-\frac{r^3}{a^4}u_r(r,\varphi) \;=\\ &= \frac{r^4}{a^4}\left(u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)\right) \;=\; \frac{r^4}{a^4}\Delta_{r,\varphi}\,u(r,\varphi)\,. \end{aligned}$$

□

Tato vlastnost umožňuje převádět řešení úlohy

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,, \quad x^2+y^2<a^2$$

na řešení úlohy

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,, \quad x^2+y^2>a^2\,.$$

Kruhová inverse jednoduchých harmonických funkcí:

$$1,\; \frac{1}{r}\cos\varphi,\; \frac{1}{r}\sin\varphi,\; \frac{1}{r^2}\cos 2\varphi,\; \frac{1}{r^2}\sin 2\varphi,\; \ldots\,.$$

Kulová inverse vzhledem ke sféře $x^2+y^2+z^2=a^2$, ve sférických souřadnicích $r=a$, je zobrazení dané předpisem

$$(x,y,z)\mapsto \frac{a^2}{|(x,y,z)|^2}(x,y,z)\,,$$

ve sférických souřadnicích

$$(r,\varphi,\vartheta)\mapsto\left(\frac{a^2}{r},\varphi,\vartheta\right)\,.$$

Kulová inverse je prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,x^2+y^2+z^2\geq a^2\}$ na množinu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,0<x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$, body sféry jsou pevné body tohoto zobrazení.

Funkce $u=u(r,\varphi,\vartheta)$ je harmonická právě tehdy, když funkce

$$v \;=\; v(r',\varphi,\vartheta) \;=\; \frac{a^2}{r'}u\left(\frac{a^2}{r'},\varphi,\vartheta\right) \;=\; ru(r,\varphi,\vartheta)$$

je harmonická.

D.: $r=\dfrac{a^2}{r'}$, $\dfrac{\partial r}{\partial r'}=-\dfrac{r^2}{a^2}$. Tedy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r'^2}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right) &= \frac{r^2}{a^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a^4}{r^2}\frac{\partial ru}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r'}\right)\frac{\partial r}{\partial r'} = \frac{r^2}{a^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(-a^2\left(u+r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) = \\
&= \frac{r^4}{a^4}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) = \frac{r^3}{a^4}\left(2r\frac{\partial u}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) = \\
&= \frac{r^3}{a^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{r^5}{a^4}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\,, \\
\frac{1}{r'^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} &= \frac{r^2}{a^4}\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 ru}{\partial\varphi^2} = \frac{r^3}{a^4}\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \frac{r^5}{a^4}\frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,, \\
\frac{1}{r'^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right) &= \frac{r^2}{a^4}\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial ru}{\partial\vartheta}\right) = \frac{r^5}{a^4}\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)\,,
\end{aligned}$$

odtud

$$\Delta_{r',\varphi,\vartheta}\,v \;=\; \frac{r^5}{a^4}\Delta_{r,\varphi,\vartheta}\,u\,.$$

□

Transformace

$$v(r',\varphi,\vartheta) \;=\; ru(r,\varphi,\vartheta)\,, \qquad \text{kde} \quad r=\frac{1}{r'}$$

se nazývá *Kelvinova*.

7.3.4 Fundamentální harmonické funkce

Hledáme symetrické řešení rovnice

$$\Delta u(\mathbf{x}) \;=\; 0\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,.$$

Provedeme transformaci do sférických souřadnic

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1 \ldots \cos\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\\
x_2 &= r\cos\varphi_1 \ldots \cos\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\\
x_3 &= r\cos\varphi_1 \ldots \cos\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}\\
&\;\vdots\\
x_{n-1} &= r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\\
x_n &= r\sin\varphi_1\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž funkce u má být symetrická, t.j. její hodnota závisí pouze na vzdálenosti argumentu od počátku, je $u = u(r)$ a $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi_i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$. Tedy

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \varphi_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i} =\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r}\,, \quad \text{tedy} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{x_i^2}{r^2}\,,\\
\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} &= \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} - \dfrac{x_i^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\,.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1\,, \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) = \frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{n-1}{r}\,.$$

Celkem máme

$$\Delta u \;=\; u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r \;=\; 0\,.$$

Řešení této rovnice je

$$u(r) \;=\; \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & n = 2\\[2mm] \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & n \geq 3 \end{cases}.$$

Aby $\lim\limits_{r\to\infty} r^{n-2}u(r) < \infty$, musí být $C_1 < 0$ v případě $n = 2$. Volíme $C_2 = 0$ a $C_1 = \begin{cases} -1, & n = 2\\ 1, & n \geq 3 \end{cases}.$

Definice: Funkci $v(\mathbf{x}_0, \cdot)$ definovanou na $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ vztahem

$$v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \;=\; \begin{cases} \ln\dfrac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|}, & n = 2\\[2mm] \dfrac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

nazýváme *fundamentální (elementární) harmonickou funkcí se singularitou v bodě* $\mathbf{x}_0$.

Speciální případy:

$$
\begin{aligned}
v(x_0, y_0, x, y) &= \ln \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}}\,, \\
v(x_0, y_0, z_0, x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Z úvahy provedené před definicí plyne, že fundamentální harmonická funkce se singularitou v bodě $\mathbf{x}_0$ je harmonickou funkcí na oblasti $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. Dále je zřejmé, že

$$
v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)
$$

a pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ platí

$$
\Delta_{x_1, x_2, \ldots, x_n} v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \Delta_{x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}} v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})\,. \tag{7.4}
$$

7.3.5 Integrální representace dvakrát diferencovatelné funkce

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, u funkce definovaná na $\overline{\Omega}$, která má na $\overline{\Omega}$ spojité parciální derivace druhého řádu. Pak pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ platí

$$
u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S - \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u \, \mathrm{d}V\,,
$$

kde $v(\mathbf{x}, \cdot)$ je fundamentální harmonická funkce se singularitou v $\mathbf{x}$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ je derivace ve směru jednotkového vektoru vnější normály $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, tj. $\dfrac{\partial}{\partial \nu} = \nabla \cdot \nu$ a

$$
c_n = \begin{cases} 2\pi, & n = 2 \\ (n-2)\sigma_n, & n \geq 3 \end{cases}\,,
$$

kde σ_n je $(n-1)$-rozměrná míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$, $\sigma_{2k+1} = \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}$, $\sigma_{2k} = \dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}$. (Zejména $c_3 = 4\pi$.) Nevlastní integrál na pravé straně rovnosti definujeme vztahem

$$
\int\limits_{\Omega} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u \, \mathrm{d}V = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u \, \mathrm{d}V\,,
$$

kde $K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}$ je koule se středem $\mathbf{x}$ a poloměrem ε.

D.: Důkaz provedeme pro $n \geq 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Označme $K_{\mathbf{x}}^{a}$, resp. $S_{\mathbf{x}}^{a}$ kouli, resp. sféru se středem $\mathbf{x}$ a poloměrem a. Buďte $\mathbf{x} \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon} \subseteq \Omega$. Podle druhého Greenova vzorce platí

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}} (u \Delta v(\mathbf{x}, \cdot) - v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u) \, \mathrm{d}V = \\
&\qquad = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S - \int\limits_{S_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}} \left(u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S\,,
\end{aligned}
$$

Poněvadž funkce $v(\mathbf{x}, \cdot)$ je na $\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}$ harmonická, je

$$
- \int\limits_{\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u \, \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S + \int\limits_{S_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}} \left(v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S\,.
$$

Normálový vektor k $S^\varepsilon_{\mathbf{x}}$ v bodě $\mathbf{y}$ má složky $\nu_i = \dfrac{1}{\varepsilon}(y_i - x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$. Pro $\mathbf{x} \in S^\varepsilon_{\mathbf{x}}$ je

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\partial x_i} \;=\; \frac{n-2}{\varepsilon^n}(x_i - y_i)\,,$$

takže pro $\mathbf{x} \in S^\varepsilon_{\mathbf{x}}$ je

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu} \;=\; -\frac{n-2}{\varepsilon^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \;=\; -\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\,.$$

Dále podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje $\xi \in S^\varepsilon_{\mathbf{x}}$, že

$$\int\limits_{S^\varepsilon_{\mathbf{x}}} u\frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S \;=\; u(\xi)\int\limits_{S^\varepsilon_{\mathbf{x}}} \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S \;=\; -u(\xi)\int\limits_{S^\varepsilon_{\mathbf{x}}} \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\,\mathrm{d}S \;=\; -u(\xi)\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\sigma_n\varepsilon^{n-1} \;=$$

$$=\; -(n-2)\sigma_n u(\xi)\,,$$

takže

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S^\varepsilon_{\mathbf{x}}} u\frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S \;=\; -(n-2)\sigma_n u(\mathbf{x})\,.$$

Poněvadž $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ je spojitá na $S^\varepsilon_{\mathbf{x}}$, existuje podle 1. Weierstrassovy věty $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right| \le K$ pro každý bod na $S^\varepsilon_{\mathbf{x}}$. Tedy

$$\left|\;\int\limits_{S^\varepsilon_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \cdot)\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S\right| \;\le\; K\int\limits_{S^\varepsilon_{\mathbf{x}}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}S_{\mathbf{y}} \;=\; \frac{K}{\varepsilon^{n-2}}\sigma_n\varepsilon^{n-1} \;=\; K\sigma_n\varepsilon\,,$$

takže

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S^\varepsilon_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \cdot)\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S \;=\; 0\,.$$

□

Důsledky:

1. Je-li funkce u navíc harmonická na Ω, platí pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$

$$u(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(\mathbf{x}, \cdot)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S\,. \tag{7.5}$$

2. Pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci ψ s kompaktním nosičem (sr. 3.1.1) platí

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\Delta v(\mathbf{x}, \cdot)\mathrm{d}V \;=\; -c_n\psi(\mathbf{x})\,,$$

neboli

$$\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;=\; -c_n\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})\,, \tag{7.6}$$

kde δ je Diracova distribuce.

D.: $\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je distribuce, která splňuje

$$\left\langle\; \Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\middle|\; \psi(\mathbf{y}) \;\right\rangle \;=\; \left\langle\; v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\middle|\; \Delta\psi(\mathbf{y}) \;\right\rangle$$

pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci ψ s kompaktním nosičem (sr. 3.1.6). Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ taková oblast s hladkou hranicí, že $\operatorname{Supp}\psi \subseteq \Omega$.
Pak pro $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ je $\psi(\mathbf{y}) = 0 = \dfrac{\partial\psi(\mathbf{y})}{\partial\nu}$ a tedy s využitím předchozí věty dostaneme

$$\left\langle\ \Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \middle|\ \psi(\mathbf{y})\ \right\rangle = \left\langle\ v(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \middle|\ \Delta\psi(\mathbf{y})\ \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x},\cdot)\Delta\psi \mathrm{d}V = \int\limits_{\Omega} v(\mathbf{x},\cdot)\Delta\psi \mathrm{d}V =$$

$$= -c_n\left(\psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(\mathbf{x},\cdot)\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi\frac{\partial v(\mathbf{x},\cdot)}{\nu}\right)\mathrm{d}S\right) = -c_n\psi(\mathbf{x})\,.$$

□

7.3.6 Vlastnosti harmonických funkcí

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, u harmonická funkce se spojitými druhými parciálními derivacemi na $\overline{\Omega}$. Pak platí

1.
$$\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S = 0\,.$$

   D.: Ve druhém Greenově vzorci stačí položit $v \equiv 1$. □

2. Věta o střední hodnotě
   Buď $\mathbf{x} \in \Omega$, $S^a_{\mathbf{x}}$ sféra se středem $\mathbf{x}$ a poloměrem a taková, že $S^a_{\mathbf{x}} \subseteq \Omega$. Pak

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} u\,\mathrm{d}S\,, \qquad \text{pro } n = 2\,,$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} u\,\mathrm{d}S\,, \qquad \text{pro } n = 3\,,$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_n a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} u\,\mathrm{d}S\,, \qquad \text{pro } n > 3\,,$$

   kde σ_n je číslo zavedené v 7.3.5.

   D.: Důkaz provedeme pro $n \geq 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
   Je $\nu_i = \dfrac{1}{a}(y_i - x_i)$. Pro $\mathbf{y} \in S^a_{\mathbf{x}}$ platí $v(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \dfrac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}} = \dfrac{1}{a^{n-2}}$, takže podle 1. je

$$\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S = \frac{1}{a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S = 0\,.$$

   Dále pro $\mathbf{y} \in S^a_{\mathbf{x}}$ je

$$\frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_i}\nu_i = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2-n)(y_i-x_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}(y_i-x_i) = \frac{2-n}{a|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}} = \frac{2-n}{a^{n-1}}\,,$$

   takže

$$\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} u\frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu}\mathrm{d}S = \frac{2-n}{a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} u\,\mathrm{d}S\,.$$

Podle (7.5) je

$$u(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}}\left(v(\mathbf{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v(\mathbf{x},\cdot)}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S \;=\; \frac{n-2}{c_n a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} u\,\mathrm{d}S \;=\; \frac{1}{\sigma_n a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\mathbf{x}}} u\,\mathrm{d}S\,.$$

□

3. Princip maxima
Je-li harmonická funkce u nekonstantní na oblasti Ω, pak nabývá své největší a nejmenší hodnoty na hranici $\partial\Omega$, tj. pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ platí

$$\min\{u(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \partial\Omega\} \;<\; u(\mathbf{x}) \;<\; \max\{u(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \partial\Omega\}\,.$$

D.: Plyne z předchozího tvrzení. □

7.4 Metoda potenciálů

V celém oddílu bude $v(\mathbf{x},\cdot)$ označovat fundamentální harmonickou funkci se singularitou v $\mathbf{x}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ derivaci ve směru jednotkového vektoru vnější normály k $\partial\Omega$, c_n číslo zavedené v 7.3.5.

7.4.1 Objemový potenciál

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená a $f_1 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ je funkce.
Funkce $\varphi_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\varphi_I(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\Omega} f_1 v(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}V$$

se nazývá *objemový potenciál.*

- Je-li funkce f_1 spojitá na $\overline{\Omega}$, pak φ_I je harmonickou funkcí na $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ pro $n \geq 3$. Je-li $n = 2$ a funkce f_1 je navíc nezáporná, je φ_I harmonickou funkcí na $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$.

  D.: Z toho, že funkce f je spojitá na kompaktní množině $\bar{\Omega}$ plyne, že následující výpočet je korektní.

  $$\Delta\varphi_I(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\Omega}\Delta_{\mathbf{x}}\left(f v(\mathbf{x},\cdot)\right)\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\Omega} f\Delta_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x},\cdot)\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}V_{\mathbf{y}} \;=\; 0.$$

  Předposlední rovnost plyne z (7.4), poslední z toho, že pro $\mathbf{x} \notin \bar{\Omega}$ je $v(\mathbf{x},\mathbf{y})$ harmonická v každém $\mathbf{y} \in \Omega$.
  Dále pro $n \geq 3$ platí

  $$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{x}|^{n-2}\varphi_I(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\Omega} f \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{x}|^{n-2} v(\mathbf{x},\cdot)\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}V \;<\; \infty.$$

  Je-li $n = 2$ a $f_1 \geq 0$ na Ω, pak

  $$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \varphi_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} f_1 \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} v(\mathbf{x},\cdot)\mathrm{d}V = -\infty.$$

  □

- Má-li funkce f_1 spojité parciální derivace prvního řádu na Ω a je spojitá na $\overline{\Omega}$, pak φ_I má spojité parciální derivace druhého řádu na Ω a platí

  $$\Delta\varphi_I \;=\; -f_1\,.$$

D.: Pro $\mathbf{x} \in \Omega$ dostaneme s využitím (7.4) a (7.6)

$$\Delta\varphi_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_\Omega \Delta_\mathbf{x}\left(fv(\mathbf{x},\cdot)\right)\mathrm{d}V = \frac{1}{c_n}\int\limits_\Omega f\Delta_\mathbf{x}v(\mathbf{x},\cdot)\mathrm{d}V = \frac{1}{c_n}\int\limits_\Omega f\Delta_\mathbf{x}v(\cdot,\mathbf{x})\mathrm{d}V =$$

$$= \frac{1}{c_n}\int\limits_\Omega f(\mathbf{y})\Delta_\mathbf{x}v(\mathbf{y},\mathbf{x})\mathrm{d}V_\mathbf{y} = -\frac{1}{c_n}\int\limits_\Omega f(\mathbf{y})c_n\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\mathrm{d}V_\mathbf{y} = -f(\mathbf{x}).$$

□

7.4.2 Řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde Ω je ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí.

Řešení hledáme ve tvaru $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$, kde

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{c_n}\int\limits_\Omega f(\xi_1,\dots,\xi_n)v(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)\,\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n$$

a w je řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici

$$\begin{aligned} \Delta w(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ w(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \partial\Omega. \end{aligned}$$

7.4.3 Plošné potenciály

Buďte $f_2, f_3 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funkce takové, že v případě neohraničenosti $\partial\Omega$ platí

$$\lim_{\mathbf{x}\in\partial\Omega, |\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{x}|^{n-2} f_2(\mathbf{x}) = 0, \qquad \lim_{\mathbf{x}\in\partial\Omega, |\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{x}|^{n-2} f_3(\mathbf{x}) = 0.$$

Funkce $\varphi_{II} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\varphi_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} f_2 v(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S$$

se nazývá *potenciál jednoduché vrstvy.*

Funkce $\varphi_{III} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\varphi_{III}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} f_3 \frac{\partial v(\mathbf{x},\cdot)}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S$$

se nazývá *potenciál dvojvrstvy.*

- Jsou-li funkce $f_2,\ f_3$ spojité na $\partial\Omega$, pak funkce φ_{II} a φ_{III} jsou harmonické na $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$.

  D.: Důkaz je analogií důkazu analogického tvrzení pro objemový potenciál. □

  Každý z integrálů φ_{II}, φ_{III} určuje vlastně dvě funkce. Jednu funkci harmonickou na Ω a druhou harmonickou na $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

- Buď $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ a ψ funkce definovaná v okolí bodu $\mathbf{x}_0$. Označme

$$[\psi(\mathbf{x}_0)]_I = \lim_{\Omega\ni\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}), \qquad [\psi(\mathbf{x}_0)]_E = \lim_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}\ni\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}),$$

za předpokladu, že tyto limity existují.
Pro každý bod $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ platí

$$\left[\frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_I = \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} - \frac{1}{2} f_2(\mathbf{x}), \qquad \left[\frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_E = \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} + \frac{1}{2} f_2(\mathbf{x}), \tag{7.7}$$

$$[\varphi_{III}(\mathbf{x})]_I = \varphi_{III}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} f_3(\mathbf{x}), \qquad [\varphi_{III}(\mathbf{x})]_E = \varphi_{III}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} f_3(\mathbf{x}). \tag{7.8}$$

D.: A. N. Tichonov, A.A. Samarskij: Rovnice matematické fysiky, Praha 1955, str. 395–402. □

Derivace potenciálu jednoduché vrstvy ve směru vnější normály má tedy na $\partial\Omega$ nespojitost prvního druhu se skokem velikosti

$$\left[\frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_E - \left[\frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_I = f_2(\mathbf{x}),$$

potenciál dvojvrstvy má na $\partial\Omega$ nespojitost prvního druhu se skokem velikosti

$$[\varphi_{III}(\mathbf{x})]_E - [\varphi_{III}(\mathbf{x})]_I = f_3(\mathbf{x}).$$

Podle 7.3.5 lze každou dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci u vyjádřit jako součet potenciálu objemového, jednoduché vrstvy a dvojvrstvy, přičemž

$$f_1 = -\Delta u, \qquad f_2 = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \qquad f_3 = -u.$$

Proto se 7.3.5 někdy nazývá věta o třech potenciálech.

7.4.4 Řešení okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici

Budeme řešit některou z rovnic

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{7.9}$$

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \tag{7.10}$$

s některou z okrajových podmínek

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{7.12}$$

Úloha (7.9), (7.11) / (7.10), (7.11) / (7.9), (7.12) / (7.10), (7.12) se nazývá *vnitřní Dirichletova úloha* / *vnější Dirichletova úloha* / *vnitřní Neumannova úloha* / *vnější Neumannova úloha*.

Řešení Dirichletovy úlohy hledáme ve tvaru potenciálu dvojvrstvy

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S,$$

kde λ je zatím neurčená funkce. Pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ je podle (7.8)

$$[u(\mathbf{x})]_I + \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) = [u(\mathbf{x})]_E - \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}).$$

Označme

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \nu(\mathbf{s})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial s_i} \nu_i(\mathbf{s}).$$

Pak

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \lambda K(\mathbf{x}, \cdot) \, \mathrm{d}S.$$

Při řešení vnitřní úlohy musí být $[u(\mathbf{x})]_I = f(\mathbf{x})$, tedy funkce λ musí splňovat integrální rovnici

$$-\frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \lambda K(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S \;=\; f(\mathbf{x})\,,$$

při řešení vnější úlohy musí být $[u(\mathbf{x})]_E = f(\mathbf{x})$, tedy funkce λ musí splňovat integrální rovnici

$$\frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \lambda K(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S \;=\; f(\mathbf{x})\,.$$

Řešení Neumannovy úlohy hledáme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy

$$u(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu v(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,,$$

kde μ je zatím neurčená funkce. Pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ je podle (7.7)

$$\left[\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_I + \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}) \;=\; \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} \;=\; \left[\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_E - \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x})\,.$$

Platí

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} \;=\; \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial v(\mathbf{x},\cdot)}{\partial \nu(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}S\,.$$

Označme

$$K_1(\mathbf{x},\mathbf{s}) \;=\; \frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{s})}{\partial \nu(\mathbf{x})} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{s})}{\partial x_i}\nu_i(\mathbf{x})\,.$$

Pak

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu K_1(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,.$$

Při řešení vnitřní úlohy musí být $\left[\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_I = f(\mathbf{x})$, tedy funkce μ musí splňovat integrální rovnici

$$-\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu K_1(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S \;=\; f(\mathbf{x})\,,$$

při řešení vnější úlohy musí být $\left[\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right]_E = f(\mathbf{x})$, tedy funkce μ musí splňovat integrální rovnici

$$\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu K_1(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S \;=\; f(\mathbf{x})\,.$$

Výrazy $K(\cdot,\cdot)$ a $K_1(\cdot,\cdot)$ nazýváme *jádro* příslušné integrální rovnice.

Příklad: Dirichletova úloha na polorovině

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0\,, & x \in \mathbb{R},\ y > 0\,. \\ u(x,0) &= f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

V tomto případě je

$$v(x,y,\xi,\eta) \;=\; -\frac{1}{2}\ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)\,,$$

$$\frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \xi} \;=\; \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,, \qquad \frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \eta} \;=\; \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,,$$

$$\nu(\xi,\eta) \;=\; (0,-1)\,,\ \text{pro } y=0\,,$$
$$K(x,y,\xi,\eta) \;=\; \frac{\eta-y}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,.$$

Jádro integrání rovnice je $K(x,0,\xi,0)=0$, takže funkce $\lambda=\lambda(x)$ musí splňovat rovnici

$$-\frac{1}{2}\lambda(x) \;=\; f(x)\,,$$

tedy $\lambda(x)=-2f(x)$ a řešení dané úlohy je

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

7.5 Greenova funkce Laplaceova operátoru

Buď $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ derivace ve směru vnější normály k $\partial\Omega$.

Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$\alpha\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\nu}+\beta u(\mathbf{x}) \;=\; 0\,,\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega \tag{7.13}$$

je funkce $G=G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ definovaná na $\Omega\times\overline{\Omega}$, pro niž platí

(i) $G(\mathbf{x},\cdot)$ je harmonická na $\Omega\setminus\{\mathbf{x}\}$;

(ii) pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci ψ s kompaktním nosičem (sr. 3.1.1) platí

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi\Delta G(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}V \;=\; \psi(\mathbf{x})\,,$$

neboli

$$\Delta_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,,$$

kde δ je Diracova distribuce;

(iii) pro každé $\mathbf{y}\in\partial\Omega$ splňuje podmínku

$$\alpha\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})}+\beta G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; 0\,.$$

Lemma: Nechť $G_k(\mathbf{x},\cdot)$ je pro každé $k\in\mathbb{N}$ řešením úlohy

$$\Delta_{\mathbf{y}}G_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; d_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,,\qquad \mathbf{y}\in\Omega\,,$$
$$\alpha\frac{\partial G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})}+\beta G_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; 0\,,\qquad \mathbf{y}\in\partial\Omega\,,$$

kde

$$d_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; \begin{cases}0, & \mathbf{y}\notin K_{\mathbf{x}}^{1/k}\\[2ex] \omega_k, & \mathbf{y}\in K_{\mathbf{x}}^{1/k}\end{cases}\,,$$

přičemž $K_{\mathbf{x}}^{1/k} \;=\; \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n : |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le\dfrac{1}{k}\right\}$ je koule se středem $\mathbf{x}$ a poloměrem $\dfrac{1}{k}$, ω_k je převrácená hodnota n-rozměrné míry této koule, tedy $\int\limits_{K_{\mathbf{x}}^{1/k}}\omega_k\,\mathrm{d}V \;=\; 1$.

Pak Greenova funkce Laplaceova operátoru s počáteční podmínkou (7.13) je

$$G(\mathbf{x},\cdot) \;=\; \lim_{k\to\infty}G_k(\mathbf{x},\cdot)\,.$$

D.: Důkaz pouze naznačíme. Nebudeme dokazovat, že všechny použité záměny limitních operací jsou korektní.

(i) Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $k \geq k_0$ je funkce $G_k(\mathbf{x}, \cdot)$ harmonická na oblasti $\Omega \setminus \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \frac{1}{k} \right\}$.

(ii) Platí

$$\begin{aligned}
\Delta G(\mathbf{x}, \cdot) &= \lim_{k \to \infty} \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot)\,, \\
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G(\mathbf{x}, \cdot)\,\mathrm{d}V &= \lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot)\,\mathrm{d}V = \lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi d_k(\mathbf{x}, \cdot)\,\mathrm{d}V = \\
&= \lim_{k \to \infty} \psi(\mathbf{x}_k) \int\limits_{K_{\mathbf{x}}^{1/k}} \omega_k\,\mathrm{d}V = \lim_{k \to \infty} \psi(\mathbf{x}_k)\,,
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}_k \in K_{\mathbf{x}}^{1/k}$ je číslo z věty o střední hodnotě integrálního počtu. Ze spojitosti funkce ψ plyne

$$\lim_{k \to \infty} \psi(\mathbf{x}_k) = \psi(\mathbf{x})\,.$$

Odtud již plyne platnost podmínky.

(iii) Je zřejmé.

□

7.5.1 Řešení okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x} \in \Omega\,, \tag{7.14}$$

$$\alpha \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} + \beta u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega\,. \tag{7.15}$$

Nechť G_k jsou funkce z předchozího lemma. Podle druhého Greenova vzorce je

$$\int\limits_{\Omega} \left(u \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot) - G_k(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u\right) \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G_k(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S\,.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} \int\limits_{\Omega} u \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot)\,\mathrm{d}V &= \int\limits_{\Omega} u \Delta G(\mathbf{x}, \cdot)\,\mathrm{d}V = u(\mathbf{x})\,, \\
\lim_{k \to \infty} \int\limits_{\Omega} G_k(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u\,\mathrm{d}V &= \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \cdot) f\,\mathrm{d}V\,, \\
\lim_{k \to \infty} \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G_k(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S &= \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S\,.
\end{aligned}$$

Pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ tedy řešení úlohy (7.14), (7.15) splňuje rovnici

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \cdot) f\,\mathrm{d}V + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S\,.$$

Speciální případy podmínek (7.15):

- $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (Dirichletova úloha)
  Pro $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ je $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a $u(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$ podle (7.15). Tedy pro $\mathbf{x} \in \Omega$ je

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} f G(\mathbf{x}, \cdot)\,\mathrm{d}V + \int\limits_{\partial\Omega} g \frac{\partial G(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S\,.$$

- $\alpha = 1,\ \beta = 0$ (Neumannova úloha)
  Pro $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ je $\dfrac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} = 0$ podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a $\dfrac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} = g(\mathbf{x})$ podle (7.15).
  Tedy pro $\mathbf{x} \in \Omega$ je
$$u(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\Omega} fG(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}V \;-\; \int\limits_{\partial\Omega} gG(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,.$$

- $\alpha \neq 0 \neq \beta$ (Newtonova úloha)
  Pro $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ je $\dfrac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} = -\dfrac{\beta}{\alpha}G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a $\dfrac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} = \dfrac{1}{\alpha}(g(\mathbf{y}) - \beta u(\mathbf{y}))$ podle (7.15), tedy
$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G(\mathbf{x},\cdot)}{\partial\nu} - G(\mathbf{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S \;&=\; \int\limits_{\partial\Omega}\left(-\frac{\beta}{\alpha}uG(\mathbf{x},\cdot) \;-\; \frac{1}{\alpha}(g-\beta u)G(\mathbf{x},\cdot)\right)\mathrm{d}S \;=\\ &=\; -\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\partial\Omega} gG(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,.\end{aligned}$$
  Pro $\mathbf{x} \in \Omega$ je tedy
$$u(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\Omega} fG(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}V \;-\; \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\partial\Omega} gG(\mathbf{x},\cdot), \mathrm{d}S\,.$$

7.5.2 Vyjádření Greenovy funkce

Nechť $h = h(\mathbf{y})$ je řešením úlohy
$$\Delta h(\mathbf{y}) \;=\; 0\,, \qquad \mathbf{y} \in \Omega\,, \tag{7.16}$$
$$\alpha\frac{\partial h(\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} + \beta h(\mathbf{y}) \;=\; \frac{\alpha}{c_n}\frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} + \frac{\beta}{c_n}v(\mathbf{x},\mathbf{y})\,, \qquad \mathbf{y} \in \partial\Omega\,, \tag{7.17}$$
kde c_n je číslo z 7.3.5 a $v(\mathbf{x},\cdot)$ je fundamentální harmonická funkce se singularitou v $\mathbf{x}$. Potom funkce
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; -\frac{1}{c_n}v(\mathbf{x},\mathbf{y}) + h(\mathbf{y})$$
je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou (7.13).

D.: Podmínky (i) a (iii) jsou zřejmé, podmínka (ii) plyne z (7.6). □

7.5.3 Řešení úlohy (7.16), (7.17) ve speciálním případě

Nechť oblast Ω má vlastnost: Ke každému $\mathbf{x} \in \Omega$ existuje $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ takové, že pro všechna $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ podíl
$$\frac{v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{v(\mathbf{x}',\mathbf{y})} \;=\; \gamma(\mathbf{x})$$
nezávisí na $\mathbf{y}$. Nechť dále $\alpha = 0,\ \beta = 1$.

V tomto případě je funkce
$$h(\mathbf{y}) \;=\; \frac{1}{c_n}\gamma(\mathbf{x})v(\mathbf{x}',\mathbf{y})$$
řešením úlohy (7.16), (7.17).

D.: Poněvadž $\mathbf{x}' \neq \Omega$, je $\Delta_{\mathbf{y}}h(\mathbf{y}) = \Delta_{\mathbf{y}}\left(\dfrac{1}{c_n}\gamma(\mathbf{x})v(\mathbf{x}',\mathbf{y})\right) = \dfrac{1}{c_n}\gamma(\mathbf{x})\Delta_{\mathbf{y}}v(\mathbf{x}',\mathbf{y}) = 0$ pro každé $\mathbf{y} \in \Omega$.
Pro $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ je
$$h(\mathbf{y}) \;=\; \frac{1}{c_n}\gamma(\mathbf{x})v(\mathbf{x}',\mathbf{y}) \;=\; \frac{1}{c_n}\frac{v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{v(\mathbf{x}',\mathbf{y})}v(\mathbf{x}',\mathbf{y}) \;=\; \frac{1}{c_n}v(\mathbf{x},\mathbf{y})\,.$$
□

7.5.4 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na poloprostoru

Nechť $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ je poloprostor.

Pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$ položme $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ — symetrie podle nadroviny $x_n = 0$. Pak $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Buď $\mathbf{y}' = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) \in \partial\Omega$.

Pro $n = 2$ je

$$\frac{v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{v(\mathbf{x}',\mathbf{y})} = \frac{\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\ln|\mathbf{x}'-\mathbf{y}|} = \frac{\ln((x_1-y_1)^2 + x_2^2)}{\ln((x_1-y_1)^2 + (-x_2)^2)} = 1\,,$$

pro $n \geq 3$ je

$$\frac{v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{v(\mathbf{x}',\mathbf{y})} = \frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}|^{n-2}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}} = \left(\frac{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1}-y_{n-1})^2 + (-x_n)^2}{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1}-y_{n-1})^2 + x_n^2}\right)^{(n-2)/2} = 1.$$

Tedy $\gamma \equiv 1$ a Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$$

je

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{c_n}\left(v(\mathbf{x}',\mathbf{y}) - v(\mathbf{x},\mathbf{y})\right).$$

Jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$ je $\nu = (0, \ldots, 0, -1)$, takže

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \nu} = -\frac{\partial G(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_n}.$$

- Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= f(x,y)\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0\,,\\ u(x,0) &= g(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}
(x,y)' &= (x,-y)\,,\\
c_n &= 2\pi\,,\\
v(x,y,\xi,\eta) &= -\frac{1}{2}\ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)\,,\\
G(x,y,\xi,\eta) &= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\ln((x-\xi)^2 + (-y-\eta)^2) + \frac{1}{2}\ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)\right) =\\
&= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}\,,\\
\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4\pi}\frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,\frac{-2(y-\eta)((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2) - 2(y+\eta)((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}{((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2)^2} =\\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{2y(x-\xi)^2 + 2y(y^2-\eta^2)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2)} =\\
&= -\frac{y}{\pi}\frac{(x-\xi)^2 + (y^2-\eta^2)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2)}\,,\\
\frac{\partial G(x,y,\xi,0)}{\partial \eta} &= -\frac{y}{\pi}\frac{(x-\xi)^2 + y^2}{((x-\xi)^2 + y^2)^2} = -\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-\xi)^2 + y^2}\,,
\end{aligned}$$

takže řešení dané úlohy je

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\xi\in\mathbb{R},\,\eta>0} f(\xi,\eta)\ln\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}\,.$$

• Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y,z) &= f(x,y,z)\,, & x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ z>0\,,\\ u(x,y,0) &= g(x,y)\,, & x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (x,y,-z)\,,\\
c_n &= 4\pi\,,\\
v(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,,\\
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(-z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right),\\
\frac{\partial G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{-2(z-\zeta)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}}-\frac{2(z+\zeta)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{3/2}}\right)=\\
&= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z-\zeta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}}+\frac{z+\zeta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{3/2}}\right),\\
\frac{\partial G(x,y,z,\xi,\eta,0)}{\partial\zeta} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{z}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}\,,
\end{aligned}$$

takže řešení dané úlohy je

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &=\\
&= \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\xi\in\mathbb{R},\,\eta\in\mathbb{R},\,\zeta>0} f(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{1}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{1/2}}-\frac{1}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{1/2}}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+\\
&\quad+\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(\xi,\eta)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

7.5.5 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na kouli

Nechť $\Omega = K_0^R = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n<R\}$ je otevřená koule.

Pro $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in K_0^R$ položme $\mathbf{x}'=\dfrac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}$ — kulová inverse.

Buď $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in S_0^R=\partial K_0^R$, tedy $\sum\limits_{i=1}^n y_i^2=R^2$. Pak je

$$\begin{aligned}
\left|\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}-\frac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right|^2 &= \sum_{i=1}^n\left(\frac{R}{|\mathbf{x}|}x_i-\frac{|\mathbf{x}|}{R}y_i\right)^2 = \left(\frac{R}{|\mathbf{x}|}\right)^2\sum_{i=1}^n x_i^2-2\sum_{i=1}^n x_iy_i+\left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right)^2\sum_{i=1}^n y_i^2 =\\
&= R^2-2\sum_{i=1}^n x_iy_i+|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2-2\sum_{i=1}^n x_iy_i+\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n(y_i-x_i)^2 = |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2\,,
\end{aligned}$$

tedy

$$\left|\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}-\frac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,.$$

Pro $n\ge 3$ s využitím předchozího vztahu dostaneme

$$\frac{v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{v(\mathbf{x}',\mathbf{y})} = \left|\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{y}}{\mathbf{x}-\mathbf{y}}\right|^{n-2} = \left|\frac{\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\mathbf{x}-\mathbf{y}}\right|^{n-2} = \left(\frac{R}{|\mathbf{x}|}\right)^{n-2}\left|\frac{\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}-\frac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}}{\mathbf{x}-\mathbf{y}}\right|^{n-2} = \left(\frac{R}{|\mathbf{x}|}\right)^{n-2},$$

takže $\gamma(\mathbf{x}) = \left(\frac{R}{|\mathbf{x}|}\right)^{n-2}$, což znamená, že

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; \frac{1}{c_n}\left(\left(\frac{R}{|\mathbf{x}|}\right)^{n-2} v\left(\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x},\mathbf{y}\right) - v(\mathbf{x},\mathbf{y})\right) \tag{7.18}$$

je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},\pm\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}) \;=\; 0\,.$$

Jednotkový vektor vnější normály k S_0^R v bodě $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ je $\frac{1}{R}(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Dále

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{2-n} \;=\; (2-n)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-n}\frac{-2(x_i-y_i)}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \;=\; \frac{(n-2)(x_i-y_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\,,\\
\frac{\partial v(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} &= \frac{n-2}{R|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)y_i \;=\; \frac{n-2}{R|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i - R^2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v\left(\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x},\mathbf{y}\right)}{\partial \nu(\mathbf{y})} &= \frac{n-2}{R\left|\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|^n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}x_iy_i - R^2\right) =\\
&= \frac{n-2}{\frac{R^{n+1}}{|\mathbf{x}|^n}\left|\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}-\frac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right|^n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}x_iy_i - R^2\right) \;=\; \left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right)^n \frac{n-2}{R|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}x_iy_i - R^2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} &= \frac{1}{c_n}\frac{n-2}{R|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{R^2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}x_iy_i - R^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i - R^2\right)\right) =\\
&= \frac{n-2}{c_nR|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\left(R^2-|\mathbf{x}|^2\right).
\end{aligned}$$

Poněvadž $c_n=(n-2)\sigma_n$, kde σ_n je $(n-1)$-rozměrná míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$, platí

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \;=\; \frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{\sigma_nR}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\,.$$

Označíme-li $|S^R|$ míru sféry o poloměru R, je $|S^R|=\sigma_nR^{n-1}$. Řešení úlohy

$$\begin{aligned}
\Delta u(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,, \qquad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<R^2\,,\\
u(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,, \qquad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=R^2
\end{aligned}$$

lze tedy zapsat ve tvaru

$$u(\mathbf{x}) \;=\; \int_{K_0^R} f(\cdot)G(\mathbf{x},\cdot)\,\mathrm{d}V \;+\; R^{n-2}\frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{|S^R|}\int_{S_0^R} g(\cdot)\frac{\mathrm{d}S}{|\mathbf{x}-\cdot|^n}\,,$$

kde funkce G je dána vztahem (7.18). Pro $f\equiv 0$ dostaneme *Poissonův vzorec*

$$u(\mathbf{x}) \;=\; R^{n-2}\frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{|S^R|}\int_{S_0^R} g(\cdot)\frac{\mathrm{d}S}{|\mathbf{x}-\cdot|^n}\,.$$

Zejména pro $n=3$ je

$$u(\mathbf{x}) \;=\; \frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{4\pi R}\int_{S_{(0,0,0)}^R} g(\cdot)\frac{\mathrm{d}S}{|\mathbf{x}-\cdot|^3}\,.$$

7.5.6 Greenova funkce pro kruh

Funkce

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{\dfrac{R}{|\mathbf{x}|}}{\left|\dfrac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|}-\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) \;=\; \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\left|\dfrac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}-\dfrac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right|}$$

je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u\left(x,\sqrt{R^2-x}\right) \;=\; 0\,.$$

D.:

(i) $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\dfrac{1}{2\pi}\left(\ln\dfrac{R}{|\mathbf{x}|}+v\left(\dfrac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x},\mathbf{y}\right)-v(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)$.

Pro $\mathbf{y}\in K_0^R\setminus\{\mathbf{x}\}$ je $\Delta_{\mathbf{y}}\ln\dfrac{R}{|\mathbf{x}|}=0,\ \Delta_{\mathbf{y}}v(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$.

Je-li $\mathbf{x}\in K_0^R$, pak $\dfrac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}\notin\overline{K_0^R}$, a tedy $\Delta_{\mathbf{y}}v\left(\dfrac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=0$.

Je-li $\mathbf{x}\in\partial K_0^R$, pak $|\mathbf{x}|=R$ a tedy $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\dfrac{1}{2\pi}\left(\ln\dfrac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}-\ln\dfrac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right)=0$.

(ii) Plyne z toho, že $\Delta_{\mathbf{y}}v(\mathbf{x},\mathbf{y})=-\dfrac{1}{2\pi}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})$.

(ii) Analogicky jako v 7.5.5 lze ukázat, že pro $\mathbf{y}\in\partial K_0^R$ je $\left|\dfrac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}-\dfrac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right|=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$.

Tedy pro $\mathbf{y}\in\partial K_0^R$ je

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\left|\dfrac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}-\dfrac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right|}-\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) \;=\; \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \;=\; 0\,.$$

□

Řešení úlohy

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y) &= 0\,, & x^2+y^2<R^2\,,\\ u(x,y) &= g(x,y)\,, & x^2+y^2=R^2\,.\end{aligned}$$

tedy je

$$u(x,y) \;=\; \frac{R^2-x^2-y^2}{2\pi R}\int\limits_{S^R_{(0,0)}} g(\cdot)\frac{\mathrm{d}S}{|(x,y)-\cdot|^2}\,,$$

což je Poissonův vzorec (6.52).

7.6 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru

Buď $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$. Číslo $\lambda\in\mathbb{R}$ nazveme *vlastním číslem* a funkci v definovanou na $\overline{\Omega}$ nazveme *vlastní funkcí Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor*, je-li $v\not\equiv 0$ a platí

$$\begin{aligned}\Delta v(\mathbf{x}) &= -\,\lambda v(\mathbf{x})\,, & \mathbf{x}\in\Omega\,,\\ v(\mathbf{x}) &= 0\,, & \mathbf{x}\in\partial\Omega\,.\end{aligned}\tag{7.19}$$

Jsou-li $\lambda_1\neq\lambda_2$ vlastní čísla a $v_1,\ v_2$ příslušné vlastní funkce Laplaceova operátoru, pak jsou funkce $v_1,\ v_2$ ortogonální na Ω, tj. platí

$$\int\limits_{\Omega} v_1v_2\mathrm{d}V \;=\; 0\,.$$

D.: Poněvadž pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ je $v_1(\mathbf{x}) = 0 = v_2(\mathbf{x})$, dostaneme s využitím druhého Greenova vzorce

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_1 v_2 \mathrm{d}V &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_\Omega (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 v_2 \mathrm{d}V = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_\Omega (\lambda_1 v_1 v_2 - v_1 \lambda_2 v_2)\mathrm{d}V = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_\Omega (-v_2 \Delta v_1 + v_1 \Delta v_2)\mathrm{d}V = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_{\partial\Omega}\left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S = 0 \,.\ \square\end{aligned}$$

Platí:

- Všechna vlastní čísla Laplaceova operátoru jsou nenulová.
  Úloha
  $$\begin{aligned}\Delta v(\mathbf{x}) &= 0\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega\,, \\ v(\mathbf{x}) &= 0\,, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega\end{aligned}$$
  má totiž podle 7.2 jediné řešení a toto řešení je $v \equiv 0$.
- Dirichletova úloha pro Laplaceův operátor má spočetnou množinu vlastních čísel. Množina příslušných vlastních funkcí tvoří úplnou ortogonální množinu v prostoru funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$.

Řešení úlohy

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega\end{aligned} \tag{7.20}$$

hledáme ve tvaru

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(\mathbf{x}),$$

kde v_n, $n = 1, 2, \ldots$, jsou vlastní funkce Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor. Je-li funkce f integrovatelná ve druhé mocnině ($f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$), pak

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(\mathbf{x}), \quad \text{kde } f_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_\Omega f v_n \mathrm{d}V.$$

Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ vlastní čísla příslušná k vlastním funkcím $v_1, v_2, \ldots$. Pak je

$$\begin{aligned}\Delta \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(\mathbf{x}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Delta v_n(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(\mathbf{x}), \\ -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Odtud

$$c_n = -\frac{f_n}{\lambda_n} = -\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2}\int_\Omega f v_n \mathrm{d}V.$$

Řešení úlohy (7.20) tedy je

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2}\int_\Omega f v_n \mathrm{d}V\right) v_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega f \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{v_n(\mathbf{x}) v_n}{\lambda_n \|v_n\|^2}\right)\mathrm{d}V.$$

To znamená, že Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

je

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{y})}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jsou vlastní čísla a $v_1, v_2, \ldots$ jsou vlastní funkce úlohy (7.19).

7.7 Cvičení

Řešte úlohu

1) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$
   $u(0, y) = Ay(b - y)$, $u(a, y) = 0$, $0 \le y \le b$; $u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}$, $u(x, b) = 0$, $0 \le x \le a$

2) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $x^2 + y^2 > a$
   $u(a \cos \varphi, a \sin \varphi) = 2 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi$, u je ohraničená

3) $u_{xx} + u_{yy} = c$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1$; $u(x, y) = 0$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Výsledky: 1) $u(x, y) = \dfrac{B \operatorname{sh}(\frac{\pi(b-y)}{a}) \sin(\frac{\pi x}{a})}{\operatorname{sh}(\frac{\pi b}{a})} + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}) \sin(\frac{(2n+1)\pi y}{b})}{(2n+1)^3 \operatorname{sh}(\frac{(2n+1)\pi a}{b})}$
2) $u(x, y) = \frac{5}{2} + \frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ **3)** $u(x, y) = \frac{c}{2} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} (\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1)$