3. Optimální odhad stavů systému

Hana Fitzová

Brno, 2007

Obsah

- Optimální estimátor
- Odhad stavů dynamického systému
- Kalmanův filtr
- Smoothing
- Rozšířený Kalmanův filtr
- Odhad nelineárních systémů metodou Monte Carlo
- Shrnutí

Úvod

- Řada systémů je zadána přímo svým vnitřním popisem.
- Pozorovateli je skryta přímá informace o hodnotách stavových proměnných.
- Měřící přístroje podávají informaci o stavu systému.
- Úkol: jak z pozorovaných výstupů y určit co nejpřesněji stavy x .
- Problém je vyřešen pro lineární systém s gaussovskými šumy (Kalmanův filtr).

Informace o stavech I

- Mějme neznámý náhodný vektor $X \in \mathcal{L}_2^{n_x}$ a vektor naměřených dat $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, který je realizací náhodného vektoru $Z \in \mathcal{L}_2^{nz}$.
- Dále známe simultánní hustotu pravděpodobnosti $p(x, z)$.
- Před měřením z je informace o X obsažena pouze v hustotě $p(x, z)$ a rozložení X udává tzv. apriorní hustota

$$p_0(x) = \int p(x, z) dz$$

Informace o stavech II

- Po provedení měření z je informace obohacena a rozložení X je dáno podmíněnou hustotou, tzv. aposteriorní hustotou

$$p_1(x) = p(x|z)$$

- Tyto úvahy jsou jádrem tzv. bayessovského přístupu k optimálnímu odhadu.
- Jediným skutečným rozložením je rozložení apriorní, avšak aposteriorní rozložení má některé výhodné vlastnosti s ohledem na co nejpřesnější odhad realizace vektoru X, ne hustoty vektoru X.

Kriterium nejmenších čtverců

- Přesnost odhadu (estimace) se nejčastěji měří kriteriem nejmenších čtverců (least mean squares).
- Střední kvadratická chyba
  Buď $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ množina *přípustných estimátorů* náhodného vektoru X. Pro každý přípustný estimátor $y \in \mathcal{E}$ zavedeme *střední kvadratickou chybu* vztahem

$$J(y) = E((X-y)^T(X-y))$$

Optimální estimátor I

- Optimální estimátor
  Estimátor $\hat{X} \in \mathcal{E}$ nazveme *optimálním* podle kriteria nejmenších čtverců (optimální MS estimátor), pokud platí
  $$J(\hat{X}) = \min_{y \in \mathcal{E}} J(y)$$
- Optimální apriorní estimátor
  Střední hodnota EX je optimálním estimátorem na množině všech apriorních estimátorů.

  Při označení $\tilde{X} = X - \hat{X}$ platí $E(\tilde{X}) = 0$ (odhad je nestranný) a $D(\tilde{X}) = D(X)$.

Optimální estimátor II

- Optimální aposteriorní estimátor
  Podmíněná střední hodnota $E(X|z)$ je optimálním estimátorem na množině všech aposteriorních estimátorů.

- Opět při označení $\tilde{X} = X - \hat{X}$ platí $E(\tilde{X}) = 0$ (odhad je nestranný) a $D(\tilde{X}) = D(X|Z)$.

- Jsou-li vektory X a Z nezávislé, pak $p(x, z) = p(x)p(z)$ a tedy i $E(X|z) = E(X)$. Tedy při nezávislosti apriorní a aposteriorní estimátor splývají.

Podmíněné normální rozdělení

Nechť

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_x & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_z \end{bmatrix} \right)$$

Pak aposteriorní náhodná veličina $X|z$ má normální rozložení se střední hodnotou $E(X|z)$ a varianční maticí $D(X|z)$, kde

$$E(X|z) = \mu_x + \Sigma_{xz}\Sigma_z^{-1}(z - \mu_z)$$

$$D(X|z) = \Sigma_x - \Sigma_{xz}\Sigma_z^{-1}\Sigma_{zx}$$

Lineární MS estimátor I

Optimální MS estimátor na přípustné množině lineárních estimátorů

$$\mathcal{E} = \{y = Az + b : \ A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_z}, b \in \mathbb{R}^{n_x}\}$$

je estimátor

$$\hat{X}_{LMS} = \mu_x + \Sigma_{xz}\Sigma_z^{-1}(z - \mu_z)$$

kde $\mu_x = EX$, $\mu_z = EZ$, $\Sigma_{xz} = C(X, Z)$, $\Sigma_z = DZ$.

Lineární MS estimátor II

- Lineární MS estimátor $\hat{X}_{LMS}$ je nestranný.
- Je-li vektor $(X^T, Z^T)^T$ rozložen normálně, pak estimátory $\hat{X}_{MS}$ a $\hat{X}_{LMS}$ splývají.

Příklad

Náhodná veličina X má rozložení $X \sim Rs(0,1)$. Tuto veličinu měříme pomocí náhodné veličiny Z. Vztah mezi veličinami je následující:

$$Z = \ln\left(\frac{1}{X}\right) + V$$

kde $V \sim Ex(1),\ p(v) = p_V(x)$ je šum měření.
Vypočtěte optimální lineární MS estimátor veličiny X.

Odhad stavů dynamického systému

Mějme diskrétní dynamický systém

(1) $$x_{t+1} = f(x_t, u_t, v_t)$$

(2) $$y_t = g(x_t, u_t, w_t)$$

s počátečním rozložením $p(x_0)$.

- Budeme konstruovat optimální odhady stavů $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rekurentním způsobem.
- Pro odhad stavů máme k dispozici jen časové řady vstupů a výstupů.
- Aktuální stav x_t se vypočte na základě minulého stavu x_{t-1} a nových dat u_t a y_t.

Odhad stavů DS (II)

- Rozložení šumu v_t pokládáme za známé, je tedy rovnicí (1) jednoznačně určena podmíněná hustota pravděpodobnosti $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$.
- Rovnicí (2) je určena podmíněná hustota pravděpodobnosti $p(y_t|x_t, u_t)$.
- Označíme

  (3) $$D_t = \{u_0, y_0, \ldots, u_t, y_t\}$$

  data dostupná do času t.

Odhad stavů DS (III)

- Obě rovnice (1) a (2) jsou na minulých datech nezávislé, lze tedy psát

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad p(x_{t+1}|x_t, u_t, D_{t-1}) &= p(x_{t+1}|x_t, u_t) \\
(5) \qquad p(y_t|x_t, u_t, D_{t-1}) &= p(y_t|x_t, u_t)
\end{aligned}
$$

  Tj. stav x_t obsahuje veškerou informaci obsaženou v datech D_{t-1} potřebnou pro predikci výstupu y_t.

- Dále řízení u_t neovlivňuje přímo stav x_t (přirozené podmínky řízení), což lze zapsat jako:

$$
(6) \qquad p(x_t|D_{t-1}, u_t) = p(x_t|D_{t-1})
$$

Odhad stavů DS (IV)

- Jsme v čase t, máme k dispozici data D_{t-1}, chceme odhadnout hodnotu x_t.
- Nejlépe ji aproximuje podmíněná hustota $p(x_t|D_{t-1})$, tzv. apriorní hustota.
- Předpokládáme, že apriorní hustota je známá funkce. Po doplnění dat hodnotami u_t, y_t máme k dispozici data D_t, díky nimž můžeme aktualizovat odhad stavu x_t.
- Hledáme tedy novou podmíněnou hustotu $p(x_t|D_t)$, což je tzv. aposteriorní hustota.

Věta (aposteriorní hustota)

Aposteriorní hustota $p(x_t|D_t)$ je dána vztahem

$$p(x_t|D_t) = \frac{p(y_t|x_t, u_t)}{p(y_t|u_t, D_{t-1})} p(x_t|D_{t-1})$$

- Důkaz plyne z Bayessova řetězového pravidla o podmíněných hustotách.
- Přechod od apriorní hustoty k hustotě aposteriorní se nazývá datový krok.
- Pro rekurentní výpočty je třeba ještě odvodit přechod obrácený – tzv. predikční krok.

Věta (predikční krok)

Predikční krok odhadu stavu je dán vztahem

$$p(x_{t+1}|D_t) = \int p(x_{t+1}|x_t, u_t)p(x_t|D_t)dx_t$$

- Důkaz plyne z řetězového pravidla, z rovnice (4) a dokončí se marginalizací rozdělení x_{t+1} podle x_t.
- Posledním krokem je zahájení rekurze. Je třeba znát počáteční hustotu

$$p(x_0|D_{-1}) = p(x_0)$$

která je předem známa nebo se určuje zkusmo.

Spojení kroků

- Datový a predikční krok lze spojit do jednoho, ale ztratíme tím aposteriorní hustoty, které jsou obecně lepší než hustoty apriorní.

$$p(x_{t+1}|D_t) = \int \frac{p(x_{t+1}|x_t, u_t)p(y_t|x_t, u_t)}{p(y_t|u_t, D_{t-1})} p(x_t|D_{t-1}) dx_t =$$

$$= \frac{p(x_{t+1}, y_t|u_t, D_{t-1})}{p(y_t|u_t, D_{t-1})}$$

Kalmanův filtr

- Kalmanův filtr je analogií výše uvedené nelineární rekurze pro speciální případ, kdy jsou stavy x i výstupy y rozloženy normálně.
- Pak je apriorní i aposteriorní hustota opět normální.
- Normálně rozloženou náhodnou veličinu plně určuje její střední hodnota a rozptyl.
- V průběhu výpočtu tedy stačí sledovat pouze tyto dvě číselné charakteristiky, čímž se celý výpočet zjednodušuje.
- Mají-li být stavy rozloženy normálně, musí být příslušný dynamický systém *lineární s gaussovskými šumy*, což je největší slabina tohoto algoritmu.

Věta (Kalmanův filtr I)

Mějme diskrétní stochastický systém tvaru:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + v_t \tag{7}$$

$$y_t = Cx_t + Du_t + w_t \tag{8}$$

splňující: $x_0 \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$, $v_t \sim N(0, \Sigma_v)$, $w_t \sim N(0, \Sigma_w)$, $Ev_t w_t^T = 0$, $Ex_0 v_t^T = 0 \quad \forall t$, kde vektor μ_0 a matice $\Sigma_0, \Sigma_v, \Sigma_w$ jsou známé.

Nechť jsou známa data D_t. Označme $x_{t|k} = x_t | D_k$.

Věta (Kalmanův filtr II)

Pak apriorní estimátor $x_{t|t-1}$ a aposteriorní estimátor $x_{t|t}$ jsou normální pro všechna t:

$$
\begin{aligned}
x_{t|t-1} &\sim N(\mu_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}) \\
x_{t|t} &\sim N(\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t})
\end{aligned}
$$

kde střední hodnoty $\mu_{t|t-1}, \mu_{t|t}$ a varianční matice $\Sigma_{t|t-1}, \Sigma_{t|t}$ se vypočtou dle následujících rekurentních vztahů:

Věta (Kalmanův filtr III)

$$
\begin{aligned}
&(9) & \mu_{t|t} &= \mu_{t|t-1} + K_t(y_t - C\mu_{t|t-1} - Du_t) \\
&(10) & \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - K_t C \Sigma_{t|t-1} \\
&(11) & \mu_{t+1|t} &= A\mu_{t|t} + Bu_t \\
&(12) & \Sigma_{t+1|t} &= A\Sigma_{t|t}A^T + \Sigma_v \\
&(13) & K_t &= \Sigma_{t|t-1}C^T(C\Sigma_{t|t-1}C^T + \Sigma_w)^{-1}
\end{aligned}
$$

První dva vztahy tvoří tzv. datový krok algoritmu, druhé dva vztahy krok predikční, poslední vztah je tzv. Kalmanovo zesílení (Kalmanův zisk).

Smoothing v KF

Zpětný běh filtru na základě informací z času $t = 1, \ldots, N$

$$
\begin{aligned}
(14) \qquad \mu_{t|N} &= \mu_{t|t} + F_t(\mu_{t+1|N} - \mu_{t+1|t}) \\
(15) \qquad \Sigma_{t|N} &= \Sigma_{t|t} - F_t(\Sigma_{t+1|t} - \Sigma_{t+1|N}) F_t{}^T \\
(16) \qquad F_t &= \Sigma_{t|t} A^T \Sigma_{t+1|t}^{-1}
\end{aligned}
$$

Příklad (část I)

- Loď se pohybuje po rovníku východním směrem rychlostí 10 námořních mil za hodinu. Okamžitou rychlost lodi ovlivňují náhodné poryvy větru a nárazy vln.
- Navigátor lodi odhaduje každou hodinu zeměpisnou délku lodi l a rychlost lodi $s = dl/dt$ v mph. V čase $t = 0$ odhadl navigátor polohu $l_0 = 0$ a rychlost $s = 10$. Dále pak zaznamenal údaje:

čas	1	2	3	4	5	6
poloha	9"	19.5"	29"	38.4"	50"	59.5"

Příklad (část II)

- Označíme-li l_t, s_t polohu a rychlost lodi v čase t, pak je úlohou navigátora optimální odhad veličin l_t, s_t.
- Počáteční odhady můžeme modelovat jako nezávislé náhodné veličiny s normálním rozložením. Rozptyly odhadů jsou sledovány a jejich odhady jsou $Dl_0 = 2$, $Ds_0 = 3$.
- Nejprve popíšeme chování systému. Během hodiny t se loď pohybuje rychlostí s_t, takže její poloha se změní na:

$$l_{t+1} = l_t + s_t$$

Příklad (část III)

- Rychlost kolísá díky náhodným vlivům, což popíšeme pomocí náhodné veličiny $e_t \sim N(0,1)$:

$$s_{t+1} = s_t + e_t$$

- Rozptyl měření sextantu udávaný výrobcem je $\Sigma_w = 2$.
- Stavový vektor definujeme jako $x_t = \begin{pmatrix} l_t \\ s_t \end{pmatrix}$
- S využitím vztahů (9)-(13) odhadněte optimlání stavy tohoto systému pomocí Kalmanova filtru.

Návod

- Načtěte matice systému a data (A, B, C, D, Σ_v, Σ_w, x_0, Σ_{x_0}, U, y, ...) $\mu_{0|-1} = x_0$, $\Sigma_{0|-1} = \Sigma_{x_0}$
- V cyklu spočtěte $\mu_{t|t}$, $\Sigma_{t|t}$, $\mu_{t+1|t}$, $\Sigma_{t+1|t}$, $\mu_{t|N}$, $\Sigma_{t|N}$
- Výsledky vykreslete do obrázků: predikce + filtrace + smoothing pro polohu, totéž pro rychlost; dále vývoj rozptylu (f+p+s) obou veličin.
- Vytvořte funkci, která bude provádět jednotlivé kroky Kalmanova filtru včetně smoothingu a příklad upravte tak, aby tuto funkci využíval. Vstupními parametry funkce bude: y, U, A, B, C, D, Σ_v, Σ_w, x_0 a Σ_{x_0}. Výstupy budou: $\mu_{t|t}$, $\Sigma_{t|t}$, $\mu_{t+1|t}$, $\Sigma_{t+1|t}$, $\mu_{t|N}$, $\Sigma_{t|N}$.

Další příklady

- Odhad mezery výstupu
- Transmisní kanály

Rozšířený Kalmanův filtr I

- Princip rozšířeného Kalmanova filtru spočívá v tom, že nelineární dynamický systém v každém kroku přibližně nahradíme lineárním dynamickým systémem a na tento pak aplikujeme obyčejný Kalmanův filtr.
- Vztahy odvozené výše nelze užít přímo, poněvadž linearizace vede na jiný typ systému (viz dále).

Rozšířený Kalmanův filtr II

Mějme nelineární diskrétní stochastický systém:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) + v_t \tag{17}$$

$$y_t = g(x_t, u_t) + w_t \tag{18}$$

s počáteční podmínkou $x_0 \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$.

Rozšířený Kalmanův filtr definujeme jako algoritmus výpočtů následujících estimátorů:

$$x_{t|t-1} \sim N(\mu_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}) \tag{19}$$

$$x_{t|t} \sim N(\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t}) \tag{20}$$

$$x_{t|N} \sim N(\mu_{t|N}, \Sigma_{t|N}) \tag{21}$$

Rozšířený Kalmanův filtr III

$$\mu_{t|t} = \mu_{t|t-1} + K_t(y_t - g(\mu_{t|t-1}, u_t)) \tag{22}$$

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t C_t \Sigma_{t|t-1} \tag{23}$$

$$\mu_{t+1|t} = f(\mu_{t|t}, u_t) \tag{24}$$

$$\Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t{}^T + \Sigma_v \tag{25}$$

$$K_t = \Sigma_{t|t-1} C_t{}^T (C_t \Sigma_{t|t-1} C_t{}^T + \Sigma_w)^{-1} \tag{26}$$

$$\mu_{t|N} = \mu_{t|t} + F_t(\mu_{t+1|N} - \mu_{t+1|t}) \tag{27}$$

$$\Sigma_{t|N} = \Sigma_{t|t} - F_t(\Sigma_{t+1|t} - \Sigma_{t+1|N}) F_t{}^T \tag{28}$$

$$F_t = \Sigma_{t|t} A_t{}^T \Sigma_{t+1|t}^{-1} \tag{29}$$

Rozšířený Kalmanův filtr IV

kde matice A_t, C_t jsou následující Jakobiány:

$$A_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_{t|t}) \quad C_t = \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_{t|t-1})$$

- Vztahy 19-20 představují filtrační (datový) krok.
- Vztahy 21-22 představují predikční krok.
- Vztahy 24-25 představují zpětný běh filtru (smoothing).

Princip metody Monte Carlo I

- Metoda Monte Carlo je založena na tom, že informaci o rozložení náhodné veličiny nese náhodný výběr z tohoto rozložení.
- Čím větší je rozsah výběru, tím je informace přesnější.
- Pro náhodný vektor $x \in \mathcal{L}^{n_x}$ máme náhodný výběr $(x_1, \ldots, x_n)$ rozsahu n, který obsahuje vzorky $x_i \in \mathcal{R}^{n_x}$.
- Empirická hustota pravděpodobnosti získaná z náhodného výběru je aproximací skutečné hustoty pravděpodobnosti náhodného vektoru x.

Princip metody Monte Carlo II

- Empirickou hustotu pravděpodobnosti lze psát jako:

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x_i)$$

kde $\delta(x) : \mathcal{R}^{n_x} \to \mathcal{R}$ je tzv. Diracova funkce.

- Diracova funkce

$$\delta(x) = \lim_{h \to 0} \delta_h(x)$$

$$\delta_h(x) = \frac{1}{h} \text{ pro } 0 < x < h, \quad \delta_h(x) = 0 \text{ jinak}$$

Princip metody Monte Carlo III

- Dále přiřadíme jednotlivým vzorkům x_i váhy $w_i \geq 0$ tak, aby suma všech vah byla rovna jedné.
- Empirická hustota pravděpodobnosti je pak tvaru:

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \delta(x - x_i)$$

Vážený Bootstrap algoritmus I

Mějme dynamický systém tvaru:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, u_t, v_t) \\ y_t &= g(x_t, u_t, w_t) \end{aligned}$$

s počátečním stavem x_0 a s empirickou hustotou

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i(0|-1)\delta(x - x_i(0|-1))$$

Mějme data D_t. Pak odhady $x_{t|t-1}, x_{t|t}, x_{t|N}$ s empirickými hustotami

Vážený Bootstrap algoritmus II

$$
\begin{aligned}
p_n(x_{t|t-1}) &= \sum_{i=1}^{n} w_i(t|t-1)\delta(x - x_i(t|t-1)) \\
p_n(x_{t|t}) &= \sum_{i=1}^{n} w_i(t|t)\delta(x - x_i(t|t)) \\
p_n(x_{t|N}) &= \sum_{i=1}^{n} w_i(t|N)\delta(x - x_i(t|N))
\end{aligned}
$$

jsou spočteny *váženým bootstrap algoritmem* právě když platí:

Vážený Bootstrap algoritmus III

- Filtrační (datový) krok: hustoty a váhy se přepočítávají; vzorky zůstávají stejné.

$$
\begin{aligned}
x_i(t|t) &= x_i(t|t-1) \\
\overline{w}_i(t|t) &= p(y(t)|x_i(t|t-1), u(t))\, w_i(t|t-1) \\
w_i(t|t) &= \frac{\overline{w}_i(t|t)}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j(t|t)}
\end{aligned}
$$

- Predikční krok: hustoty a vzorky se přepočítávají (vzhledem k jejich významnosti); váhy zůstávají stejné.

$$
\begin{aligned}
x_i(t+1|t) &= f(x_i(t|t), u(t)) + v_i(t) \\
w_i(t+1|t) &= w_i(t|t)
\end{aligned}
$$

Vážený Bootstrap algoritmus IV

- Zpětný běh (smoothing): hustoty a váhy se přepočítávají; vzorky zůstávají stejné.

$$
\begin{aligned}
x_i(t|N) &= x_i(t|t) \\
\overline{w}_i(t|N) &= w_i(t|t) \sum_{j=1}^{n} w_j(t+1|N)\, p(x_j(t+1|N)|x_i(t|N), u(t)) \\
w_i(t|N) &= \frac{\overline{w}_i(t|t)}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j(t|t)}
\end{aligned}
$$