Relativistická kvantová mechanika

Michal Lenc

Poznámky k přednášce v jarním semestru 2007

1 Obrazy

1.1 Postulát o kvantové kausalitě

Postulát o kvantové kausalitě říká, že:

(a) Stav systému v čase t_0 jednoznačně určuje stav systému v libovolném okamžiku $t > t_0$ i v okamžiku $t < t_0$.

(b) Platí princip superposice: Jsou-li stavy $\left|\psi_1(t)\right\rangle$ a $\left|\psi_2(t)\right\rangle$ časové evoluce stavů $\left|\psi_1(t_0)\right\rangle$ a $\left|\psi_2(t_0)\right\rangle$, pak také stav $c_1\left|\psi_1(t_0)\right\rangle + c_2\left|\psi_2(t_0)\right\rangle$ má časovou evoluci $c_1\left|\psi_1(t)\right\rangle + c_2\left|\psi_2(t)\right\rangle$.

(c) Norma stavového vektoru se běhen časové evoluce nemění.

1.2 Evoluční operátor

Podle postulátu o kvantové kausalitě existuje jednoznačný vztah mezi vektory $\left|\psi(t)\right\rangle$ a $\left|\psi(t_0)\right\rangle$ a lze tedy definovat evoluční operátor $\hat{T}(t,t_0)$

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{T}(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \quad , \quad \hat{T}(t_0,t_0) = \hat{1} \quad . \tag{1.1}$$

Ze zachování normy dostáváme

$$\left\langle\psi(t)\middle|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\hat{T}(t,t_0)\psi(t_0)\middle|\hat{T}(t,t_0)\psi(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t_0)\middle|\psi(t_0)\right\rangle \tag{1.2}$$

a platí tak

$$\hat{T}^{+}(t,t_0)\,\hat{T}(t,t_0) = \hat{1} \quad . \tag{1.3}$$

Dále porovnáním

$$
\begin{aligned}
&\left|\psi(t_2)\right\rangle = \hat{T}(t_2,t_1)\left|\psi(t_1)\right\rangle = \hat{T}(t_2,t_1)\hat{T}(t_1,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \quad , \\
&\left|\psi(t_2)\right\rangle = \hat{T}(t_2,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

dostáváme

$$\hat{T}(t_2,t_0) = \hat{T}(t_2,t_1)\hat{T}(t_1,t_0) \quad . \tag{1.5}$$

Evoluční operátor je unitární, neboť také

$$\hat{T}(t,t_0)\hat{T}^{+}(t,t_0) = \hat{1} \tag{1.6}$$

a dále máme

$$\hat{T}^{+}(t,t_0) = \hat{T}(t_0,t) \quad . \tag{1.7}$$

Pro Taylorův rozvoj $\hat{T}(t+\Delta t,t)$ dostáváme

$$\hat{T}(t+\Delta t,t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\,\Delta t + \ldots, \tag{1.8}$$

kde $\hat{H}$ je nějaký hermiteovský operátor. Evoluční operátor splňuje rovnici

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{T}(t,t_0) = \hat{H}(t)\hat{T}(t,t_0) \quad , \quad \hat{T}(t_0,t_0) = \hat{1} \quad . \tag{1.9}$$

1.3 Schrödingerův a Heisenbergův obraz

Ve Schrödingerově obraze předpokládáme, že se v čase mění stavový vektor. Pro stavový vektor platí přirozeně ta samá rovnice, jako pro evoluční operátor (Schrödingerova rovnice)

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi_S(t)\right\rangle = \hat{H}_S(t)\left|\psi_S(t)\right\rangle \tag{1.10}$$

a pokud operátory závisí na čase, tak pouze explicitně. V Heisenbergově obraze naopak předpokládáme, že se stavový vektor v čase nemění. Požadavek rovnosti vyjádření střední hodnoty libovolné fyzikální veličiny v obou obrazech vede ke vztahu mezi operátory

$$
\begin{aligned}
&\left|\psi_H\right\rangle \equiv \left|\psi_S\left(t_0\right)\right\rangle = \hat{T}^{+}\left(t,t_0\right)\left|\psi_S\left(t\right)\right\rangle \quad , \\
&\left\langle\psi_S\left(t\right)\right|\hat{F}_S\left|\psi_S\left(t\right)\right\rangle = \left\langle\psi_H\right|\hat{F}_H\left(t\right)\left|\psi_H\right\rangle = \left\langle\psi_H\right|\hat{T}\left(t,t_0\right)\hat{F}_H\left(t\right)\hat{T}^{+}\left(t,t_0\right)\left|\psi_H\right\rangle \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

tedy

$$
\hat{F}_H\left(t\right) = \hat{T}^{+}\left(t,t_0\right)\hat{F}_S\,\hat{T}\left(t,t_0\right) \quad . \tag{1.12}
$$

Rovnici pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze získáme derivováním předchozího vztahu

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,t}\hat{F}_H = \frac{d\,\hat{T}^{+}}{d\,t}\hat{F}_S\,\hat{T} + \hat{T}^{+}\,\hat{F}_S\,\frac{d\,\hat{T}}{d\,t} + \hat{T}^{+}\frac{\partial\,\hat{F}_S}{\partial\,t}\hat{T} = \\
&\frac{1}{i\hbar}\left(-\hat{T}^{+}\,\hat{H}_S\,\hat{F}_S\,\hat{T} + \hat{T}^{+}\,\hat{F}_S\,\hat{H}_S\,\hat{T}\right) + \hat{T}^{+}\frac{\partial\,\hat{F}_S}{\partial\,t}\hat{T} \quad .
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

S uvážením (1.6) máme

$$
\frac{d}{d\,t}\hat{F}_H = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{F}_H\,,\hat{H}_H\right] + \frac{\partial\,\hat{F}_H}{\partial\,t} \quad . \tag{1.14}
$$

1.4 Interakční obraz

Velmi důležitým pro aplikace je interakční obraz. Předpokládáme, že hamiltonián je složen ze dvou částí, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}\left(t\right)$, kde $\hat{H}_0$ je na čase nezávislá základní část a $\hat{V}\left(t\right)$ je interakční část, která může explicitně záviset na čase. Zvolíme

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}_0\left(t,t_0\right) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\left(t-t_0\right)\right\} \quad , \\
&F_I = \hat{T}_0^{+}\left(t,t_0\right)\hat{F}_S\,\hat{T}_0\left(t,t_0\right) \quad , \quad \left|\psi_I\left(t\right)\right\rangle = \hat{T}_0^{+}\left(t,t_0\right)\left|\psi_S\left(t\right)\right\rangle \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

a dostáváme pak

$$
i\hbar \frac{d}{d\,t}\left|\psi_I(t)\right\rangle = \hat{H}_I(t)\left|\psi_I(t)\right\rangle \quad , \quad \hat{H}_I(t) = \hat{T}_0^+(t,t_0)\hat{V}(t)\hat{T}_0(t,t_0) \quad ,
$$

$$
\frac{d}{d\,t}\hat{F}_I = \hat{T}_0^+(t,t_0)\frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t}\hat{T}_0(t,t_0) + \left[\hat{H}_0,\hat{F}_I\right] \quad . \tag{1.16}
$$

2 Relativita a antičástice podle Feynmana

Amplituda pravděpodobnosti přechodu

$$
A(\phi_0 \to \chi) = -i\int d^3\vec{x}\,\chi^*(\vec{x})U(\vec{x})\phi_0(\vec{x}) = -i\left\langle \chi\middle|\hat{U}\middle|\phi_0\right\rangle \quad . \tag{2.1}
$$

Předpokládáme

$$
\left\langle \phi_0\middle|\phi_0\right\rangle = 1 \quad , \quad \left\langle \phi_0\middle|\hat{U}\middle|\phi_0\right\rangle = 0 \quad . \tag{2.2}
$$

Působení v čase t_1 označme $\hat{U}_1$, působení v čase t_2 jako $\hat{U}_2$ atd. Máme pak

$$
A(\phi_0 \to \phi_0) = 1 - \sum_m \left\langle \phi_0\middle|\hat{U}_2\middle|\psi_m\right\rangle \exp\left\{-i\,E_m(t_2 - t_1)\right\}\left\langle \psi_m\middle|\hat{U}_1\middle|\phi_0\right\rangle \quad . \tag{2.3}
$$

Za $\left|\psi_m\right\rangle$ vezmeme rovinné vlny. S označeními

$$
a(\vec{x}_1) = \sqrt{2E_p}\,U(\vec{x}_1,t_1)\phi_0(\vec{x}_1) \quad , \quad b(\vec{x}_2) = \sqrt{2E_p}\,U(\vec{x}_2,t_2)\phi_0(\vec{x}_2) \quad , \tag{2.4}
$$

kde $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ (ne nutně kladná větev odmocniny), můžeme psát

$$
A(\phi_0 \to \phi_0) = 1 -
$$

$$
\int d^3\vec{x}_2\, b^*(\vec{x}_2)\, d^3\vec{x}_1\; a(\vec{x}_1)\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\, 2E_p}\exp\left\{-i\left[E_p(t_2 - t_1) - \vec{p}\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\right]\right\} \quad . \tag{2.5}
$$

Proč jsme vydělili člen s energií, je vidět z úpravy relativisticky invariantního výrazu

$$
\delta\left(p^i p_i - m^2\right) d\,p^0\, d\,p^1\, d\,p^2\, d\,p^3 = \delta\left(E^2 - p^2 - m^2\right) d\,E\, d^3\vec{p} =
$$

$$
\frac{1}{2E_p}\left[\delta\left(E + E_p\right) + \delta\left(E - E_p\right)\right] d\,E\, d^3\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} = \mathrm{inv} \quad . \tag{2.6}
$$

Označme $t = t_2 - t_1$ a $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a všimněme si chování funkce

$$G(\vec{r},t)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\exp\left\{i\left[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p t\right]\right\} \quad . \tag{2.7}$$

Předpokládejme $E_p>0$ a prostorupodobný interval $\lambda=\sqrt{-s^2}=\sqrt{r^2-t^2}$. Integrací přes úhlové proměnné dostaneme

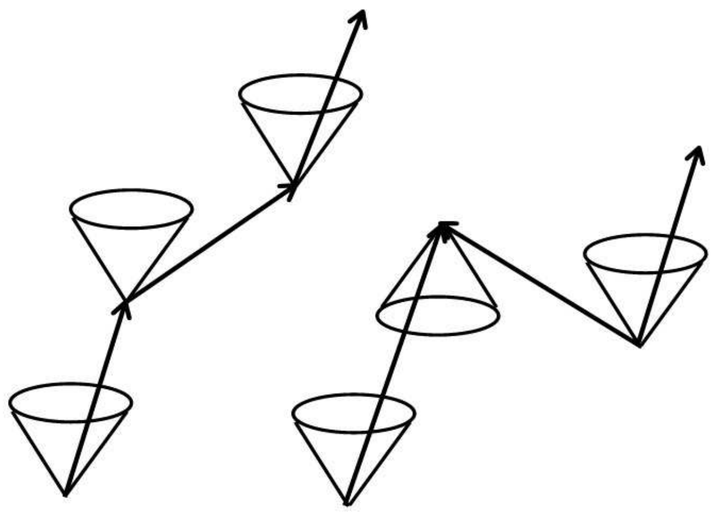
$$\begin{aligned}G(r,t)&=\frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}d\,p\frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}}\exp\left\{i\left[p\,r-\sqrt{p^2+m^2}\,t\right]\right\}=\\&\frac{1}{8\pi^2\,i\,r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty}d\,p\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}}\exp\left\{i\left[p\,r-\sqrt{p^2+m^2}\,t\right]\right\} \quad .\end{aligned} \tag{2.8}$$

Substituce $p=m\sinh\varphi$ a označení $r=\lambda\cosh\varphi_0$, $t=\lambda\sinh\varphi_0$ převedou integrál na

$$G(r,t)=\frac{1}{8\pi^2\,i\,r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty}d\,\varphi\exp\left\{i\,m\,\lambda\sinh(\varphi-\varphi_0)\right\}=\frac{1}{8\pi^2\,i\,r}\frac{\partial}{\partial r}K_0(m\,\lambda) \quad , \tag{2.9}$$

kde $K_0(x)=\int_0^\infty d\,y\cos(x\sinh y)$ je Besselova funkce. Pomocí vztahu $K_0'(x)=-K_1(x)$ přepíšeme (2.9) na

$$G(\lambda)=\frac{i\,m}{8\pi^2\,\lambda}K_1(m\,\lambda) \quad . \tag{2.10}$$



3 Feynmanův integrál po trajektoriích

3.1 Schrödingerova rovnice

Odvodíme nerelativistickou Schrödingerovu rovnici pro jednorozměrný případ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x,t)\psi(x,t) \tag{3.1}$$

z výrazu pro amplitudu pravděpodobnosti přechodu z bodu x do bodu y za infinitesimálně malý časový interval ε

$$K(x,t+\varepsilon|\,y,t)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon}-\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2},t\right)\right]\right\} \quad . \tag{3.2}$$

Musí tedy platit (po substituci $y=x+\eta$)

$$\psi(x,t+\varepsilon)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m\eta^2}{2\varepsilon}-\varepsilon V\left(x+\frac{\eta}{2},t\right)\right]\right\}\psi(x+\eta,t)\,d\eta \quad . \tag{3.3}$$

$$\psi+\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}}\left[\psi+\eta\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\psi\right]\mathrm{d}\eta \ ,$$

Rozvoje do prvního řádu včetně podle mocnin ε (přitom η je úměrné $\varepsilon^{1/2}$) dají
přičemž všechny funkce jsou počítány pro argument x, t. U ε^0 je identita, výraz u $\varepsilon^{1/2}$ je roven nule a výraz u ε je právě Schrödingerova rovnice.

3.2 Feynmanův integrál po trajektoriích

Amplituda pravděpodobnosti přechodu z bodu x_a do bodu x_b je

$$\begin{gathered}K(x_b,t_b\,|\,x_a,t_a)=\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\right\}d[x(t)] \quad , \\ x(t_a)=x_a \quad , \quad x(t_b)=x_b \quad , \quad S[x(t)]=\int\limits_{t_a}^{t_b}L(\dot{x}(t),x(t),t)\,dt \quad .\end{gathered} \tag{3.4}$$

Míra v nejjednodušším případě: rozdělíme časový interval na N stejných dílů

$$K(x_b,t_b|x_a,t_a)=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right]^{N/2}\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\right\}\prod_{k=1}^{N-1}dx_k \quad ,$$

$$\tau=\frac{t_b-t_a}{N} \quad , \quad t_k=k\tau \quad , \quad x(t_a)=x_a=x_0 \quad , \quad x(t_k)=x_k \quad , \quad x(t_b)=x_b=x_N \quad , \tag{3.5}$$

$$S[x(t)]=\tau\sum_{k=0}^{N-1}L\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau},\frac{x_{k+1}+x_k}{2},\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right) \quad .$$

Při dělení je třeba opatrnosti (Wiener, Ito). Proměnná Brownova pohybu $x(t)$ a integrál

$$I_\omega=\int_{t_a}^{t_b}f(x(t))\,dx\equiv\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)\left[\omega f(x_k)+(1-\omega)f(x_{k+1})\right] \quad , \quad 0\le\omega\le1 \quad . \tag{3.6}$$

"Normální" chování dostaneme jenom pro $\omega=1/2$. Klasické pohybové rovnice dostáváme z variačního principu

$$\delta S=S[x_{cl}+\delta x]-S[x_{cl}]=0 \quad ,$$

$$S[x+\delta x]=\int_{t_a}^{t_b}L(\dot{x}+\delta\dot{x},x+\delta x,t)\,dt= \tag{3.7}$$

$$\int_{t_a}^{t_b}\left[L+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right]dt=S[x]+\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right]dt \quad ,$$

odkud pak

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta x\Big|_{t_a}^{t_b}-\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}\right]\delta x\,dt \quad . \tag{3.8}$$

Pro kvantově mechanické kvasiklasické přiblížení je

$$K(x_b,t_b|x_a,t_a)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}(t)]\right\}\int\exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\delta^2S[\delta x(t)]\right\}d[\delta x(t)] \quad ,$$

$$\delta x(t_a)=\delta x(t_b)=0 \quad , \tag{3.9}$$

$$\delta^2S[\delta x(t)]=\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}^2}(\delta\dot{x})^2+2\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}\partial x}\delta\dot{x}\,\delta x+\frac{\partial^2L}{\partial x^2}(\delta x)^2\right]\Bigg|_{x=x_{cl}}dt \quad .$$

Druhou variaci můžeme upravit integrací per partes do tvaru

$$\delta^2S[\delta x(t)]=(\delta x,\hat{\Lambda}\,\delta x) \quad ,$$

$$\hat{\Lambda}=-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}^2}\frac{d}{dt}+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}\partial x}\right]+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}\partial x}\frac{d}{dt}+\frac{\partial^2L}{\partial x^2} \quad , \tag{3.10}$$

kde skalární součin je definován jako (máme takto Hilbertův prostor!)

$$(\xi,\eta)=\int_{t_a}^{t_b}\xi(t)\eta(t)\,dt \quad . \tag{3.11}$$

Napišme teď v ortonormální bázi

$$\delta x(t)=\sum_n c_n u_n(t) \quad , \quad \hat{\Lambda} u_n(t)=\lambda_n u_n(t) \quad , \quad u_n(t_a)=u_n(t_b)=0 \quad . \tag{3.12}$$

Potom je

$$\delta^2 S\left[\delta x(t)\right]=\sum_n \lambda_n c_n^2 \quad , \quad d\left[x(t)\right]=J\prod_n d\,c_n \tag{3.13}$$

a pro amplitudu přechodu máme

$$K\left(x_b,t_b\,|\,x_a,t_a\right)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left[x_{cl}(t)\right]\right\}\int \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\sum_n \lambda_n c_n^2\right\}J\prod_n d\,c_n \quad . \tag{3.14}$$

Jakobián J má tu důležitou vlastnost, že se nemění při volbě báze. Integrál se snadno spočte a je tedy

$$K\left(x_b,t_b\,|\,x_a,t_a\right)=J\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left[x_{cl}(t)\right]\right\}\prod_n\left(\frac{2\pi i\hbar}{\lambda_n}\right)^{1/2} \quad . \tag{3.15}$$

Zavedeme si něco jako neporušenou úlohu („volná částice“), kde bude

$$\hat{\Lambda}^{(f)}=-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\frac{d}{dt}\right] \quad , \quad \hat{\Lambda}^{(f)}u_n^{(f)}(t)=\lambda_n^{(f)}u_n^{(f)}(t) \quad , \quad u_n^{(f)}(t_a)=u_n^{(f)}(t_b)=0 \quad , \tag{3.16}$$

pak konečný výsledek je

$$K\left(x_b,t_b\,|\,x_a,t_a\right)=$$
$$K^{(f)}\left(x_b,t_b\,|\,x_a,t_a\right)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}S^{(f)}\left[x_{cl}^{(f)}(t)\right]\right\}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left[x_{cl}(t)\right]\right\}\prod_n\left(\frac{\lambda_n^{(f)}}{\lambda_n}\right)^{1/2} \quad . \tag{3.17}$$

3.3 Propagátor ve více dimenzích

Variace účinku je

$$\delta S[x]=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\Big|_{t_a}^{t_b}-\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^i}\right]\delta x^i\,dt \quad . \tag{3.18}$$

Používáme sumační konvenci. V okolí klasické trajektorie píšeme

$$S[x]=S[x_{cl}]+\frac{1}{2}\delta^2 S[\delta x]+\cdots \quad , \tag{3.19}$$

kde $\delta x(t_a)=\delta x(t_b)=0$ a

$$\delta^2 S[\delta x] =$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \delta \dot{x}^i \delta \dot{x}^j + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \delta x^i \delta \dot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j \right] \Bigg|_{x=x_{cl}} dt \quad . \tag{3.20}$$

"Rozumné variace" dovolují definovat Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(\xi, \eta) \equiv \int_{t_a}^{t_b} \xi^i(t) \eta_i(t) \, dt \quad . \tag{3.21}$$

Druhou variaci pak píšeme jako

$$\delta^2 S[\delta x] = \left(\delta x, \hat{\Lambda} \delta x \right) \quad , \tag{3.22}$$

kde

$$\Lambda_{ij} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \frac{d}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \right] + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \frac{d}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \Bigg|_{x=x_{cl}} \quad . \tag{3.23}$$

V ortonormální bázi

$$\delta x^i = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n^i(t) \quad , \quad \Lambda_{ij} u_n^j(t) = \lambda_n u_n^i(t) \quad , \quad u_n^i(t_a) = u_n^i(t_b) = 0 \quad . \tag{3.24}$$

Feynmanův integrál se pak snadno spočte ($d\left[\delta x(t)\right] = J \prod_{n=1}^{\infty} d c_n$) jako

$$K\left(x_b, t_b \,|\, x_a, t_a\right) = J \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S\left[x_{cl}(t)\right] \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi i \hbar}{\lambda_n} \right)^{1/2} \quad , \tag{3.25}$$

a po zavedení „volné částice“, charakterizované

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^{(f)} &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \frac{d}{dt} \right) \quad , \\ \Lambda_{ij}^{(f)} u_n^{(f)j}(t) &= \lambda_n^{(f)} u_n^{(f)i}(t) \quad , \quad u_n^{(f)i}(t_a) = u_n^{(f)i}(t_b) = 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

dostáváme konečný výsledek

$$K\left(x_b, t_b \,|\, x_a, t_a\right) =$$

$$K^{(f)}\left(x_b, t_b \,|\, x_a, t_a\right) \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} S\left[x_{cl}^{(f)}(t)\right] \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S\left[x_{cl}(t)\right] \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n^{(f)}}{\lambda_n} \right)^{1/2} \quad . \tag{3.27}$$

Označme $\det\left(\hat{\Lambda}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ a zaveďme funkce (z je komplexní proměnná)

$$\left(\Lambda_{ij} - z \delta_{ij} \right) u_{(k)}^j(z, t) = 0 \quad , \quad u_{(k)}^j(z, t_a) = 0 \quad , \quad \frac{d u_{(k)}^j(z, t_a)}{dt} = \delta_k^j \quad .$$

Potom platí (Coleman, Levit a Smilansky)

$$\det\left(\frac{\hat{\Lambda}^{(f)} - z\hat{1}}{\hat{\Lambda} - z\hat{1}} \right) = \frac{\det\left(u_{(k)}^{(f)\,j}(z, t_b) \right)}{\det\left(u_{(k)}^j(z, t_b) \right)} \quad . \tag{3.28}$$

Pro $z = 0$ Jacobiho pole. S tím pak souvisí množství dalších možných vyjádření.

4 Volná relativistická částice - parametrizace

Značení intervalu ($t=-i\tau$) je $ds=\left(c^2\left(dt\right)^2-\left(d\vec{x}\right)^2\right)^{1/2}=-i\left(c^2\left(d\tau\right)^2+\left(d\vec{x}\right)^2\right)^{1/2}$. Účinek pro volnou částici píšeme jako

$$S=i\int_{\lambda_a}^{\lambda_b}\left[\frac{m}{2\rho(\lambda)}\left(\left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2+c^2\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2\right)+\frac{mc^2}{2}\rho(\lambda)\right]d\lambda \quad . \tag{4.1}$$

Variace vzhledem k $\rho(\lambda)$ dá

$$\rho(\lambda)=\frac{1}{c}\left[\left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2+c^2\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2\right]^{1/2} \quad , \quad S=imc\int_a^b\left[\left(d\vec{x}\right)^2+c^2\left(d\tau\right)^2\right]^{1/2} \quad . \tag{4.2}$$

Přejděme teď ve výrazu (4.1) k nové parametrizaci, tj. nahraďme $\lambda\to f(\lambda)$, $\rho\to\rho f'$. Dostáváme

$$S=i\int_{f_a}^{f_b}\left[\frac{m}{2}\left(\left(\frac{d\vec{x}}{df}\right)^2+c^2\left(\frac{d\tau}{df}\right)^2\right)+\frac{mc^2}{2}\right]df \quad . \tag{4.3}$$

Rozdělení na intervaly a integrace vede u propagátoru k výsledku ($L=f_b-f_a$)

$$K_L\left(\vec{x}_b,\tau_b\,|\,\vec{x}_a,\tau_a\right)=\left(\frac{mc}{2\pi\hbar L}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{mc}{2\hbar}\frac{\left(\vec{x}_b-\vec{x}_a\right)^2+c^2\left(\tau_b-\tau_a\right)^2}{L}-\frac{mc}{2\hbar}L\right\} \quad . \tag{4.4}$$

Typická situace: integruje se přes nerozlišitelné veličiny, tedy

$$K\left(\vec{x}_b,\tau_b\,|\,\vec{x}_a,\tau_a\right)=\frac{\hbar}{2mc}\int_0^\infty K_L\left(\vec{x}_b,\tau_b\,|\,\vec{x}_a,\tau_a\right)dL \quad , \tag{4.5}$$

odkud

$$K\left(\vec{x}_b,\tau_b\,|\,\vec{x}_a,\tau_a\right)=$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\frac{mc}{\hbar\left[\left(\vec{x}_b-\vec{x}_a\right)^2+c^2\left(\tau_b-\tau_a\right)^2\right]^{1/2}}K_1\left(\frac{mc\left[\left(\vec{x}_b-\vec{x}_a\right)^2+c^2\left(\tau_b-\tau_a\right)^2\right]^{1/2}}{\hbar}\right) \quad . \tag{4.6}$$

Vzhledem k asymptotickému vyjádření

$$K_1(z)\approx\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}\exp\{-z\} \tag{4.7}$$

je pro výrazně časupodobné intervaly (nerelativistická teorie)

$$K\left(\vec{x}_b,t_b\,|\,\vec{x}_a,t_a\right)=$$

$$\frac{\hbar}{mc}\exp\left\{-i\frac{mc^2}{\hbar}\left(t_b-t_a\right)\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\left(t_b-t_a\right)}\right)^{3/2}\exp\left\{i\frac{m}{2\hbar}\frac{\left(\vec{x}_b-\vec{x}_a\right)^2}{t_b-t_a}\right\} \quad . \tag{4.8}$$

Interakce mimo světelný kužel – nikoliv, důležité jsou komutátory resp. antikomutátory.

5 Relativistická kvantová mechanika

5.1 Historický přístup

V nerelativistické teorii máme

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m} \quad , \quad \hat{H}\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \hat{\vec{p}}\to\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \tag{5.1}$$

a Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) \quad . \tag{5.2}$$

V relativistické teorii

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left(p^0,p^1,p^2,p^3\right)=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right) \quad , \\ p_\mu &= \left(p_0,p_1,p_2,p_3\right)=\left(\frac{E}{c},-\vec{p}\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Invariantní délka čtyřvektoru impulzu je

$$p_i\,p^i=\frac{E^2}{c^2}-\vec{p}^2=m^2c^2 \quad . \tag{5.4}$$

Hamiltonián je tedy

$$H=\sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4} \tag{5.5}$$

a analogie ke kvantování v souřadnicové representaci

$$\hat{p}_i\to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} \quad . \tag{5.6}$$

Analogie ke Schrödingerově rovnici je ovšem

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}=\sqrt{-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^2+m^2c^4}\,\psi(\vec{r},t) \quad . \tag{5.7}$$

6 Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

6.1 Vlastnosti spinorů

Připomeňme Pauliho matice (pro úplnost dodejme jednotkovou matici)

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{6.1}$$

V trojrozměrném případě je operace inverse provedená dvakrát návratem k původní souřadné soustavě, proto u tensorových veličin je $\hat{P}^2 = \hat{1}$. U trojrozměrných spinorů mohou nastat (rotace o 0 a 2π nejsou ekvivalentní) dvě možnosti

$$\hat{P}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} = \pm 1 \quad , \quad \hat{P}^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} = \pm i \quad . \tag{6.2}$$

Ve čtyřrozměrném prostoru však prostorová inverse mění znaménko pouze tří (x, y, z) ze čtyř (ct, x, y, z) časoprostorových souřadnic a nekomutuje tedy s rotacemi souřadnic, které obsahují časovou osu. Speciálně pro Lorentzovu transformaci platí

$$\hat{P}\hat{L}\left(\vec{V}\right) = \hat{L}\left(-\vec{V}\right)\hat{P} \quad . \tag{6.3}$$

Při transformaci z vlastní Lorentzovy grupy transformuje se spinor jako

$$\xi'^1 = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2 \quad , \quad \xi'^2 = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2 \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad . \tag{6.4}$$

Koeficienty α, β, γ a δ jsou funkcemi úhlů rotace čtyřrozměrné souřadné soustavy. Bilineární forma

$$\xi^1\, \Xi^2 - \xi^2\, \Xi^1 \tag{6.5}$$

je invariantem (částice se spinem nula, složená ze dvou částic se spinem 1/2). Je užitečné zavést matici, která umožňuje snižovat a zvedat indexy a tak využívat součtové konvence

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad g^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_A = g_{AB}\xi^B \quad , \quad \xi^A = g^{AB}\xi_B \quad . \tag{6.6}$$

Potom můžeme psát místo (6.5)

$$\xi^A \Xi_A = -\xi_A \Xi^A = inv \quad . \tag{6.7}$$

V nerelativistické teorii určuje $\psi^1\psi^{1*}+\psi^2\psi^{2*}$ hustotu pravděpodobnosti, a je tedy skalární veličinou, proto musí být spinorová transformace (6.4) unitární ($\alpha=\delta^*$, $\beta=-\gamma^*$). V relativistické teorii je hustota pravděpodobnosti časupodobnou složkou čtyřvektoru a podmínka unitarity nevzniká. Proto musíme uvažovat ne jeden spinor, ale dvojici spinorů ξ a η, transformujících se podle komplexně sdružených representací Lorentzovy grupy, ξ podle (6.4) a η podle

$$\eta'^1 = \alpha^* \eta^1 + \beta^* \eta^2 \quad , \quad \eta'^2 = \gamma^* \eta^1 + \delta^* \eta^2 \quad , \quad \alpha^* \delta^* - \beta^* \gamma^* = 1 \quad . \tag{6.8}$$

Komponenty spinoru, který se transformuje podle komplexně sdružené representace Lorentzovy grupy budeme značit tečkou nad velkým písmenem. Pro zvedání a snižování indexů platí i tady vztah (6.6). Působení operátoru prostorové inverse můžeme nyní zapsat jako (volíme representaci, kde $\hat{P}^2=-1$)

$$\hat{P}\xi^A = i\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta_{\dot{A}} = i\xi^A \tag{6.9}$$

neboli

$$\hat{P}\xi_A = -i\eta^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta^{\dot{A}} = -i\xi_A \quad . \tag{6.10}$$

Dvojice bispinorů $\left(\xi^A, \eta_{\dot{A}}\right)$ a $\left(\Xi^A, \mathrm{H}_{\dot{A}}\right)$ representuje mimo jiné skalární a vektorové veličiny. Pro skalární veličiny (skalár a pseudoskalár) je

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi^A \Xi_A + \eta_{\dot{A}} \mathrm{H}^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\zeta = \zeta \quad , \\ \zeta &= \xi^A \Xi_A - \eta_{\dot{A}} \mathrm{H}^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\zeta = -\zeta \quad . \end{aligned} \tag{6.11}$$

Pro vektorové veličiny

$$\begin{aligned} \zeta^{A\dot{B}} &= \xi^A \mathrm{H}^{\dot{B}} + \Xi^A \eta^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\zeta^{A\dot{B}} = \zeta_{\dot{A}B} \quad , \\ \zeta^{A\dot{B}} &= \xi^A \mathrm{H}^{\dot{B}} - \Xi^A \eta^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\zeta^{A\dot{B}} = -\zeta_{\dot{A}B} \quad . \end{aligned} \tag{6.12}$$

Vzhledem k relacím

$$\zeta = \left(\zeta^{A\dot{B}} \right) = \vec{a}\cdot\vec{\sigma} + a_0\,\sigma_0 \quad , \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta\,\vec{\sigma}\} \quad , \quad a^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta\} \tag{6.13}$$

odpovídá první případ čtyřrozměrnému vektoru (s trojrozměrným polárním vektorem) a druhý případ čtyřrozměrnému pseudovektoru (s trojrozměrným axiálním vektorem)

$$\hat{P}\left(a^0,\vec{a}\right) = \left(a^0,-\vec{a}\right) \quad , \quad \hat{P}\left(a^0,\vec{a}\right) = \left(-a^0,\vec{a}\right) \quad . \tag{6.14}$$

6.2 Lorentzova transformace spinorů

Vztahů mezi bispinorem ζ a čtyřvektorem a^i využijeme pro nalezení konkrétního tvaru koeficientů transformace. Označme

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} & \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^{1\dot{1}} & \zeta^{1\dot{2}} \\ \zeta^{2\dot{1}} & \zeta^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \quad ,$$
$$\xi' = L\xi \quad , \quad \eta' = \eta L^+ \quad , \quad \zeta' = L\,\zeta\,L^+ \quad . \tag{6.15}$$

Pro infinitesimální transformaci píšeme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \quad , \quad \zeta' = \zeta + \lambda\zeta + \zeta\,\lambda^+ \quad . \tag{6.16}$$

Při infinitesimální Lorentzově transformaci máme jednak

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} - a^0\,\vec{n}\,\delta V = \vec{a} - \frac{\delta V}{2}\vec{n}\,\mathrm{Tr}\{\zeta\} \quad , \\ a'^0 &= a^0 - \vec{a}\cdot\vec{n}\,\delta V = a^0 - \frac{\delta V}{2}\vec{n}\cdot\mathrm{Tr}\{\vec{\sigma}\,\zeta\,\} \end{aligned} \tag{6.17}$$

a také

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta'\,\vec{\sigma}\} = \vec{a} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\zeta\left(\vec{\sigma}\,\lambda + \lambda^+\,\vec{\sigma}\right)\right\} \quad , \\ a'^0 &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta'\} = a^0 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\zeta\left(\lambda + \lambda^+\right)\right\} \quad . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Porovnáním obou zápisů dostaneme

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{\delta V}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \quad . \tag{6.19}$$

S využitím vztahu

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.20)$$

můžeme psát pro konečné velikosti rychlosti

$$L = \exp\left\{-\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cosh\frac{\phi}{2} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sinh\frac{\phi}{2} \quad , \quad \tanh\phi = V \quad . \qquad (6.21)$$

Při infinitesimální rotaci souřadnic v geometrickém prostoru máme pak

$$\vec{a}' = \vec{a} - \delta\theta(\vec{n}\times\vec{a}) = \vec{a} - \frac{\delta\theta}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta(\vec{\sigma}\times\vec{n})\} \quad , \quad a'^{0} = a^{0} \quad , \qquad (6.22)$$

odkud

$$\lambda = -\lambda^{+} = \frac{i\delta\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \quad . \qquad (6.23)$$

Pro konečné rotace potom

$$L = \exp\left\{\frac{i\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sin\frac{\theta}{2} \quad . \qquad (6.24)$$

6.3 Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice

Při známém vztahu mezi čtyřvektory a spinory můžeme operátoru čtyřimpulsu $\hat{p}^{i}$ přiřadit operátorový spinor $\hat{p}^{A\dot{B}}$ resp. $\hat{p}_{A\dot{B}}$. Jediné vhodné relativisticky invariantní výrazy jsou pak

$$\hat{p}^{A\dot{B}}\eta_{\dot{B}} = m\xi^{A} \quad , \quad \hat{p}_{\dot{B}A}\xi^{A} = m\eta_{\dot{B}} \quad , \qquad (6.25)$$

které se značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^{1} \\ \xi^{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (6.26)$$

můžeme přepsat na

$$\left(\hat{p}_0\sigma_0+\hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\right)\eta=m\xi \quad , \quad \left(\hat{p}_0\sigma_0-\hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\right)\xi=m\eta \quad . \tag{6.27}$$

Zavedení bispinorů a γ matic je posledním krokem při odvození obvyklého tvaru Diracovy rovnice. Se značením

$$\psi=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0=\begin{pmatrix}0 & \sigma_0\\ \sigma_0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & -\vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \quad , \tag{6.28}$$

přejde (6.27) na

$$\left(\gamma^0\hat{p}_0-\vec{\gamma}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\psi=m\psi \quad . \tag{6.29}$$

Zcela kompaktní zápis dostaneme po zavedení matic

$$\underline{\hat{p}}\equiv\gamma^i\hat{p}_i \quad , \quad \left(\underline{\hat{p}}-m\right)\psi=0 \quad . \tag{6.30}$$

V souřadnicové representaci (na chvíli v SI jednotkách)

$$\begin{gathered}\left(\underline{\hat{p}}-mc\right)\psi=0 \quad , \quad \underline{\hat{p}}\to i\hbar\underline{\nabla}=i\hbar\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}=i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{c\,\partial t}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\right) \quad , \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi \quad , \quad \hat{H}=\frac{\hbar}{i}c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+mc^2\beta,\end{gathered} \tag{6.31}$$

kde matice α a β jsou dány vztahy

$$\begin{gathered}\vec{\alpha}=\gamma^0\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & -\vec{\sigma}\end{pmatrix} \quad , \quad \beta=\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \\ \alpha_i\alpha_k+\alpha_k\alpha_i=2\delta_{ik} \quad , \quad \beta\alpha_i+\alpha_i\beta=0 \quad , \quad \beta^2=1 \quad .\end{gathered} \tag{6.32}$$

6.4 Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

Se čtyřpotenciálem

$$A^i=\left(\frac{\Phi}{c},\vec{A}\right) \quad , \quad A_i=\left(\frac{\Phi}{c},-\vec{A}\right) \tag{6.33}$$

a záměnou (v komutačních relacích vystupuje zobecněný impulz) oproti volné částici

$$p_i \quad \rightarrow \quad p_i - e\,A_i \tag{6.34}$$

dostáváme Diracovu rovnici ve vnějším elektromagnetickém poli

$$\gamma^i \left(\hat{p}_i - e\,\hat{A}_i\right)\psi = m\,c\,\psi \quad , \tag{6.35}$$

kde γ^i je čtyřvektor matic, které mají ve spinorové representaci tvar (jsou možné i jiné representace, získané unitárními transformacemi)

$$\gamma^i = \left(\gamma^0, \vec{\gamma}\right) \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.36}$$

a ψ je čtyřkomponentový bispinor. V souřadnicové representaci je

$$\hat{p}_i = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(i\hbar\frac{\partial}{c\,\partial t}, i\hbar\vec{\nabla}\right) \quad , \quad \hat{p}^i = \left(i\hbar\frac{\partial}{c\,\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}\right) \tag{6.37}$$

a Diracova rovnice má tvar

$$\left(\frac{1}{c}\gamma^0\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right) + \vec{\gamma}\cdot\left(i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}\right) - m\,c\right)\psi = 0 \quad . \tag{6.38}$$

nebo po přepsání

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\,\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}} - e\,\hat{\vec{A}}\right) + \beta m\,c^2 + e\hat{\Phi}\right)\psi \quad , \tag{6.39}$$

kde jsme označili

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma} \quad . \tag{6.40}$$

6.5 Heisenbergův obraz.

Připomeňme si vztah pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze

$$\frac{d}{d\,t}\hat{F} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{F}\right] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \quad . \tag{6.41}$$

Zavedeme operátor mechanického impulzu

$$\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right) \quad . \tag{6.42}$$

Výpočet komutátorů

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{r}}\right] = \frac{\hbar}{i} c\vec{\alpha} \quad , \tag{6.43}$$

a trochu komplikovaněji

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{p}} - e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right)\right] = -\frac{e\hbar}{i}\vec{\nabla}\Phi + \frac{ec\hbar}{i}\vec{\nabla}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}\right) - \frac{ec\hbar}{i}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} \quad . \tag{6.44}$$

S využitím vztahu

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\alpha} + \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\alpha}\right) + \vec{\alpha}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{\alpha}\times\vec{B} \tag{6.45}$$

dostaneme

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{p}} - e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right)\right] = -\frac{e\hbar}{i}\vec{\nabla}\Phi + \frac{ec\hbar}{i}\vec{\alpha}\times\vec{B} \quad . \tag{6.46}$$

Tedy

$$\frac{d\hat{\vec{r}}}{dt} = c\vec{\alpha} \quad , \quad \frac{d\hat{\vec{\pi}}}{dt} = -e\vec{\nabla}\Phi + ec\vec{\alpha}\times\vec{B} \quad . \tag{6.47}$$

Charakter operátoru rychlosti dal vznik názvu Zitterbewegung.

6.6 Rovnice kontinuity.

Diracovu rovnici

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - mc\right)\psi = 0 \tag{6.48}$$

komplexně sdružíme a s využitím vztahů $\left(\gamma^i\right)^+ = \gamma^0\gamma^i\gamma^0$, tedy

$$\left(\gamma^0\right)^+ = \gamma^0 \quad , \quad \left(\vec{\gamma}\right)^+ = -\vec{\gamma} \tag{6.49}$$

napíšeme jako

$$\left(-i\hbar\tilde{\gamma}^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\vec{\tilde{\gamma}}\cdot\vec{\nabla}-mc\right)\psi^*=0 \quad . \tag{6.50}$$

Rovnici (6.50) transponujeme na (diferenciální operátory působí doleva)

$$\psi^+\left(-i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}-mc\right)=0 \tag{6.51}$$

a po zavedení Diracova sdružení $\bar{\psi}=\psi^+\gamma^0$ s využitím antikomutačních relací γ matic máme

$$\bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}+mc\right)=0 \quad . \tag{6.52}$$

S použitím symbolů $\underline{a}=\gamma^i a_i$ můžeme (6.48) a (6.52) zapsat jako

$$\left(\underline{\hat{p}}-mc\right)\psi=0 \quad , \quad \bar{\psi}\left(\underline{\hat{p}}+mc\right)=0 \quad . \tag{6.53}$$

Vynásobení první rovnice v (6.53) zleva $\bar{\psi}$ a druhé rovnice zprava ψ dává výrazy, jejichž sečtením dostáváme rovnici kontinuity

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k}=0 \quad , \quad j^k=\bar{\psi}\gamma^k\psi \quad . \tag{6.54}$$

Časupodobná komponenta je $j^0=\bar{\psi}\gamma^0\psi=\psi^+\psi>0$.

7 Rovinné vlny

Dosadíme-li do (6.53) rovinné vlny (volba normovací konstanty $\varepsilon=c\,p_0=+\sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}$ se ozřejmí později)

$$\psi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u(p)\exp\left(-i\,p_i\,x^i\right) \quad , \quad \psi(-p)=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u(-p)\exp\left(i\,p_i\,x^i\right) \quad , \tag{7.1}$$

dostáváme

$$\left(\underline{p}-mc\right)u(p)=0 \quad , \quad \left(\underline{p}+mc\right)u(-p)=0 \tag{7.2}$$

a

$$\bar{u}(p)\left(\underline{p}-mc\right)=0 \quad , \quad \bar{u}(-p)\left(\underline{p}+mc\right)=0 \quad . \tag{7.3}$$

podmínkou řešitelnosti je $p^i\, p_i = m^2\, c^2$. Bispinory normujeme tak, že

$$\bar{u}(p)u(p)=2mc^2 \quad , \quad \bar{u}(-p)u(-p)=-2mc^2 \quad . \tag{7.4}$$

Násobení zleva první rovnice v (7.2) $\bar{u}(p)$ a druhé rovnice $\bar{u}(-p)$ vede na

$$\bar{u}(\pm p)\gamma^i\, p_i\, u(\pm p)=2m^2\, c^3=2c\, p^i\, p_i \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(\pm p)\gamma^i\, u(\pm p)=2c\, p^i \quad . \tag{7.5}$$

Pro čtyřvektor toku pak

$$j^i=\bar{\psi}(\pm p)\gamma^i\,\psi(\pm p)=\frac{c\, p^i}{\varepsilon}=\left(1,\frac{\vec{v}}{c}\right) \quad . \tag{7.6}$$

Ve standardní representaci, kde píšeme

$$\psi=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \quad , \tag{7.7}$$

se Diracova rovnice rozpadá na dvě vázané rovnice

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon-mc^2\right)\phi-c\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,\chi=0 \quad ,\\ &\left(\varepsilon+mc^2\right)\chi-c\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,\phi=0 \quad .\end{aligned} \tag{7.8}$$

Máme pak

$$u(p)=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+mc^2}\; w(+)\\ \sqrt{\varepsilon-mc^2}\;(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,w(+)\end{pmatrix} \quad , \quad u(-p)=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon-mc^2}\;(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,w(-)\\ \sqrt{\varepsilon+mc^2}\; w(-)\end{pmatrix} \quad , \tag{7.9}$$

kde $\vec{n}=\vec{p}/|\vec{p}|$ a $w(\pm)$ jsou libovolné dvoukomponentové veličiny, splňující $w^+(\pm)\,w(\pm)=1$.

Pro relativisticky sdružené bispinory máme z (7.9)

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p)=\left(\sqrt{\varepsilon+mc^2}\; w^+(+) \quad -\sqrt{\varepsilon-mc^2}\; w^+(+)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\right) \quad ,\\ &\bar{u}(-p)=\left(\sqrt{\varepsilon-mc^2}\; w^+(-)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \quad -\sqrt{\varepsilon+mc^2}\; w(-)\right) \quad .\end{aligned} \tag{7.10}$$

8 Transformace Diracovy rovnice

8.1 Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace)

Hamiltonián je

$$\hat{H} = c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2 \quad . \tag{8.1}$$

Ve standardní reprezentaci jsou matice $\vec{\alpha}$ a β dány vztahy

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{8.2}$$

Uvažujme o takové unitární (a na čase explicitně nezávislé) transformaci, která by odstranila operátory, které vážou velké komponenty s malými

$$\hat{U} = \exp\left(i\hat{S}\right) \quad , \quad \hat{S} = \hat{S}^{+} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{S} = 0 \quad . \tag{8.3}$$

Platí

$$\begin{gathered} |\psi'\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)|\psi\rangle \quad , \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)\hat{H}|\psi\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)\hat{H}\exp\left(-i\hat{S}\right)|\psi'\rangle = \hat{H}'|\psi'\rangle \quad . \end{gathered} \tag{8.4}$$

Velké a malé komponenty spojuje operátor $c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}$. Uhádneme tedy poměrně snadno potřebný tvar $\hat{S}$

$$\exp\left(i\hat{S}\right) = \exp\left(\beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\theta\right) = \cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) + \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|} \quad , \quad \theta = \theta\left(\hat{\vec{p}}\right) \quad . \tag{8.5}$$

Pro transformovaný hamiltonián dostáváme

$$\hat{H}' = \exp\left(i\hat{S}\right)\hat{H}\exp\left(-i\hat{S}\right) =$$
$$\left(\cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) + \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right)\left(c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2\right)\left(\cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) - \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right) =$$
$$\left(c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2\right)\left(\cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) - \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right)^2 = \tag{8.6}$$
$$\left(c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2\right)\exp\left(-2\,\beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\theta\right) =$$
$$c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\left[\cos\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) - m c\,\frac{\sin\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right] + \beta m c^2\left[\cos\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) + \left|\hat{\vec{p}}\right|\frac{\sin\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{m c}\right] \quad .$$

Položíme-li teď

$$\tan\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) = \frac{\left|\hat{\vec{p}}\right|}{m c} \quad , \tag{8.7}$$

dostáváme výsledný hamiltonián

$$\hat{H}' = \beta\sqrt{m^2 c^4 + \hat{\vec{p}}^2 c^2} \quad . \tag{8.8}$$

8.2 Rovnice částice v elektromagnetickém poli

Hamiltonián v tomto případě je

$$\hat{H} = c\,\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\right) + \beta m c^2 + e\Phi = \beta m c^2 + \hat{\mathcal{E}} + \hat{\mathcal{O}} \quad , \tag{8.9}$$

kde

$$\hat{\mathcal{E}} = e\Phi \quad , \quad \hat{\mathcal{O}} = c\,\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\right) \quad . \tag{8.10}$$

Platí

$$\beta\hat{\mathcal{O}} = -\hat{\mathcal{O}}\beta \quad , \quad \beta\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}\beta \quad . \tag{8.11}$$

Uvažujme opět o takové unitární (ale teď už možná na čase závislé) transformaci, která by odstranila liché operátory, které vážou velké komponenty s malými a ponechala jen operátory sudé

$$\hat{U} = \exp(i\hat{S}) \quad , \quad \hat{S} = \hat{S}^{+} \quad . \tag{8.12}$$

Pro $|\psi'\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)|\psi\rangle$ dostáváme

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-i\hat{S}\right)|\psi'\rangle = \exp\left(-i\hat{S}\right)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-i\hat{S}\right)\right)|\psi'\rangle = \\ \hat{H}|\psi\rangle = \hat{H}\exp\left(-i\hat{S}\right)|\psi'\rangle \quad . \end{aligned} \tag{8.13}$$

odkud pak

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{H}'|\psi'\rangle \quad , \quad \hat{H}' = \exp\left(i\hat{S}\right)\left(\hat{H} - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\exp\left(-i\hat{S}\right) \quad . \tag{8.14}$$

Mějme výraz (chápaný jako funkce parametru λ, který pak položíme roven jedné)

$$F(\lambda) = \exp\left(i\hat{B}\lambda\right)\hat{A}\exp\left(-i\hat{B}\lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}\right)\Bigg|_{\lambda=0} \quad . \tag{8.15}$$

Derivováním (8.15) dostáváme

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial F}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = i\left[\hat{B},\hat{A}\right] \quad , \\ &\cdots \quad , \\ &\left.\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}\right|_{\lambda=0} = i^n\left[\hat{B},\left[\hat{B},\left[\cdots\left[\hat{B},\hat{A}\right]\cdots\right]\right]\right] \quad , \end{aligned} \tag{8.16}$$

takže ponecháme-li v rozvoji pouze členy do třetího řádu (nebo čtvrtého, násobí-li člen klidovou energii) v $\hat{S}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{H}' = \hat{H} + i\left[\hat{S},\hat{H}\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\hat{H}\right]\right] - \frac{i}{6}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\hat{H}\right]\right]\right] + \\ \frac{mc^2}{24}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\beta\right]\right]\right]\right] - \hbar\dot{\hat{S}} - \frac{i\hbar}{2}\left[\hat{S},\dot{\hat{S}}\right] + \frac{\hbar}{6}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\dot{\hat{S}}\right]\right] \quad . \end{aligned} \tag{8.17}$$

Ponecháme-li v (8.17) jen členy nejnižšího řádu, máme

$$\hat{H}' = \beta mc^2 + \hat{\mathcal{E}} + \hat{\mathcal{O}} + imc^2\left[\hat{S},\beta\right] \quad . \tag{8.18}$$

Tento tvar vede k tomu, že zkusíme zvolit

$$\hat{S} = -\frac{i}{2mc^2}\beta\hat{\mathcal{O}} \quad . \tag{8.19}$$

S označením matice spinu (ta je stejná ve spinorové i standardní representaci)

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

máme po delších výpočtech výsledný hamiltonián ve tvaru

$$\begin{gathered} \hat{H}' = \beta\left(m c^2 + \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{1}{8m^3 c^2}\hat{\vec{p}}^4 \right) + e\Phi - \\ \frac{e\hbar}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} - \frac{e\hbar}{4m^2 c^2}\vec{\Sigma}\cdot\left(\vec{E}\times\hat{\vec{p}}\right) - \frac{i e\hbar^2}{8m^2 c^2}\vec{\Sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \quad . \end{gathered} \tag{8.21}$$

Pro rotačně souměrné pole máme

$$\vec{E}(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r} \tag{8.22}$$

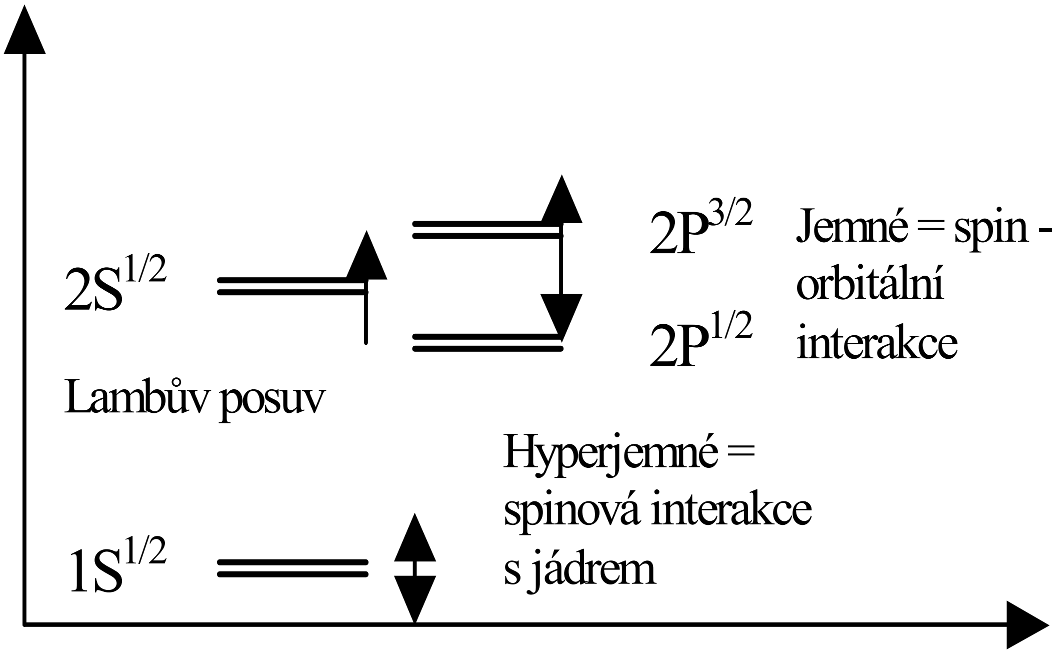
a příslušný člen nabude tvaru

$$-\frac{e\hbar}{4m^2 c^2}\vec{\Sigma}\cdot\left(\vec{E}\times\hat{\vec{p}}\right) = \frac{e\hbar}{4m^2 c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} \quad , \quad \vec{L} = \vec{r}\times\hat{\vec{p}} \quad , \tag{8.23}$$

kterým popisujeme spin - orbitální interakci. Poslední člen se nazývá Darwinův, jeho vznik se dá se chápat jako rozmazání energie Coulombova působení

$$\left\langle V\left(\vec{r}+\delta\vec{r}\right) - V\left(\vec{r}\right)\right\rangle \approx \left\langle \frac{\partial V}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}\delta x^i \delta x^j \right\rangle \approx \frac{1}{6}\Delta V\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \quad . \tag{8.24}$$

Schéma nejnižších hladin je na obrázku:



9 Rozptyl elektronu na jádře

Budeme počítat rozptyl elektronu na (nekonečně) těžkém jádře náboje Ze. Volba souřadné soustavy je velmi důležitá pro zjednodušení výpočtu. Impuls elektronu před rozptylem ať je ve směru osy x, impuls elektronu po rozptylu ať leží v rovině x-y (značíme $\underline{p} \equiv p_i \gamma^i = (E/c)\gamma^t - \vec{p}\,\vec{\gamma}$)

$$\underline{p}_1 = \gamma^t \frac{E_1}{c} - \gamma^x p_{1x} \quad , \quad \underline{p}_2 = \gamma^t \frac{E_2}{c} - \gamma^x p_{2x} - \gamma^y p_{2y} \quad . \tag{9.1}$$

Čtyřvektor potenciálu je

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c} = \frac{Z e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{1}{r}, \vec{A} = 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = \frac{Z e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{1}{r} \gamma^t \quad . \tag{9.2}$$

Připomeňme Diracovu rovnici

$$\left(\underline{p} - e\,\underline{A} - m c \right) |\psi\rangle = 0 \quad , \quad \underline{p} = i\hbar \underline{\nabla} \quad . \tag{9.3}$$

Počáteční a koncový stav je, pokud píšeme i obvykle vynechávaný normovací faktor

$$\langle x|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_1 V}} u_1\, e^{-\frac{i}{\hbar} p_{1i} x^i} \quad , \quad \langle x|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_2 V}} u_2\, e^{-\frac{i}{\hbar} p_{2i} x^i} \quad . \tag{9.4}$$

Amplituda pravděpodobnosti přechodu je

$$\langle\psi_2|\, H_{\text{int}}\, |\psi_1\rangle = -\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{u}_2 \gamma^t u_1}{2\sqrt{E_1 E_2}\, V} \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 \vec{r}}\, \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 \vec{r}}\, d^3\vec{r} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t}\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t}\, dt \quad . \tag{9.5}$$

Pro integrály máme vyjádření

$$\int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 \vec{r}}\, \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 \vec{r}}\, d^3\vec{r} = \frac{4\pi\hbar^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \quad , \quad \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t}\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t}\, dt = \frac{\sin\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T\right)}{\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}} \mathrm{e}^{i\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T} \quad . \tag{9.6}$$

První integrál počítáme jako

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{\infty} d r\, r\, e^{i q r\cos\vartheta - \lambda r} = \frac{4\pi}{q} \lim_{\lambda\to 0} \int_0^{\infty} d r \sin(q r) e^{-\lambda r} = \\ &\lim_{\lambda\to 0} \frac{4\pi}{\lambda^2 + q^2} = \frac{4\pi}{q^2} \quad . \end{aligned} \tag{9.7}$$

Pro pravděpodobnost přechodu za jednotku času

$$\begin{aligned} &w(1\to 2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left|\langle\psi_2|\, H_{\text{int}}\, |\psi_1\rangle\right|^2 = \\ &\frac{|\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2}{4\hbar^2 E_1 E_2 V^2} \left(\frac{Z e^2 \hbar^2}{\varepsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2}\right)^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T\right)}{\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}\right)^2 T} \quad . \end{aligned} \tag{9.8}$$

Jedním z vyjádření Diracovy delta funkce je

$$\delta(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{\sin^2(xT)}{\pi x^2 T} \quad . \tag{9.9}$$

Využitím (9.9) upravíme vztah (9.8) na

$$w(1\to 2)=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{\left|\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1\right|^2}{4\,E_1\,E_2\,V^2}\left(\frac{Z\,e^2\,\hbar^2}{\varepsilon_0\left|\vec{p}_1-\vec{p}_2\right|^2}\right)^2\delta\left(E_2-E_1\right)\quad . \tag{9.10}$$

Hustota stavů v okolí koncového stavu (stav *2*) je ($E=\sqrt{p^2\,c^2+m^2\,c^4}$)

$$d\,\rho=\frac{V\,d^3\,\vec{p}_2}{\left(2\pi\hbar\right)^3}=\frac{V\,E_2\,p_2}{\left(2\pi\hbar\right)^3c^2}\,d\,\Omega\,d\,E_2 \tag{9.11}$$

a tak můžeme psát (platí $\left|\vec{p}_1\right|=\left|\vec{p}_2\right|$)

$$d\,w=\frac{V\,d\,\Omega}{\left(2\pi\hbar\right)^3c^2}\int w\left(1\to 2\right)E_2\,p_2\,d\,E_2=\frac{p_1}{E_1\,V}\left|\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1\right|^2\left(\frac{Z\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\left|\vec{p}_1-\vec{p}_2\right|^2}\right)^2d\,\Omega\quad . \tag{9.12}$$

Poněvadž $\vec{v}=\partial E/\partial\,\vec{p}$, máme pro hustotu toku částic výraz

$$j=\frac{v_1}{V}=\frac{p_1\,c^2}{E_1\,V} \tag{9.13}$$

a pro diferenciální účinný průřez pak

$$d\,\sigma=\left|\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1\right|^2\left(\frac{Z\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,q^2}\right)^2d\,\Omega\quad,\quad q^2=\left|\vec{p}_1-\vec{p}_2\right|^2=4\,p_1^2\sin^2\frac{\theta}{2}\quad . \tag{9.14}$$

Nyní zvolme bispinory jako

$$u^{(1/2)}\left(p\right)=\frac{1}{\sqrt{E+m\,c^2}}\begin{pmatrix}E+m\,c^2\\0\\0\\c\left(p_x+i\,p_y\right)\end{pmatrix}\quad,\quad u^{(-1/2)}\left(p\right)=\frac{1}{\sqrt{E+m\,c^2}}\begin{pmatrix}0\\E+m\,c^2\\c\left(p_x-i\,p_y\right)\\0\end{pmatrix}\ . \tag{9.15}$$

Platí

$$\left|\bar{u}_2^{(1/2)}\,\gamma^t\,u_1^{(1/2)}\right|^2=\frac{\left|\left(E_1+m\,c^2\right)^2+p_1^2\,c^2\,e^{-i\theta}\right|^2}{\left(E_1+m\,c^2\right)^2}=4\,E_1^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\quad . \tag{9.16}$$

Obdobně spočteme další výrazy, takže máme

$$\left|\overline{u}_2^{(1/2)}\,\gamma^t\,u_1^{(1/2)}\right|^2 = 4\,E_1^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad , \quad \left|\overline{u}_2^{(1/2)}\,\gamma^t\,u_1^{(-1/2)}\right|^2 = 0 \quad ,$$
$$\left|\overline{u}_2^{(-1/2)}\,\gamma^t\,u_1^{(1/2)}\right|^2 = 0 \quad , \quad \left|\overline{u}_2^{(-1/2)}\,\gamma^t\,u_1^{(-1/2)}\right|^2 = 4\,E_1^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad . \tag{9.17}$$

Pro diferenciální účinný průřez rozptylu je tedy konečný výraz

$$d\,\sigma_{rel} = \left(\frac{m\,c^2}{E_1}\right)^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\,\sigma_{Ruth} \quad , \quad d\,\sigma_{Ruth} = \left(\frac{Z\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,v_1^2}\right)^2\frac{d\,\Omega}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}} \quad . \tag{9.18}$$

10 Invariantní účinný průřez

Mějme dva svazky částic, které se srážejí. Počítejme v klidové soustavě částice *2* počet srážek v objemu $d\,V$ za čas $d\,t$

$$d\,\nu = n_1\,\sigma\,v_{rel}\,d\,t\,n_2\,d\,V \quad , \quad d\,\nu = A\,n_1\,n_2\,d\,t\,d\,V \quad , \tag{10.1}$$

kde v_{rel} je velikost rychlosti částice *1* v klidové soustavě částice *2*, n_1 a n_2 jsou hustoty částic a konečně σ je účinný průřez. Veličiny $d\,\nu$ a $d\,t\,d\,V$ jsou invarianty, musí tedy být invariantem také veličina $A\,n_1\,n_2$, přičemž A musí v klidové soustavě jedné z částic přejít na $v_{rel}\,\sigma$. Máme

$$n\,d\,V = n_0\,d\,V_0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = n_0\,\frac{\varepsilon}{m\,c^2} \tag{10.2}$$

a tedy

$$A\,n_1\,n_2 = inv'' \quad \Rightarrow \quad A\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = inv' \quad \Rightarrow \quad A\,\frac{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{p_1\cdot p_2} = inv \quad , \tag{10.3}$$

kde skalární součin označujeme jako $p_1\cdot p_2 = p_{1\,i}\,p_2^i$. V klidové soustavě částice *2* je

$$A = v_{rel}\,\sigma \quad , \quad p_2^i = \left(\frac{\varepsilon_2}{c} = m_2\,c\,,\,\vec{p}_2 = 0\right) \quad \Rightarrow \quad p_1\cdot p_2 = \frac{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad inv = v_{rel}\,\sigma\,c^2 \tag{10.4}$$

a dále

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - v_{rel}^2 / c^2}} m_2 c \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{rel}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 m_2 c^2}{p_1 \cdot p_2} \right)^2} \quad . \tag{10.5}$$

Spojením vztahů dostáváme

$$d w = \frac{d \nu}{d t} = c \sigma n_1 n_2 \frac{c^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sqrt{\left(p_1 \cdot p_2 \right)^2 - \left(m_1 m_2 c^2 \right)^2}\, d V \quad . \tag{10.6}$$

Účinný průřez dostaneme tedy z pravděpodobnosti přechodu za jednotku času

$$\sigma = \frac{d w}{J n_2 d V} \quad , \quad J = \frac{\sqrt{\left(p_1 \cdot p_2 \right)^2 - \left(m_1 m_2 c^2 \right)^2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} n_1 \quad . \tag{10.7}$$

V těžišťové soustavě je $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, a tedy

$$j = \frac{|\vec{p}|}{V} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \frac{v_1 + v_2}{V} \quad , \tag{10.8}$$

v souladu s obvyklou definicí hustoty toku.

11 Spinová matice hustoty

Spinory vyhovují řešitelným (determinant je roven nule) soustavám algebraických rovnic

$$\left(\underline{p} - m \right) u \left(p \right) = 0 \quad , \quad \left(\underline{p} + m \right) u \left(- p \right) = 0 \quad . \tag{11.1}$$

Normujeme je tak, aby platilo

$$\bar{u} \left(p \right) u \left(p \right) = 2 m \quad , \bar{u} \left(- p \right) u \left(- p \right) = -2 m \quad . \tag{11.2}$$

Ve standardní representaci máme

$$u(p)=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\,w(p)\\ \sqrt{\varepsilon-m}\,(\vec{n}\,\vec{\sigma})\,w(p)\end{pmatrix}\quad,\quad u(-p)=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon-m}\,(\vec{n}\,\vec{\sigma})\,w(-p)\\ \sqrt{\varepsilon+m}\,w(-p)\end{pmatrix}\quad,$$

$$\vec{n}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\quad,\quad w^{+}(p)\,w(p)=w^{+}(-p)\,w(-p)=1\quad. \tag{11.3}$$

Pro relativisticky sdružené výrazy pak

$$\begin{aligned}\bar{u}(p)&=\left(\sqrt{\varepsilon+m}\,w^{+}(p)\quad-\sqrt{\varepsilon-m}\,w^{+}(p)(\vec{n}\,\vec{\sigma})\right)\quad,\\ \bar{u}(p)&=\left(\sqrt{\varepsilon-m}\,w^{+}(p)(\vec{n}\,\vec{\sigma})\quad-\sqrt{\varepsilon+m}\,w^{+}(p)\right)\quad.\end{aligned} \tag{11.4}$$

V těchto výrazech jsou $w(p)$ a $w(-p)$ libovolné normované dvoukomponentové veličiny. Uvedené volnosti můžeme užít pro vhodnou volbu vlnové funkce. Možnou volbou je například

$$\begin{aligned}w(p)^{(\sigma=1/2)}&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad w(-p)^{(\sigma=1/2)}=-\sigma_y\,w^{*}(p)^{(\sigma=-1/2)}=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\quad,\\ w(p)^{(\sigma=-1/2)}&=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad,\quad w(-p)^{(\sigma=-1/2)}=-\sigma_y\,w^{*}(p)^{(\sigma=1/2)}=\begin{pmatrix}0\\-i\end{pmatrix}\quad.\end{aligned} \tag{11.5}$$

Platí

$$\sum_{\sigma} w(p)^{(\sigma)}\,w^{+}(p)^{(\sigma)}=\sum_{\sigma} w(-p)^{(\sigma)}\,w^{+}(-p)^{(\sigma)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad. \tag{11.6}$$

Pro bispinory pak máme

$$\sum_{\sigma} u(p)^{(\sigma)}\,u^{+}(p)^{(\sigma)}=\underline{p}+m\quad,\quad \sum_{\sigma} u(-p)^{(\sigma)}\,u^{+}(-p)^{(\sigma)}=\underline{p}-m\quad. \tag{11.7}$$

Prvky spinové matice hustoty jsou v čistém stavu triviální výrazy

$$\rho_{AB}(p)=u_A(p)\,\bar{u}_B(p)\quad. \tag{11.8}$$

Poněkud odlišně oproti běžné matici hustoty zde stopa není rovna 1

$$\mathrm{Tr}\{\rho(p)\}=\sum_{A} u_A(p)\,\bar{u}_A(p)=\bar{u}(p)\,u(p)=2m\quad. \tag{11.9}$$

Ze (11.8) je zřejmé, že matice hustoty v čistém i smíšeném stavu bude splňovat Diracovu rovnici

$$\left(\underline{p}-m\right)\rho(p)=0 \quad , \quad \rho(p)\left(\underline{p}-m\right)=0 \quad . \tag{11.10}$$

V čistém stavu spočteme střední hodnotu spinu podle vztahu

$$\left\langle \hat{\vec{s}} \right\rangle = \frac{1}{2}\int \psi^{*}\,\vec{\Sigma}\psi\, d^{3}\vec{r} = \frac{1}{4\varepsilon}u^{*}(p)\vec{\Sigma}u(p) = \frac{1}{4\varepsilon}\bar{u}(p)\gamma^{0}\vec{\Sigma}u(p) \tag{11.11}$$

a odpovídající výraz pro stav částečné polarizace je pak

$$\begin{gathered}\left\langle \hat{\vec{s}} \right\rangle = \frac{1}{4\varepsilon}\sum_{A}\sum_{B}\bar{u}_{A}(p)\left(\gamma^{0}\vec{\Sigma}\right)_{AB}u_{B}(p) = \\ \frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{Tr}\left\{\rho(p)\gamma^{0}\vec{\Sigma}\right\} = \frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{Tr}\left\{\rho(p)\gamma^{5}\vec{\gamma}\right\} \quad .\end{gathered} \tag{11.12}$$

Polarizační vektor v klidové soustavě označme $\vec{\zeta}=2\left\langle \hat{\vec{s}} \right\rangle$, platí tedy pro čistý stav $\left|\vec{\zeta}\right|=1$, pro smíšený stav $\left|\vec{\zeta}\right|<1$. Čtyřvektory impulsu a spinu v klidové soustavě jsou $p^{i}=\left(m,\vec{0}\right)$ a $a^{i}=\left(0,\vec{\zeta}\right)$ a v libovolné inerciální souřadné soustavě tedy musí platit

$$p\cdot p=m^{2} \quad , \quad a\cdot a=-\zeta^{2} \quad , \quad p\cdot a=0 \quad . \tag{11.13}$$

Lorentzova transformace do laboratorní soustavy dává

$$a^{0}=\frac{\vec{\zeta}\,\vec{p}}{m} \quad , \quad \vec{a}=\vec{\zeta}+\frac{\left(\vec{\zeta}\,\vec{p}\right)\vec{p}}{m\left(\varepsilon+m\right)} \quad . \tag{11.14}$$

Matice hustoty pro nepolarizovaný svazek bude mít tvar (musí obsahovat pouze impuls jako jedinou charakteristiku a splňovat dané rovnice)

$$\rho_{n}(p)=\frac{1}{2}\left(\underline{p}+m\right) \quad . \tag{11.15}$$

Pro obecný smíšený stav bude mít tvar

$$\rho(p)=\frac{1}{4m}\left(\underline{p}+m\right)\tilde{\rho}\left(\underline{a}\right)\left(\underline{p}+m\right) \quad , \quad \tilde{\rho}\left(\underline{a}=0\right)=1 \quad . \tag{11.16}$$

Připomeňme si, že platí $(\underline{p}+m)^2 = 2m(\underline{p}+m)$. Matice $\tilde{\rho}(\underline{a})$ má na čtyřvektoru $\underline{a}$ záviset lineárně. Napišme tedy $\tilde{\rho}(\underline{a}) = 1 - A\gamma^5\,\underline{a}$. Konstantní matici A určíme výpočtem střední hodnoty spinu v klidové soustavě

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{m}{4}\left(1+\gamma^0\right)\left(1+A\gamma^5\left(\vec{\gamma}\vec{\zeta}\right)\right)\left(1+\gamma^0\right) = \frac{m}{2}\left(1+\gamma^0\right)\left(1+A\gamma^5\left(\vec{\gamma}\vec{\zeta}\right)\right) \quad , \\ \vec{\zeta} &= 2\left\langle \hat{\vec{s}} \right\rangle = \frac{1}{2m}\mathrm{Tr}\left\{\rho(p)\gamma^5\vec{\gamma}\right\} = -\frac{1}{4}A\,\mathrm{Tr}\left\{\left(\vec{\gamma}\vec{\zeta}\right)\vec{\gamma}\right\} = A\vec{\zeta} \end{aligned} \tag{11.17}$$

a musí být tedy $A=1$. Protože je $a \cdot p = 0$, $\underline{p}$ antikomutuje s $\underline{a}$ a komutuje s $\gamma^5\,\underline{a}$. Výraz pro spinovou matici hustoty lze přepsat do konečného tvaru

$$\rho(p) = \frac{1}{2}\left(\underline{p}+m\right)\left(1-\gamma^5\,\underline{a}\right) \quad . \tag{11.18}$$

Vektor spinové polarizace lze naopak z matice hustoty spočítat pomocí vztahu

$$a^i = \frac{1}{2m}\mathrm{Tr}\left\{\rho(p)\gamma^5\gamma^i\right\} \quad . \tag{11.19}$$

Obdobně by bylo možné odvodit obecný vztah pro spinovou matici hustoty positronů

$$\rho(-p) = \frac{1}{2}\left(\underline{p}-m\right)\left(1-\gamma^5\,\underline{a}\right) \quad . \tag{11.20}$$

12 Spinové středování.

Máme-li ve Feynmanově diagramu jen jednu fermionovou čáru (rozptyl na vnějším poli, Comptonův rozptyl, anihilace nebo kreace páru), můžeme použít následujícího způsobu spinového středování (středování přes počáteční spinové stavy a součtu přes koncové spinové stavy pro rozptyl, středování přes spinové stavy elektronu a positronu při anihilaci nebo kreaci). Maticový element M_{fi} je ve zmíněných případech možno zapsat jako

$$M_{fi} = \sum_{A,B} \overline{u}_{fA}\,Q_{AB}\,u_{iB} = \overline{u}_f\,Q u_i \quad . \tag{12.1}$$

Potom máme

$$M_{fi}^{*} = \left(\sum_{A,B} \bar{u}_{fA}\, Q_{AB}\, u_{iB} \right)^{*} = \sum_{A,B,C} u_{fC}\, \gamma_{CA}^{0*}\, Q_{AB}^{*}\, u_{iB}^{*} =$$
$$\sum_{A,B,C,D,E} u_{iB}^{*}\, \gamma_{BD}^{0}\, \gamma_{DE}^{0}\, Q_{BA}^{+}\, \gamma_{AC}^{0} u_{fC} = \bar{u}_i\, \bar{Q}\, u_f \quad , \tag{12.2}$$

kde jsme využili vlastností $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, $\gamma^{0+} = \gamma^0$ a označili $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$. Můžeme teď psát

$$\left| M_{fi} \right|^2 = \bar{u}_f\, Q u_i\, \bar{u}_i\, \bar{Q} u_f = \mathrm{Tr}\left\{ u_f\, \bar{u}_f Q u_i\, \bar{u}_i\, \bar{Q} \right\} \quad . \tag{12.3}$$

Takže máme

$$\begin{aligned}
&2\,\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(p) Q\, \rho_i(p) \bar{Q} \right\} && \text{rozptyl elektronů na vnějším potenciále} \\
&2\,\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(p) Q\, \rho_i(p) \bar{Q} \right\} && \text{Comptonův rozptyl} \\
&\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(-p) Q\, \rho_i(p) \bar{Q} \right\} && \text{anihilace páru} \\
&\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(p) Q\, \rho_i(-p) \bar{Q} \right\} && \text{kreace páru}
\end{aligned} \tag{12.4}$$