Ultimátum

Ve hře dvou hráčů první zvolí $x \in [0,1]$ a druhý buďto souhlasí nebo nesouhlasí. V prvním případě první obdrží x a druhý $1-x$, ve druhém nikdo nic.

Normální forma Nejprve musíme zajistit, aby volba strategií obou hráčů probíhala nezávisle a ne v určeném pořadí. Lze např. předpokládat, že druhý hráč si předem vytvoří „manuál“, podle kterého bude volit odpověď. Všechny manuály lze interpretovat jako podmnožiny v $[0,1]$ obsahující právě ta x, se kterými hráč souhlasí, nebo ekvivalentně jako jejich charakteristické funkce, tj. $f(x)=1$ právě když druhý hráč souhlasí s x. Množiny strategií tedy jsou $[0,1]$, resp. $\{0,1\}^{[0,1]}$ a výherní funkce $u_1(x,f) = xf(x)$, resp. $u_2(x,f) = (1-x)f(x)$.

Dolní a horní hodnoty hry Druhý hráč může hrát strategii $k_0 \equiv 0$ a první hráč si nezaručí nic, ani kdyby to předem věděl. Tedy $h_1^+ = h_1^- = 0$. Stejně tak druhý hráč nic nenadělá se strategií prvního hráče $x = 0$ a dostáváme $h_2^+ = h_2^- = 0$.

Rovnovážné situace Tvrdíme, že rovnovážné situace jsou právě dvojice (x,f), kde $x = \max\{y \in [0,1] \mid f(y)=1\}$ a také situace $(1,k_0)$ a $(1,\chi_{\{0\}})$. V prvním případě pro $y > x$ máme $f(y)=0$, tedy $u_1(x,f) = x \geq 0 = u_1(y,f)$. Podobně druhý hráč volí mezi zisky 0 a $1-x = u_2(x,f)$, tedy víc získat nemůže. Dvě zbývající rovnovážné situace poskytují oběma hráčům nulový zisk. Je zřejmé, že individuální odbočení kteréhokoli z hráčů mu nepomůže. Nyní dokážeme, že žádná další situace není rovnovážná. Pokud $x < \sup\{y \in [0,1] \mid f(y)=1\}$, pak lze najít $y > x$ takové, že $f(y)=1$, a první hráč by si volbou y polepšil. Pokud $x < 1$ a $f(x) = 0$, polepší si druhý hráč volbou nějaké $g(x)=1$ zisk z 0 na $1-x$. Konečně, pro $x = 1$ a $f \neq k_0, \chi_{\{0\}}, f(1) = 0$ existuje $y > 0$, kde $f(y)=1$ a první hráč by si jeho volbou polepšil z 0 na y.

Dominování strategií Pro druhého hráče máme $f \prec g$ právě tehdy když $f(x) \leq g(x)$ pro všechna a $f(x) < g(x)$ aspoň pro jedno $x \in [0,1)$. (Hodnota funkcí v 1 není podstatná, protože $u_2(1,-) \equiv 0$.) Nedominované strategie tedy jsou $k_1 \equiv 1$ a $\chi_{[0,1)}$. Pro prvního hráče je $0 \prec x$ pro libovolné $x > 0$

— skutečně $u_1(0, -) \equiv 0$ zatímco např. $u_1(x, k_1) = x > 0$. Nenulové x, y se nedominují — např. $u_1(x, \chi_{\{x\}}) = x > 0 = u_1(x, \chi_{\{y\}})$, zatímco $u_1(y, \chi_{\{x\}}) = 0 < y = u_1(y, \chi_{\{y\}})$. Všechna $x > 0$ jsou tedy nedominované strategie prvního hráče.

Zamyšlení Dominování strategií druhého hráče naznačuje, že druhý hráč by se měl spokojit s libovolným nenulovým ziskem. Tato zdánlivě racionální úvaha však umožňuje prvnímu hráči bezuzdné vydírání.

Přestože má druhý hráč možnost veta, není vůči prvnímu v rovnocenném postavení. Zajímavé však je, že oznámením svého úmyslu předem téměř přebírá úlohu prvního hráče. První by se totiž rozhodoval zejména o tom, zda volit x pro nějž $f(x) = 1$, či nikoliv. V kladném případě bude při racionální volbě takové x volit co největší a prakticky bychom tedy mohli uvažovat o téže hře s přehozenými úlohami hráčů.

Při převodu hry do normálního tvaru se možná dopouštíme určitého zkreslení z psychologického hlediska — druhý hráč je v původní hře již konfrontován s nevratnou nabídkou a může snáze podlehnout pokušení souhlasit, přestože si volbou f předsevzal něco jiného. V praxi do rozhodování hráčů vstupují další faktory — jaká je skutečná hodnota dělené částky (viz funkce užitečnosti), zda se hraje jednokolově či opakovaně, atd.