Poznámky k přednášce o grupách

1. Definice a příklady grup

Podle knihy S. Sternberga

Definice grupy: Grupa G je množina, na které je zadána binární operace násobení

$$G\times G \ni (p,q) \quad \rightarrow \quad p\cdot q\in G \quad , \tag{1.1}$$

která je asociativní a zaručuje existenci jednotkového a inversního prvku, tj. platí

$$\begin{aligned} &(p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r) \quad , \quad \forall\, p,q,r\in G \\ &\exists e\in G \quad , \quad e\cdot p = p\cdot e = p \quad , \quad \forall\, p\in G \\ &\exists\, p^{-1}\in G \quad , \quad p\cdot p^{-1} = p^{-1}\cdot p = e \quad , \quad \forall\, p\in G \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.1. Příklad 1: Cyklická grupa o čtyřech prvcích

(a) Aditivní grupa celých čísel modulo 4 ($\mathbb{Z}_4$). Prvky grupy jsou

$$\begin{aligned} &e=\{0,4,-4,8,-8,\dots\} \quad , \quad a=\{1,5,-3,9,-7,\dots\} \quad , \\ &b=\{2,6,-2,10,-6,\dots\} \quad , \quad c=\{3,7,-1,11,-5,\dots\} \quad . \end{aligned} \tag{1.3}$$

(b) Reálné matice 2×2 s obvyklou operací násobení matic

$$\begin{aligned} &e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad a=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \\ &b=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad c=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{1.4}$$

(c) Grupa rotační symetrie čtverce C_4, kde rotace (kladné hodnoty odpovídají otáčení proti směru hodinových ručiček)

$$e\sim 0 \quad , \quad a\sim\frac{\pi}{2} \quad , \quad b\sim\pi \quad , \quad c\sim\frac{3\pi}{2}\sim-\frac{\pi}{2} \quad . \tag{1.5}$$

Grupovou operací je prosté složení transformací.

Všechny tři příklady odpovídají jediné abstraktní grupě, cyklické grupě se čtyřmi prvky. Tabulka násobení je

Tabulka 1

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a

c	c	e	a	b

1.2. Příklad 2: Grupy matic

S několika příklady jsme se již setkali. Grupovou operací je vždy obyčejné násobení matic. Takže máme například

(a) Obecná reálná lineární grupa *n* proměnných $GL(n,\mathbb{R})$, tvořená maticemi Q dimenze $n\times n$ s reálnými prvky splňujícími podmínku $\det Q\neq 0$.

(b) Speciální reálná lineární grupa *n* proměnných $SL(n,\mathbb{R})$, tvořená maticemi Q dimenze $n\times n$ s reálnými prvky splňujícími podmínku $\det Q=1$.

(c) Obecná komplexní lineární grupa *n* proměnných $GL(n,\mathbb{C})$, tvořená maticemi Q dimenze $n\times n$ s komplexními prvky splňujícími podmínku $\det Q\neq 0$.

(d) Speciální komplexní lineární grupa *n* proměnných $SL(n,\mathbb{C})$, tvořená maticemi Q dimenze $n\times n$ s komplexními prvky splňujícími podmínku $\det Q=1$.

1.3. Příklad 3: Grupa *O*(*n*)

Grupa všech lineárních transformací Q *n*-rozměrného prostoru, které zachvávají eukleidovskou vzdálenost

$$\|Q\vec{v}\|=\|\vec{v}\| \quad , \quad \forall\,\vec{v}\in\mathbb{R}^n \quad . \tag{1.6}$$

Zapsáno v ortonormální bázi

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Q^{ij}\,v^j\sum_{k=1}^{n}Q^{ik}\,v^k=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}v^j\,v^k\sum_{i=1}^{n}\left(Q^T\right)^{ji}Q^{ik}=\\&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}v^j\,v^k\left(Q^T\,Q\right)^{jk}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}v^j\,v^k\,\delta^{jk}\quad\Rightarrow\quad Q^T=Q^{-1}\quad .\end{aligned} \tag{1.7}$$

Matice Q musí tedy být ortogonální. Tvoří množina takových matic grupu? Asociativita je zaručena vlastnostmi násobení matic. Dále pro $Q=Q_1\,Q_2$ platí

$$\left(Q_1\,Q_2\right)^T=Q_2^T\,Q_1^T=Q_2^{-1}\,Q_1^{-1}=\left(Q_1\,Q_2\right)^{-1} \quad , \tag{1.8}$$

tedy součin ortogonálních matic je opět ortogonální matice. Jednotková matice je identitou, inversní matice inversním prvkem grupy. Determinant matic z grupy je je roven ± 1. Ortogonální matice s determinantem rovným jedné tvoří podgrupu *SO*(*n*).

1.4. Příklad 4: Grupa *U*(*n*)

Ve vektorovém prostoru nad polem $\mathbb{C}$ komplexních čísel máme standardní hermiteovský skalární součin

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad , \quad \left(u\,,w\right) = \overline{u}^T\, w = \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_n\, w_n \quad . \tag{1.9}$$

Platí

$$\left(A u\,,w\right) = \left(\overline{A u}\right)^T w = \overline{u}^T\, \overline{A}^T\, w = \overline{u}^T\, A^+\, w = \left(u\,,A^+\, w\right) \quad . \tag{1.10}$$

Matice zachovávající skalární součin musí být unitární

$$\left(Q u\,,Q w\right) = \left(u\,,Q^+ Q w\right) = \left(u\,,w\right) \quad \Rightarrow \quad Q^+ = Q^{-1} \quad . \tag{1.11}$$

Zcela stejně jako pro ortogonální matice ukazujeme, že unitární matice tvoří grupu *U*(n). Pro determinant máme

$$\det\left(Q^+ Q\right) = \det\left(Q^+\right)\det\left(Q\right) = \left|\det\left(Q\right)\right|^2 = 1 \quad . \tag{1.12}$$

Matice s determinantem rovným jedné tvoří podgrupu *SU*(*n*). Například matice grupy *SU*(2) mají tvar

$$\begin{pmatrix} \rho \exp\{i\,\varphi\} & \sqrt{1-\rho^2}\, \exp\{i\,\chi\} \\ -\sqrt{1-\rho^2}\, \exp\{-i\,\chi\} & \rho \exp\{-i\,\varphi\} \end{pmatrix} \quad . \tag{1.13}$$

1.5. Příklad 5: Cyklická grupa C_n

Označme

$$\omega = \exp\left\{ i\, \frac{2\pi}{n} \right\} \quad . \tag{1.14}$$

Potom tabulka násobení

Tabulka 2

	1	ω	ω^2		ω^{n-2}	ω^{n-1}
1	1	ω	ω^2			ω^{n-1}
ω	ω	ω^2			ω^{n-1}	1
ω^2	ω^2	ω^3			1	ω
ω^{n-2}	ω^{n-2}	ω^{n-1}	1		ω	ω^2

ω^{n-1}	ω^{n-1}	1	ω		ω^{n-3}	ω^{n-2}

Příklad pro $n=4$ jsme už uvedli. Tabulky násobení pro $n=2$ a $n=3$ jsou

Tabulka 3

	1	–1
1	1	–1
–1	–1	1

Tabulka 4

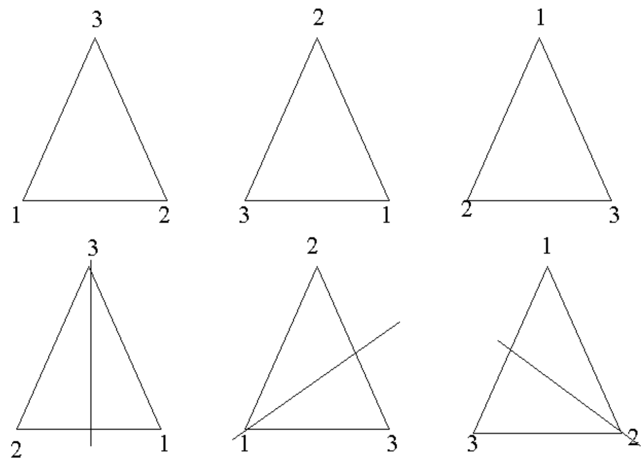
	1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$
1	1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$
$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$	1
$-1/2-i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$	1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$

1.6. Příklad 6: Grupa permutací S_n a grupa symetrie pravidelného n-úhelníku D_n

Nejprve zjistěme počet prvků v dané grupě. Označme s permutaci množiny n prvků. Počítejme možnosti

$$\begin{array}{llll} s(1)\to 1 & & & \\ s(1)\to 2 & s(2)\to 2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ s(1)\to n-1 & s(2)\to n-1 & \cdots & s(n-1)\to n-1 \\ s(1)\to n & s(2)\to n & \cdots & s(n-1)\to n \quad s(n)\to n \end{array} \tag{1.15}$$

Zjevně obsahuje S_n $n!$ prvků. Grupa symetrie pravidelného n-úhelníku D_n obsahuje n rotací (mezi nimi rotaci o nulový úhel, tedy jednotku grupy) a n překlopení podél os symetrie. Má tedy $2n$ prvků. Věnujme se trojúhelníku. Tady zahrnuje podgrupa D_3 celou grupu S_3. Na obrázku je znázorněno působení D_3. Jak to odpovídá permutacím? Otočení o 0 je $123\to 123$, otočení o $2\pi/3$ je $123\to 231$ a konečně otočení o $4\pi/3$ je $123\to 312$. Překlopení kolem osy procházející 3 je $123\to 213$, překlopení kolem osy procházející 1 je $123\to 132$ a překlopení kolem osy procházející 2 je $123\to 321$.



Obrázek 1

2. Působení grupy

2.1. Působení grupy na množině

Ať G je grupa a M množina. Působení grupy na množině je zobrazení

$$
\begin{aligned}
&G\times M \ni (a,m) \quad \to \quad a\,m \in M \quad , \\
&a(b\,m)=(a\,b)\,m \quad , \quad e\,m=m \quad \forall m\in M \quad .
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Příklady: působení grupy rotací $SO(3)$ v trojrozměrném eukleidovském prostoru, grupy $SL(2,\mathbb{C})$ v Minkovskiho prostoročase nebo působení S_3 na množině vrcholů rovnostranného trojúhelníku.

Orbita bodu $m\in M$ při působení grupy G (orbitu značíme $G\cdot m$) je podmnožina M tvořená body $a\,m$, tj.

$$
M \supset G\cdot m = \left\{a\,m \,\middle|\, a\in G\right\} \quad . \tag{2.2}
$$

Podmnožina grupy G, pozůstávající z prvků, pro které platí $a\,m=m$ se nazývá isotropní grupou bodu m a značí se G_m. Grupové vlastnosti jsou splněny, neboť

$$
\begin{aligned}
&a\,m=m \oplus e\,m=m \quad \Rightarrow \quad a^{-1}\,m=m \quad , \\
&a\,m=m \oplus b\,m=m \quad \Rightarrow \quad (a\,b)\,m=m \quad .
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Ať orbita obsahuje $\mathbb{N}(G\cdot m)$ prvků. Je-li n prvkem orbity bodu m, potom existuje prvek grupy $a\in G$ takový, že $a\,m=n$. Pokud existuje ještě jiný prvek, pro který $n=b\,m$, je $a^{-1}\,b\in G_m$. To znamená, že pro každý prvek n existuje právě $\mathbb{N}(G_m)$ prvků, zobrazujících m do n. Máme tak

$$\mathbb{N}(G)=\mathbb{N}(G\cdot m)\mathbb{N}(G_m) \quad . \tag{2.4}$$

Pro případ rovnostranného trojúhelníka je pro obecný bod isotropní grupou pouze identita, tedy $\mathbb{N}(G_m)=1$, $\mathbb{N}(G\cdot n)=6$, pro vrcholy a středy stran tvoří isotropní grupu identita a překlopení kolem osy procházející daným bodem, tedy $\mathbb{N}(G_m)=2$, $\mathbb{N}(G\cdot n)=3$ a nakonec pro střed trojúhelníka je isotropní grupou celá grupa S_3, tedy $\mathbb{N}(G_m)=6$, $\mathbb{N}(G\cdot n)=1$.

Je-li celá množina *M* vyčerpána jedinou orbitou, mluvíme o transitivním působení grupy.

2.2. Působení grupy na sebe

V případě, že množinou *M* je sama grupa *G*, je její působení dané levým násobením (tj. $b\to ab$) transitivní. To vidíme z toho, že pro libovolné dva prvky *b* a *c* grupy existuje prvek $a=cb^{-1}$ takový, že $ab=cb^{-1}b=c$. Dále je zřejmé, že isotropní grupa libovolného prvku pozůstává pouze z identity, neboť $ab=b\Rightarrow a=e$. Bohatší strukturu dostaneme, působí-li grupa podobnostní transformací, tj. $b\to aba^{-1}$. Je to grupová operace, neboť

$$\begin{aligned} &(ac)b(ac)^{-1}=acbc^{-1}a^{-1}=a\left(cbc^{-1}\right)a^{-1} \quad ,\\ &a^{-1}\left(aba^{-1}\right)a=a^{-1}aba^{-1}a=b \quad . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Můžeme vytvářet třídy podobných prvků, *b* a *c* jsou podobné, existuje-li *a* takové, že

$$aba^{-1}=c \quad . \tag{2.6}$$

Identita je třída s jediným prvkem, neboť $aea^{-1}=e$ pro libovolný prvek. Isotropní grupa prvku *b* obsahuje všechny prvky *a*, pro které $aba^{-1}=b$. Je to identita a pokud je *b* od ní různý, pak také *b* a pokud je $b^{-1}\neq b$ pak také b^{-1}. Opět platí

$$\mathbb{N}(G)=\mathbb{N}(G\cdot b)\mathbb{N}(G_b) \quad . \tag{2.7}$$

Jsou-li prvky grupy matice, je třída podobných matic tvořena maticemi *B* a *C*, existuje-li matice *A* taková, že

$$ABA^{-1}=C \quad . \tag{2.8}$$

Matice mají stejné vlastní hodnoty a tedy stejnou stopu.

3. Generátory SU(3)

K popisu generátorů transformace *X* z *SU*(3) potřebujeme hermiteovské matice T_a, $a=1,\ldots,8$:

$$X = \exp\left(i\,\theta^a\, T_a \right) \quad . \tag{3.1}$$

Tyto matice jsou zobecněním matic τ_i z $SU(2)$, jejichž vložení do T_a zvýrazníme tím, že místo některých nul budeme psát tečky:

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & . \\ 1 & 0 & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & . \\ i & 0 & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \quad , \quad T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & . \\ 0 & -1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \quad ,$$
$$T_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & . & 1 \\ . & . & . \\ 1 & . & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & . & -i \\ . & . & . \\ i & . & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & 0 & 1 \\ . & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.2}$$
$$T_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & 0 & -i \\ . & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

Matice T_a jsou normovány tak, že platí

$$\mathrm{Tr}\left(T_a\, T_b\right) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{3.3}$$

a splňují komutační relace

$$\left[T_a\, , T_b\right] = i\, f_{abc}\, T_c \quad . \tag{3.4}$$

Soupis strukturních konstant je

$$f_{123} = 1 \quad ,$$
$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2} \quad , \tag{3.5}$$
$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ,$$

další spočteme záměnou vzhledem k úplné antisymetrii indexů, tj.

$$f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} = -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba} \quad . \tag{3.6}$$

Definujeme skalární součin a působení operátorů jako

$$\left\langle T_a \middle| T_b \right\rangle \equiv 2\,\mathrm{Tr}\left(T_a^+\, T_b\right) \quad , \quad T_a \left| T_b \right\rangle \equiv \left| \left[T_a\, , T_b\right] \right\rangle \quad . \tag{3.7}$$

Než se budeme zabývat SU(3), vraťme se k SU(2). Obecně hodnost (počet komutujících generátorů) grupy SU(N) je $N-1$, řád (počet generátorů) je N^2-1. Pro SU(2) máme

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.8}$$

Vlastní vektory operátoru T_3 jsou (značeny vlastními hodnotami)

$$\left|\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \left|-\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad . \tag{3.9}$$

Hledejme teď další stav, pro který bude

$$T_3\left|T\right\rangle = \alpha\left|T\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left[T_3, T\right] = \alpha T \quad . \tag{3.10}$$

Všimněme si, že T není hermiteovský, neboť

$$\left(\left[T_3, T\right]\right)^+ = -\left[T_3, T^+\right] \quad \Rightarrow \quad \left[T_3, T^+\right] = -\alpha T^+ \quad . \tag{3.11}$$

Existuje obecný postup pro výpočet α, ale tady zvolíme přímý výpočet

$$\begin{gathered} T = a_1 T_1 + a_2 T_2 \quad , \quad \left[T_3, T\right] = a_1\left[T_3, T_1\right] + a_2\left[T_3, T_2\right] = i\, a_1 T_2 - i\, a_2 T_1 \quad , \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a_1 - i\, a_2 \\ -a_1 - i\, a_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & a_1 - i\, a_2 \\ a_1 + i\, a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \\ \alpha = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = i \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \end{gathered} \tag{3.12}$$

Potom je

$$\alpha = -1 \quad , \quad T^+ = T_1 - i\, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.13}$$

Pro SU(3) to ovšem bude zajímavější. Máme teď dva komutující operátory $\left[T_3, T_8\right] = 0$ a příslušné vlastní stavy jsou

$$\left|e_1\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \left|e_2\right\rangle = \left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \left|e_3\right\rangle = \left|0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad . \tag{3.14}$$

Rozdíly ve vahách jsou $(1,0), \left(1/2, \sqrt{3}/2\right), \left(-1/2, \sqrt{3}/2\right)$ a také totéž s opačnými znaménky. Příslušné operátory jsou

$$T\left(\pm 1, 0\right) = T_1 \pm i\, T_2 \ , T\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T_4 \pm i\, T_5 \ , T\left(\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T_6 \pm i\, T_7 \quad . \tag{3.15}$$

Na ose *x* je spin, na ose *y* hypernáboj. To hodně připomíná kvarky up, down a strange.

4. Fundamentální reprezentace

V dalším vezměme tabulku této fundamentální reprezentace

		I_3	Y	$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$	kvark

$\boxed{e_1}$	$(1,0,0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	u
$\boxed{e_2}$	$(0,1,0)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	d
$\boxed{e_3}$	$(0,0,1)$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	s

a budeme konstruovat komplikovanější. Důležité je, že s pomocí tensorů $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ a $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ můžeme uvažovat pouze tensory s jen horními nebo jen dolními indexy. Tak tensor

$$Y_\alpha^\beta \quad \leftrightarrow \quad Y^{\mu\nu\beta} = \varepsilon^{\alpha\mu\nu} Y_\alpha^\beta \quad . \tag{4.1}$$

Již jsme viděli, že stopa je invariant, musíme tedy jako ireducibilní reprezentaci brát pouze tensory s $Y_\alpha^\alpha = 0$. Jak se to projeví u ekvivalentního tensoru? Počítejme

$$Y_\alpha^\alpha = \delta_\lambda^\alpha Y_\alpha^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} Y_\alpha^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\beta\gamma} Y^{\beta\gamma\lambda} = 0 \quad . \tag{4.2}$$

5. Dimenze reprezentace SU(*N*)

Teď chvíli obecně o SU(*N*). Některé skupiny indexů jsou symetrizovány, jiné antisymetrizovány. Tensor řádu *n* rozdělíme jako

$$(n_1, n_2, \dots, n_N) \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} n_i = n \quad , \quad n_i \ge n_{i+1} \quad . \tag{5.1}$$

Pro dimenzi reprezentace platí vztah

$$\begin{aligned} D_N(n_1, n_2, \dots, n_N) = & \\ \frac{1}{1!}(n_1 - n_2 + 1)\cdot \quad & (n_1 - n_3 + 2)\cdot \quad \cdots \quad (n_1 - n_N + N - 1)\cdot \\ & \frac{1}{2!}(n_2 - n_3 + 1)\cdot \quad \cdots \quad (n_2 - n_N + N - 2)\cdot \\ & \qquad \ddots \qquad \cdots \\ & \qquad \frac{1}{(N-1)!}(n_{N-1} - n_N + 1) \end{aligned} \quad . \tag{5.2}$$

Platí zřejmě

$$D_N(n_1, n_2, \dots, n_N) = D_N(n_1 - n_N, n_2 - n_N, \dots, n_{N-1} - n_N, 0) \quad . \tag{5.3}$$

Několik příkladů. Pro SU(2) je $D_2(n_1,n_2)=n_1-n_2+1$. Celkový spin je $S=(n_1-n_2)/2$. Dimenze takové reprezentace je $D_2=2S+1$, což souhlasí. Pro fundamentální reprezentaci

$$D_N(1,0,\dots)=\frac{23\dots N}{1!}\frac{12\dots(N-2)}{2!}\cdots\frac{1}{(N-1)!}=N \quad . \tag{5.4}$$

Stejnou dimenzi má sdružená reprezentace

$$D_N(1,1,\dots,1,0)=\frac{12\dots N}{1!}\frac{12\dots(N-1)}{2!}\cdots\frac{2}{(N-1)!}=N \quad . \tag{5.5}$$

Povšimněme si již zmiňované zvláštnosti u SU(2), kdy původní a sdružená reprezentace jsou ekvivalentní. Dimenze adjungované reprezentace je $D_N(2,1,\dots)=N^2-1$, dimenze úplně symetrické reprezentace je

$$D_N(n,0,\dots)=\binom{N+n-1}{n} \quad . \tag{5.6}$$

6. Přidružená reprezentace SU(3)

Zpět k SU(3). Sdružená reprezentace k fundamentální má tabulku

		I_3	Y	$Q=I_3+\frac{1}{2}Y$	antikvark
$\boxed{e_1}$ $\boxed{e_2}$	$(1,1,0)$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{s}$
$\boxed{e_1}$ $\boxed{e_3}$	$(1,0,1)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{d}$
$\boxed{e_2}$ $\boxed{e_3}$	$(0,1,1)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\bar{u}$

7. Součinové reprezentace SU(3)

Přirozeně při vkládání jednotlivých fundamentálních representací musí indexy v řádku neklesat ve směru zleva doprava, ve sloupci růst ve směru shora dolů. Uvažujme teď součin

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1} \quad , \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}} \quad . \tag{7.1}$$

Připomeňme důležité identity

$$\varepsilon_{\alpha\beta\delta}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 2\, \delta_\delta^\gamma \quad , \quad \varepsilon_{\alpha\beta\lambda}\, \varepsilon^{\mu\nu\lambda} = \delta_\alpha^\mu\, \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu\, \delta_\alpha^\nu \quad . \tag{7.2}$$

V tensorovém značení odpovídá (7.1) rozkladu

$$u^\alpha\, v^\beta = \frac{1}{2}\left(u^\alpha\, v^\beta + u^\beta\, v^\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(u^\alpha\, v^\beta - u^\beta\, v^\alpha\right) = S^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\gamma \quad , \tag{7.3}$$

kde

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u^\alpha\, v^\beta + u^\beta\, v^\alpha\right) \quad , \quad A_\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, u^\alpha\, v^\beta \quad . \tag{7.4}$$

Vezměme součin

$$\ydiagram{1,1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{1,1,1} \quad , \quad \overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8_A} \oplus \mathbf{1} \quad . \tag{7.5}$$

V tensorovém značení

$$u_\alpha\, v^\beta = \left(u_\alpha\, v^\beta - \frac{1}{3} \delta_\alpha^\beta\, u_\mu\, v^\mu\right) + \frac{1}{3} \delta_\alpha^\beta\, u_\mu\, v^\mu = T_\alpha^\beta + \frac{1}{3} S\, \delta_\alpha^\beta \quad , \quad T_\mu^\mu = 0 \quad . \tag{7.6}$$

Tento zápis vyjadřuje rozklad do dvou ireducibilních reprezentací, fyzikálně pak vázané stavy kvark – antikvark. Proč index *A*? V zápisu, kde budeme mít jen horní indexy (viz (4.1) a (4.2)) máme skutečně objekt antisymetrický v prvních dvou indexech

$$T_\alpha^\beta \quad \leftrightarrow \quad T^{\mu\nu\beta} = \varepsilon^{\alpha\mu\nu}\, T_\alpha^\beta \quad , \quad \varepsilon_{\lambda\beta\gamma}\, T^{\beta\gamma\lambda} = 0 \quad . \tag{7.7}$$

Dále uvažujme součin

$$\begin{gathered} \left(\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1}\right) \otimes \ydiagram{1} = \left(\ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1}\right) \otimes \ydiagram{1} = \left(\ydiagram{3} \oplus \ydiagram{2,1}\right) \oplus \left(\ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{1,1,1}\right) \\ (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}) \otimes \mathbf{3} = \left(\mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}}\right) \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}) \oplus \left(\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}\right) = \left(\mathbf{10} \oplus \mathbf{8_S}\right) \oplus \left(\mathbf{8_A} \oplus \mathbf{1}\right) \quad . \end{gathered} \tag{7.8}$$

Případ s $\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$ jsme již rozebrali. Reprezentaci $\mathbf{6}$ odpovídá symetrický tensor $S^{\alpha\beta}$. Budeme tedy mít

$$\begin{gathered} S^{\alpha\beta}\, w^\gamma = S^{\alpha\beta\gamma} + \left(\varepsilon^{\lambda\beta\gamma}\, \delta_\mu^\alpha + \varepsilon^{\lambda\alpha\gamma}\, \delta_\mu^\beta\right) T_\lambda^\mu \quad , \quad T_\lambda^\mu = \frac{1}{3} \varepsilon_{\lambda\rho\nu}\, S^{\mu\rho}\, w^\nu \quad , \\ T_\mu^\mu = 0 \quad , \quad S^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}\left(S^{\alpha\beta}\, w^\gamma + S^{\gamma\beta}\, w^\alpha + S^{\alpha\gamma}\, w^\beta\right) \quad . \end{gathered} \tag{7.9}$$

8. Mesonový oktet

Máme (viz (7.6))

$$T_\alpha^\beta = \psi_\alpha \psi^\beta - \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta \psi_\mu \psi^\mu \quad . \tag{8.1}$$

Máme

α	ψ^α	ψ_α
1	u	$\overline{u}$
2	d	$\overline{d}$
3	s	$\overline{s}$

T_α^β	I_3	Y	$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$	$J^P = 0^-$
$u\,\overline{s}$	$\frac{1}{2}$	1	1	K^+
$d\,\overline{s}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	K^0
$u\,\overline{d}$	1	0	1	π^+
$d\,\overline{u}$	-1	0	-1	π^-
$s\,\overline{u}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	K^-
$s\,\overline{d}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	K^0
$\frac{2}{3}u\,\overline{u} - \frac{1}{3}\left(d\,\overline{d} + s\,\overline{s}\right)$	0	0	0	T_1^1
$\frac{2}{3}d\,\overline{d} - \frac{1}{3}\left(u\,\overline{u} + s\,\overline{s}\right)$	0	0	0	T_2^2
$\frac{2}{3}s\,\overline{s} - \frac{1}{3}\left(u\,\overline{u} + d\,\overline{d}\right)$	0	0	0	T_3^3

Poslední tři řádky nejsou přímo částice, platí podmínka nulové stopy. Triplet podgrupy SU(2) doplňuje stav

$$\pi^0 = \frac{T_1^1 - T_2^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\,\overline{u} - d\,\overline{d}\right) \quad .$$

K tomuto stavu je ortogonální

$$\eta^0 = \sqrt{\frac{3}{2}} T_3^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(u\,\bar{u} + d\,\bar{d} - 2\,s\,\bar{s} \right) \quad .$$

Singlet představuje částice

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(u\,\bar{u} + d\,\bar{d} + s\,\bar{s} \right) \quad .$$

9. Baryonový oktet

Jakkoli jsou v něm nejznámější částice, je oktet jednoduchý pouze co do obsahu kvarků. Pauliho princip však vyžaduje správné namíchání symetrické a antisymetrické části, tj. $\mathbf{8_S}$ a $\mathbf{8_A}$, protože celkový spin tří kvarků je $1/2$. Podstatně jednodušší je oproti tomu situace u dekapletu scelkovým spinem tří kvarků $3/2$. Uvedeme proto jen složení

	I_3	Y	$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$	$J^P = \frac{1}{2}^-$
$u\,u\,d$	$\frac{1}{2}$	1	1	p
$u\,d\,d$	$-\frac{1}{2}$	1	0	n
$u\,u\,s$	1	0	1	Σ^+
$d\,d\,s$	–1	0	–1	Σ^-
$d\,s\,s$	$-\frac{1}{2}$	–1	–1	Ξ^-
$u\,s\,s$	$\frac{1}{2}$	–1	0	Ξ^0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\,d + d\,u)\,s$	0	0	0	Σ^0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\,d - d\,u)\,s$	0	0	0	Λ^0

10. Baryonový dekaplet

$S^{\alpha\beta\gamma}$	I_3	Y	$Q=I_3+\frac{1}{2}Y$	$J^P=\frac{3}{2}^-$
$u\,u\,u$	$\frac{3}{2}$	1	2	Δ^{++}
$\{u\,u\,d\}$	$\frac{1}{2}$	1	1	Δ^{+}
$\{u\,d\,d\}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	Δ^{0}
$d\,d\,d$	$-\frac{3}{2}$	1	-1	Δ^{-}
$\{u\,u\,s\}$	1	0	1	Y^{*+}
$\{u\,d\,s\}$	0	0	0	Y^{*0}
$\{d\,d\,s\}$	-1	0	-1	Y^{*-}
$\{u\,s\,s\}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	Ξ^{*0}
$\{d\,s\,s\}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	Ξ^{*-}
$s\,s\,s$	0	-2	-1	Ω^{-}

Výraz ve složených závorkách reprezentuje úplnou symetrizaci, tj.

$$\begin{aligned} \{u\,u\,d\} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\,u\,d+u\,d\,u+d\,u\,u\right) \quad , \\ \{u\,d\,s\} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\,d\,s+s\,u\,d+d\,s\,u+d\,u\,s+s\,d\,u+u\,s\,d\right) \quad . \end{aligned} \tag{10.1}$$

Jak je ale možné, že fermiony mají symetrickou vlnovou funkci? Přirozeně že nemají – existuje ještě barevná grupa SU(3) a tam je dekaplet singletem

$$\begin{array}{|c|} \hline R \\ \hline B \\ \hline Y \\ \hline \end{array} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\left(RBY-BRY+BYR-YBR+YRB-RYB\right) \quad . \tag{10.2}$$

Takže nakonec máme

$$\begin{aligned} &P=P\left(colour\right)P\left(flavour\right)P\left(spin\right)\ P\left(space\right) \\ &P=P\left(barva\right)\quad P\left(vůně\right)\quad P\left(spin\right)P\left(prostor\right) \quad . \\ &(-)\quad\ (-)\qquad\quad (+)\qquad\quad (+)\qquad\quad (+) \end{aligned} \tag{10.3}$$

11. Skládání spinů – grupa SU(2)

Ať teď fundamentální reprezentaci představuje spinový stav elektronu, tj. stav s $s=1/2$. Jak se sečtou dva stavy? Máme opět

$$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} \quad . \tag{11.1}$$

$$\mathcal{D}^{(1/2)} \otimes \mathcal{D}^{(1/2)} = \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(0)}$$

Pro komplikovanější situaci

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \tag{11.2}$$

$$\mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(3/2)} = \mathcal{D}^{(3/2)} \oplus \mathcal{D}^{(0)}$$

a

$$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad . \tag{11.3}$$

$$\mathcal{D}^{(0)} \otimes \mathcal{D}^{(1/2)} = \mathcal{D}^{(1/2)}$$

Zkusíme vkládání částic: nejprve pro $\mathcal{D}^{(1)}$, tj.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline\end{array} \quad . \tag{11.4}$$

Dostáváme triplet

$$\left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\uparrow\right\rangle_2 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\downarrow\right\rangle_2 + \left|\downarrow\right\rangle_1 \left|\uparrow\right\rangle_2\right) \quad , \quad \left|\downarrow\right\rangle_1 \left|\downarrow\right\rangle_2 \quad . \tag{11.5}$$

Dále pro $\mathcal{D}^{(0)}$, tj. pro

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \quad , \tag{11.6}$$

kdy dostáváme singlet

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\downarrow\right\rangle_2 - \left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\downarrow\right\rangle_2\right) \quad . \tag{11.7}$$

Pro sdruženou representaci $\mathcal{D}^{(1/2)}$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \tag{11.8}$$

dostáváme (například) dublet, pokud nejprve symetrizujeme

$$\left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\uparrow\right\rangle_2 \left|\downarrow\right\rangle_3 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\downarrow\right\rangle_2 + \left|\downarrow\right\rangle_1 \left|\uparrow\right\rangle_2\right)\left|\downarrow\right\rangle_3 \quad . \tag{11.9}$$

12. Objemový element na grupě

Hledáme (levo)invariantní *n*-formu, kde *n* je dimenze grupy

$$\Omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \quad . \tag{12.1}$$

Jeden z postupů je najít *n* (levo)invariantní jedna forem. Mějme reprezentaci grupy na $\mathbb{C}^k$ resp. $\mathbb{R}^k$. Matice *A* dimenze $k \times k$ reprezentuje prvek *a* grupy

$$A = \left(a_{ij}\right) \quad , \quad dA = \left(d a_{ij}\right) \quad . \tag{12.2}$$

Ať *B* je matice reprezentující pevně daný prvek grupy *b*. Potom máme

$$L_b^* A \equiv B^{-1} A \quad . \tag{12.3}$$

Platí

$$\begin{gathered} L_b^*\left(A^{-1} dA\right) = L_b^*\left(A^{-1}\right) L_b^*\left(dA\right) = \left(B^{-1} A\right)^{-1} d\left(B^{-1} A\right) = \\ A^{-1} B B^{-1} dA = A^{-1} dA \quad . \end{gathered} \tag{12.4}$$

Má tedy matice $A^{-1} dA$ jako prvky invariantní jedna formy. Příklad z SU(2):

$$A = \begin{pmatrix} \bar\alpha & -\beta \\ \bar\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta = 1 \quad . \tag{12.5}$$

Potom

$$\begin{gathered} A^{-1} = A^{+} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \quad , \quad dA = \begin{pmatrix} d\bar\alpha & -d\beta \\ d\bar\beta & d\alpha \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \\ A^{-1} dA = \begin{pmatrix} \alpha\, d\bar\alpha + \beta\, d\bar\beta & -\alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha \\ -\bar\beta\, d\bar\alpha + \bar\alpha\, d\bar\beta & \bar\alpha\, d\alpha + \bar\beta\, d\beta \end{pmatrix} \quad . \end{gathered} \tag{12.6}$$

Vezmeme tři nezávislé formy a vytvoříme vnější součin

$$\begin{aligned} &\left(\bar\alpha\, d\alpha + \bar\beta\, d\beta\right) \wedge \left(-\alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha\right) \wedge \left(-\bar\beta\, d\bar\alpha + \bar\alpha\, d\bar\beta\right) = \\ &\left(-\bar\alpha\,\alpha\, d\alpha \wedge d\beta + \bar\beta\,\beta\, d\beta \wedge d\alpha\right) \wedge \left(-\bar\beta\, d\bar\alpha + \bar\alpha\, d\bar\beta\right) = \\ &-d\alpha \wedge d\beta \wedge \left(-\bar\beta\, d\bar\alpha + \bar\alpha\, d\bar\beta\right) \quad . \end{aligned} \tag{12.7}$$

Diferencováním normovací podmínky dostaneme

$$\begin{aligned} &\alpha\, d\bar\alpha + \bar\alpha\, d\alpha + \beta\, d\bar\beta + \bar\beta\, d\beta = 0 \quad \Rightarrow \\ &d\bar\beta = -\frac{1}{\beta}\left(\alpha\, d\bar\alpha + \bar\alpha\, d\alpha + \bar\beta\, d\beta\right) \quad , \end{aligned} \tag{12.8}$$

a po dosazení do (12.7)

$$
\begin{aligned}
&-d\alpha\wedge d\beta\wedge\left(-\bar{\beta}\,d\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\,d\bar{\beta}\right)= \\
&\left(\bar{\beta}+\frac{\alpha\bar{\alpha}}{\beta}\right)d\alpha\wedge d\beta\wedge d\bar{\alpha}=\frac{1}{\beta}d\alpha\wedge d\beta\wedge d\bar{\alpha}\quad .
\end{aligned}
\tag{12.9}
$$

V polárních souřadnicích

$$
\begin{aligned}
&\alpha=u+i\,v\quad,\quad\beta=x+i\,y\quad,\quad u=\cos\theta\quad, \\
&v=\sin\theta\cos\psi\quad,\quad x=\sin\theta\sin\psi\cos\varphi\quad,\quad y=\sin\theta\sin\psi\sin\varphi
\end{aligned}
\tag{12.10}
$$

je

$$
\frac{1}{\beta}d\alpha\wedge d\beta\wedge d\bar{\alpha}=-2\sin^2\theta\sin\psi\,d\theta\wedge d\psi\wedge d\varphi
\tag{12.11}
$$

což po normování dává výsledek ($0\le\theta\le\pi$, $0\le\psi\le\pi$ a $0\le\varphi\le2\pi$

$$
\Omega=\frac{1}{2\pi^2}\sin^2\theta\sin\psi\,d\theta\wedge d\psi\wedge d\varphi\quad .
\tag{12.12}
$$

Ponecháme-li jen úhel θ, máme po záměně $2\theta\to\theta$

$$
\Omega=\frac{1-\cos\theta}{2\pi}d\theta\quad,\quad 0\le\theta\le2\pi\quad .
\tag{12.13}
$$

13. Charakter reprezentace

V diagonální reprezentaci

$$
\begin{pmatrix}
\exp\{i\,j\,\theta\} & & & \\
 & \ddots & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & \exp\{-i\,j\,\theta\}
\end{pmatrix}\quad .
\tag{13.1}
$$

Charakter je pak

$$
\begin{aligned}
&\Delta_j(\theta)=\sum_{m=-j}^{j}\exp\{i\,m\,\theta\}=\exp\{-i\,(j+1)\theta\}\sum_{k=1}^{2j+1}\exp\{i\,k\,\theta\}= \\
&\exp\{-i\,j\,\theta\}\frac{\exp\{i\,(2\,j+1)\theta\}-1}{\exp\{i\,\theta\}-1}=\frac{\exp\left\{i\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}-\exp\left\{-i\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}}{\exp\left\{i\frac{1}{2}\theta\right\}-\exp\left\{-i\frac{1}{2}\theta\right\}}= \\
&\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}.
\end{aligned}
\tag{13.2}
$$

Platí

$$\int_0^{2\pi} \bar{\Delta}_k(\theta)\Delta_j(\theta)\frac{1-\cos\theta}{2\pi}d\theta = \delta_{jk} \quad . \tag{13.3}$$

14. Lorentzova grupa a Diracova rovnice

14.1. Lorentzova grupa

S obvyklým značením

$$G = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad x = (x^i) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{14.1}$$

můžeme definovat skalární součin dvou čtyřrozměrných vektorů jako

$$(x, y) = x^T G\, y = g_{ik}\, x^i\, y^k \quad . \tag{14.2}$$

Lorentzova transformace je lineární zobrazení, které zobrazuje prostoročas sám na sebe a které zachovává skalární součin

$$x^i \to x'^i = \Lambda^i_k\, x^k \quad , \quad x \to x' = \Lambda\, x \quad . \tag{14.3}$$

Podmínka pro invarianci skalárního součinu je

$$(\Lambda\, x)^T G(\Lambda\, y) = x^T \Lambda^T G \Lambda\, y = x^T G\, y \quad \Rightarrow \quad \Lambda^T G \Lambda = G \quad . \tag{14.4}$$

Použijeme-li zápisu ve složkách, můžeme (14.4) přepsat na

$$\left(\Lambda^T\right)^k_i = \Lambda^i_k \quad , \quad g_{lm}\,\Lambda^l_i\,\Lambda^m_k = g_{ik} \quad . \tag{14.5}$$

Jsou-li Λ a M Lorentzovy transformace, jsou také Λ^{-1} a $\Lambda\mathrm{M}$ Lorentzovy transformace, což snadno odvodíme

$$\begin{gathered} g_{ik} = g_{lm}\,\Lambda^l_r\,\Lambda^m_s\left(\Lambda^{-1}\right)^r_i\left(\Lambda^{-1}\right)^s_k = g_{rs}\left(\Lambda^{-1}\right)^r_i\left(\Lambda^{-1}\right)^s_k \quad , \\ g_{ik} = g_{lm}\,\mathrm{M}^l_i\,\mathrm{M}^m_k = g_{rs}\,\Lambda^r_l\,\Lambda^s_m\,\mathrm{M}^l_i\,\mathrm{M}^m_k = g_{rs}\left(\Lambda\mathrm{M}\right)^r_i\left(\Lambda\mathrm{M}\right)^s_k \quad . \end{gathered} \tag{14.6}$$

Lorentzovy transformace tvoří grupu. Grupa má čtyři podmnožiny, charakterizované signaturou determinantu a Λ^0_0, neboť

$$(\det\Lambda)^2 = 1 \quad , \quad \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \sum_{j=1}^{3}\left(\Lambda^j_0\right)^2 = 1 \quad . \tag{14.7}$$

Speciální Lorentzova grupa je tvořena transformacemi s $\det\Lambda = 1$ a $\operatorname{sgn}\Lambda^0_0 = 1$. Máme

$$
\begin{aligned}
&L_+^+ \quad : \quad \det\Lambda = 1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda_0^0 = 1 \quad , \quad I \in L_+^+ \quad , \\
&L_-^+ \quad : \quad \det\Lambda = -1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda_0^0 = 1 \quad , \quad I_s \in L_-^+ \quad , \\
&L_+^- \quad : \quad \det\Lambda = 1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda_0^0 = -1 \quad , \quad I_{st} \in L_+^- \quad , \\
&L_-^- \quad : \quad \det\Lambda = -1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda_0^0 = -1 \quad , \quad I_t \in L_-^- \quad .
\end{aligned}
\tag{14.8}
$$

Speciální Lorentzova grupa obsahuje identickou transformaci, další podmnožiny jsou charakterizovány I_s (prostorová inverse), I_t (časová inverse) a I_{st} (časoprostorová inverse), definovaných pomocí vztahů

$$
\begin{aligned}
&\left(I_s\, x\right)^0 = x^0 \quad , \quad \left(I_s\, x\right)^j = -x^j \quad , \\
&\left(I_t\, x\right)^0 = -x^0 \quad , \quad \left(I_t\, x\right)^j = x^j \quad , \\
&\left(I_{st}\, x\right)^0 = -x^0 \quad , \quad \left(I_{st}\, x\right)^j = -x^j \quad .
\end{aligned}
\tag{14.9}
$$

Se speciální Lorentzovou grupou je spojena grupa komplexních matic druhého řádu s determinantem, rovným jedné, platí $SO(3,1) = SL(2,C)/Z_2$.

14.2. Grupa SL(2,C).

Čtyřvektoru x přiřadíme komplexní matici $\hat{x}$ vztahem

$$
\begin{aligned}
&\hat{x} = \sum_{i=0}^{3} x^i\, \hat{\sigma}^i \quad , \quad \hat{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \\
&\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,
\end{aligned}
\tag{14.10}
$$

takže

$$
\hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i\, x^2 \\ x^1 + i\, x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad . \tag{14.11}
$$

Platí

$$
\det \hat{x} = x^i\, x_i \quad , \quad x^i = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{ \hat{x}\, \hat{\sigma}^i \right\} \quad . \tag{14.12}
$$

Každé dvojici matic $\left\{\hat{\lambda}, -\hat{\lambda}\right\} \in SL(2,C)$ lze přiřadit Lorentzovu transformaci Λ zobrazením

$$
\hat{x}' = \hat{\lambda}\, \hat{x}\, \hat{\lambda}^+ \quad \Rightarrow \quad x' = \Lambda\, x \quad . \tag{14.13}
$$

Matici $\hat{\lambda}$ lze zapsat jako součin hermiteovské matice a unitární matice

$$
\hat{\lambda}(\vec{u}, \vec{\omega}) = \exp\left(\frac{1}{2} \vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{u} \right) \exp\left(\frac{i}{2} \vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{\omega} \right) \quad . \tag{14.14}
$$

Důkaz: Zapišme $\hat{\lambda}\hat{\lambda}^{+} = \exp\left(\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{u}\right)$, potom

$$\begin{gathered}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{u}\right)\hat{\lambda}\right]\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{u}\right)\hat{\lambda}\right]^{+} = \hat{1} \quad \Rightarrow \\ \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{u}\right)\hat{\lambda} = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{\omega}\right) \quad .\end{gathered} \tag{14.15}$$

Jiný způsob zápisu

$$\begin{gathered}\hat{\lambda} = \exp\left(-\frac{\varphi}{2}\vec{n}_{\varphi}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\right)\exp\left(\frac{i\theta}{2}\vec{n}_{\theta}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\right) = \\ \left(\cosh\frac{\varphi}{2} - \vec{n}_{\varphi}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\sinh\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\vec{n}_{\theta}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad .\end{gathered} \tag{14.16}$$

Protože pro Pauliho matice platí

$$\left(\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) \quad , \tag{14.17}$$

můžeme poslední vztah přepsat na

$$\begin{gathered}\hat{\lambda} = \cosh\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - i\,\vec{n}_{\varphi}\cdot\vec{n}_{\theta}\sinh\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \\ \left(-\vec{n}_{\varphi}\sinh\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + i\,\vec{n}_{\theta}\cosh\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2} - i\,\vec{n}_{\varphi}\times\vec{n}_{\theta}\sinh\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\vec{\hat{\sigma}} \quad .\end{gathered} \tag{14.18}$$

14.3. Vlastnosti spinorů

Připomeňme Pauliho matice (pro úplnost dodejme jednotkovou matici)

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{14.19}$$

V trojrozměrném případě je operace inverse provedená dvakrát návratem k původní souřadné soustavě, proto u tensorových veličin je $\hat{P}^2 = \hat{1}$. U trojrozměrných spinorů mohou nastat (rotace o 0 a 2π nejsou ekvivalentní) dvě možnosti

$$\hat{P}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} = \pm 1 \quad , \quad \hat{P}^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} = \pm i \quad . \tag{14.20}$$

Ve čtyřrozměrném prostoru však prostorová inverse mění znaménko pouze tří (x, y, z) ze čtyř (ct, x, y, z) časoprostorových souřadnic a nekomutuje tedy s rotacemi souřadnic, které obsahují časovou osu. Speciálně pro Lorentzovu transformaci platí

$$\hat{P}\,\hat{L}\left(\vec{V}\right) = \hat{L}\left(-\vec{V}\right)\hat{P} \quad . \tag{14.21}$$

Při transformaci z vlastní Lorentzovy grupy transformuje se spinor jako

$$\xi^{/1} = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2 \quad , \quad \xi^{/2} = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2 \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad . \tag{14.22}$$

Koeficienty α, β, γ a δ jsou funkcemi úhlů rotace čtyřrozměrné souřadné soustavy. Bilineární forma

$$\xi^1\,\Xi^2 - \xi^2\,\Xi^1 \tag{14.23}$$

je invariantem (částice se spinem nula, složená ze dvou částic se spinem 1/2). Je užitečné zavést matici, která umožňuje snižovat a zvedat indexy a tak využívat součtové konvence

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad g^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_A = g_{AB}\xi^B \quad , \quad \xi^A = g^{AB}\xi_B \quad . \tag{14.24}$$

Potom můžeme psát místo (14.23)

$$\xi^A\,\Xi_A = -\xi_A\,\Xi^A = inv \quad . \tag{14.25}$$

V nerelativistické teorii určuje $\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}$ hustotu pravděpodobnosti, a je tedy skalární veličinou, proto musí být spinorová transformace (14.22) unitární ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). V relativistické teorii je hustota pravděpodobnosti časupodobnou složkou čtyřvektoru a podmínka unitarity nevzniká. Proto musíme uvažovat ne jeden spinor, ale dvojici spinorů ξ a η, transformujících se podle komplexně sdružených representací Lorentzovy grupy, ξ podle (14.22) a η podle

$$\eta^{/1} = \alpha^*\eta^1 + \beta^*\eta^2 \quad , \quad \eta^{/2} = \gamma^*\eta^1 + \delta^*\eta^2 \quad , \quad \alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* = 1 \quad . \tag{14.26}$$

Komponenty spinoru, který se transformuje podle komplexně sdružené representace Lorentzovy grupy budeme značit tečkou nad velkým písmenem. Pro zvedání a snižování indexů platí i tady vztah (14.24). Působení operátoru prostorové inverse můžeme nyní zapsat jako (volíme representaci, kde $\hat{P}^2 = -1$)

$$\hat{P}\xi^A = i\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta_{\dot{A}} = i\xi^A \tag{14.27}$$

neboli

$$\hat{P}\xi_A = -i\eta^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta^{\dot{A}} = -i\xi_A \quad . \tag{14.28}$$

Dvojice bispinorů $\left(\xi^A, \eta_{\dot{A}}\right)$ a $\left(\Xi^A, \mathrm{H}_{\dot{A}}\right)$ representuje mimo jiné skalární a vektorové veličiny. Pro skalární veličiny (skalár a pseudoskalár) je

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi^A\Xi_A + \eta_{\dot{A}}\mathrm{H}^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\zeta = \zeta \quad , \\ \zeta &= \xi^A\Xi_A - \eta_{\dot{A}}\mathrm{H}^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\zeta = -\zeta \quad . \end{aligned} \tag{14.29}$$

Pro vektorové veličiny

$$\zeta^{A\dot{B}} = \xi^A \mathrm{H}^{\dot{B}} + \Xi^A \eta^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\zeta^{A\dot{B}} = \zeta_{\dot{A}B} \quad ,$$
$$\zeta^{A\dot{B}} = \xi^A \mathrm{H}^{\dot{B}} - \Xi^A \eta^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\zeta^{A\dot{B}} = -\zeta_{\dot{A}B} \quad . \tag{14.30}$$

Vzhledem k relacím

$$\zeta = \left(\zeta^{A\dot{B}} \right) = \vec{a}\cdot\vec{\sigma} + a_0\sigma_0 \quad , \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta\,\vec{\sigma}\} \quad , \quad a^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta\} \tag{14.31}$$

odpovídá první případ čtyřrozměrnému vektoru (s trojrozměrným polárním vektorem) a druhý případ čtyřrozměrnému pseudovektoru (s trojrozměrným axiálním vektorem)

$$\hat{P}\left(a^0,\vec{a}\right) = \left(a^0,-\vec{a}\right) \quad , \quad \hat{P}\left(a^0,\vec{a}\right) = \left(-a^0,\vec{a}\right) \quad . \tag{14.32}$$

14.4. Lorentzova transformace spinorů

Vztahů mezi bispinorem ζ a čtyřvektorem a^i využijeme pro nalezení konkrétního tvaru koeficientů transformace. Označme

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} & \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^{1\dot{1}} & \zeta^{1\dot{2}} \\ \zeta^{2\dot{1}} & \zeta^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \quad ,$$
$$\xi' = L\,\xi \quad , \quad \eta' = \eta\,L^+ \quad , \quad \zeta' = L\,\zeta\,L^+ \quad . \tag{14.33}$$

Pro infinitesimální transformaci píšeme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \quad , \quad \zeta' = \zeta + \lambda\,\zeta + \zeta\,\lambda^+ \quad . \tag{14.34}$$

Při infinitesimální Lorentzově transformaci máme jednak

$$\vec{a}' = \vec{a} - a^0\,\vec{n}\,\delta V = \vec{a} - \frac{\delta V}{2}\vec{n}\,\mathrm{Tr}\{\zeta\} \quad ,$$
$$a'^0 = a^0 - \vec{a}\cdot\vec{n}\,\delta V = a^0 - \frac{\delta V}{2}\vec{n}\cdot\mathrm{Tr}\{\vec{\sigma}\,\zeta\} \tag{14.35}$$

a také

$$\vec{a}' = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta'\vec{\sigma}\} = \vec{a} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\zeta\left(\vec{\sigma}\,\lambda + \lambda^+\,\vec{\sigma}\right)\right\} \quad ,$$
$$a'^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta'\} = a^0 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\zeta\left(\lambda + \lambda^+\right)\right\} \quad . \tag{14.36}$$

Porovnáním obou zápisů dostaneme

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{\delta V}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \quad . \tag{14.37}$$

S využitím vztahu

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.38}$$

můžeme psát pro konečné velikosti rychlosti

$$L = \exp\left\{ -\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh\frac{\phi}{2} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sinh\frac{\phi}{2} \quad , \quad \tanh\phi = V \quad . \qquad (14.39)$$

Při infinitesimální rotaci souřadnic v geometrickém prostoru máme pak

$$\vec{a}^{/} = \vec{a} - \delta\theta(\vec{n}\times\vec{a}) = \vec{a} - \frac{\delta\theta}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta(\vec{\sigma}\times\vec{n})\} \quad , \quad a^{/0} = a^0 \quad , \qquad (14.40)$$

odkud

$$\lambda = -\lambda^{+} = \frac{i\,\delta\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \quad . \qquad (14.41)$$

Pro konečné rotace potom

$$L = \exp\left\{ \frac{i\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sin\frac{\theta}{2} \quad . \qquad (14.42)$$

14.5. Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice

Při známém vztahu mezi čtyřvektory a spinory můžeme operátoru čtyřimpulsu $\hat{p}^i$ přiřadit operátorový spinor $\hat{p}^{A\dot{B}}$ resp. $\hat{p}_{A\dot{B}}$. Jediné vhodné relativisticky invariantní výrazy jsou pak

$$\hat{p}^{A\dot{B}}\eta_{\dot{B}} = m\xi^A \quad , \quad \hat{p}_{\dot{B}A}\xi^A = m\eta_{\dot{B}} \quad , \qquad (14.43)$$

které se značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (14.44)$$

můžeme přepsat na

$$\left(\hat{p}_0\sigma_0 + \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\right)\eta = m\xi \quad , \quad \left(\hat{p}_0\sigma_0 - \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\right)\xi = m\eta \quad . \qquad (14.45)$$

Zavedení bispinorů a γ matic je posledním krokem při odvození obvyklého tvaru Diracovy rovnice. Se značením

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad (14.46)$$

přejde (14.45) na

$$\left(\gamma^0\,\hat{p}_0 - \vec{\gamma}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\psi = m\psi \quad . \qquad (14.47)$$

Zcela kompaktní zápis dostaneme po zavedení matic

$$\underline{\hat{p}} \equiv \gamma^i\,\hat{p}_i \quad , \quad \left(\underline{\hat{p}} - m\right)\psi = 0 \quad . \qquad (14.48)$$

V souřadnicové representaci (na chvíli v SI jednotkách)

$$\left(\underline{\hat{p}} - m\,c\right)\psi = 0 \quad , \quad \underline{\hat{p}} \to i\hbar\underline{\nabla} = i\,\hbar\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} = i\,\hbar\left(\gamma^0 \frac{\partial}{c\,\partial t} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\right) \quad ,$$
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\,\psi \quad , \quad \hat{H} = \frac{\hbar}{i}c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + m\,c^2\,\beta, \tag{14.49}$$

kde matice α a β jsou dány vztahy

$$\vec{\alpha} = \gamma^0\,\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$
$$\alpha_i\,\alpha_k + \alpha_k\,\alpha_i = 2\,\delta_{i\,k} \quad , \quad \beta\,\alpha_i + \alpha_i\,\beta = 0 \quad , \quad \beta^2 = 1 \quad . \tag{14.50}$$

14.6. Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

Se čtyřpotenciálem

$$A^i = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right) \quad , \quad A_i = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A}\right) \tag{14.51}$$

a záměnou (v komutačních relacích vystupuje zobecněný impulz) oproti volné částici

$$p_i \quad \to \quad p_i - e\,A_i \tag{14.52}$$

dostáváme Diracovu rovnici ve vnějším elektromagnetickém poli

$$\gamma^i\left(\hat{p}_i - e\,\hat{A}_i\right)\psi = m\,c\,\psi \quad , \tag{14.53}$$

kde γ^i je čtyřvektor matic, které mají ve spinorové representaci tvar (jsou možné i jiné representace, získané unitárními transformacemi)

$$\gamma^i = \left(\gamma^0, \vec{\gamma}\right) \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{14.54}$$

a ψ je čtyřkomponentový bispinor. V souřadnicové representaci je

$$\hat{p}_i = i\,\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(i\hbar\frac{\partial}{c\,\partial t}, i\,\hbar\vec{\nabla}\right) \quad , \quad \hat{p}^i = \left(i\hbar\frac{\partial}{c\,\partial t}, -i\,\hbar\vec{\nabla}\right) \tag{14.55}$$

a Diracova rovnice má tvar

$$\left(\frac{1}{c}\gamma^0\left(i\,\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right) + \vec{\gamma}\cdot\left(i\,\hbar\,\vec{\nabla} + e\,\vec{A}\right) - m\,c\right)\psi = 0 \quad . \tag{14.56}$$

nebo po přepsání

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(c\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}}-e\hat{\vec{A}}\right)+\beta mc^2+e\hat{\Phi}\right)\psi \quad , \tag{14.57}$$

kde jsme označili

$$\gamma^0=\beta \quad , \quad \vec{\alpha}=\beta\vec{\gamma} \quad . \tag{14.58}$$

14.7. Heisenbergův obraz.

Připomeňme si vztah pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze

$$\frac{d}{dt}\hat{F}=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{F}\right]+\frac{\partial\hat{F}}{\partial t} \quad . \tag{14.59}$$

Zavedeme operátor mechanického impulzu

$$\hat{\vec{\pi}}=\hat{\vec{p}}-e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right) \quad . \tag{14.60}$$

Výpočet komutátorů

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{r}}\right]=\frac{\hbar}{i}c\vec{\alpha} \quad , \tag{14.61}$$

a trochu komplikovaněji

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{p}}-e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right)\right]=-\frac{e\hbar}{i}\vec{\nabla}\Phi+\frac{ec\hbar}{i}\vec{\nabla}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}\right)-\frac{ec\hbar}{i}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} \quad . \tag{14.62}$$

S využitím vztahu

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\alpha}+\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\alpha}\right)+\vec{\alpha}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\vec{\alpha}\times\vec{B} \tag{14.63}$$

dostaneme

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{p}}-e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right)\right]=-\frac{e\hbar}{i}\vec{\nabla}\Phi+\frac{ec\hbar}{i}\vec{\alpha}\times\vec{B} \quad . \tag{14.64}$$

Tedy

$$\frac{d\hat{\vec{r}}}{dt}=c\vec{\alpha} \quad , \quad \frac{d\hat{\vec{\pi}}}{dt}=-e\vec{\nabla}\Phi+ec\vec{\alpha}\times\vec{B} \quad . \tag{14.65}$$

Charakter operátoru rychlosti dal vznik názvu Zitterbewegung.

14.8. Rovnice kontinuity.

Diracovu rovnici

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}-mc\right)\psi=0 \tag{14.66}$$

komplexně sdružíme a s využitím vztahů $\left(\gamma^i\right)^+=\gamma^0\gamma^i\gamma^0$, tedy

$$\left(\gamma^0\right)^+ = \gamma^0 \quad , \quad \left(\vec{\gamma}\right)^+ = -\vec{\gamma} \tag{14.67}$$

napíšeme jako

$$\left(-i\hbar\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\tilde{\vec{\gamma}}\cdot\vec{\nabla} - mc\right)\psi^* = 0 \quad . \tag{14.68}$$

Rovnici (14.68) transponujeme na (diferenciální operátory působí doleva)

$$\psi^+\left(-i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - mc\right) = 0 \tag{14.69}$$

a po zavedení Diracova sdružení $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ s využitím antikomutačních relací γ matic máme

$$\bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + mc\right) = 0 \quad . \tag{14.70}$$

S použitím symbolů $\underline{a} = \gamma^i a_i$ můžeme (14.66) a (14.70) zapsat jako

$$\left(\hat{\underline{p}} - mc\right)\psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi}\left(\hat{\underline{p}} + mc\right) = 0 \quad . \tag{14.71}$$

Vynásobení první rovnice v (14.71) zleva $\bar{\psi}$ a druhé rovnice zprava ψ dává výrazy, jejichž sečtením dostáváme rovnici kontinuity

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0 \quad , \quad j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi \quad . \tag{14.72}$$

Časupodobná komponenta je $j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\psi > 0$.