Matematická analýza V — Rovnice matematické fyziky

Řešte okrajové úlohy

1) $-y'' - 3y = \dfrac{\pi - x}{2}$, $x \in (0,\pi)$; $y(0) = y(\pi) = 0$

2) $-(1+x^2)y'' - 2xy' = f(x)$, $x \in (0,1)$; $y(0) - y'(1) = 0$, $y(1) = 0$

Najděte obecné řešení rovnice

3) $z_x = 6x^2 z_y$ 4) $(z + y - x)v_x + (z + x - y)v_y + zv_z = 0$

Najděte řešení rovnice, které splňuje danou podmínku

5) $z_x + yz_y = 0$, $z(0,y) = \dfrac{1}{y}$ 8) $yz_x - xz_y = y^2 - x^2$, $z(x,a) = x^2 - a^2$

6) $u_t + au_x = 0$, $u(x,0) = \sin x$ 9) $xzz_x + yzz_y + xy = 0$, $z(x, \dfrac{1}{x}) = 1$

7) $u_t + au_x = x^2 t + 1$, $u(x,0) = x + 2$ 10) $2xz_x + yz_y = 4z + 1$, $z(x,1) = x^2$

Určete typ lineární rovnice druhého řádu

11) $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ 12) $x^2 u_{xx} - 2x \sin y\, u_{xy} + \sin^2 y\, u_{yy} = 0$

Danou rovnici převeďte na kanonický tvar

13) $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$

14) $xyz_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + xyz_{yy} + yz_x + xz_y = 0$, $x \neq y$

15) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ 16) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$

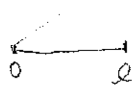
Najděte obecné řešení rovnice

17) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$

18) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$

19) Řešte počáteční úlohu $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$; $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = \dfrac{1}{x}$.

20) Řešte úlohu o chvění struny délky l ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$), je-li



a) struna upevněna na obou koncích, na počátku je ve vzdálenosti c od jednoho konce vychýlena na vzdálenost h od rovnovážné polohy.

b) struna upevněna na obou koncích a je rozechvěna úderem plochého tvrdého kladívka o šířce 2δ, jehož střed se struny dotkne ve vzdálenosti c od jednoho konce a jež se pohybuje rychlostí v.

c) struna je upevněna na obou koncích a působí na ni konstatntní síla f.

d) struna je upevněna na jednom konci, druhý konec vykonává harmonický pohyb s amplitudou A a frekvencí $\omega = \dfrac{a\pi}{l}$. (Na počátku je druhý konec vychýlen na vzdálenost A.)

21) Řešte úlohu o chladnutí homogenní tyče délky l která byla stejnoměrně zahřáta na teplotu u_0, na jejímž bočním povrchu nedochází k výměně tepla ($u_t = a^2 u_{xx}$) a

a) jeden její konec udržujeme na teplotě 0, druhý je tepelně izolován.

b) jeden její konec udržujeme na teplotě u_1, druhý na teplotě u_2.

c) na koncích nastává výměna tepla s prostředím nulové teploty ($u_x(0,t) = hu(0,t)$, $u_x(l,t) = -hu(l,t)$).

22) Homogenní koule o poloměru R byla zahřáta tak, že její počáteční teplota v libovolném bodě závisí pouze na vzdálenosti r tohoto bodu od středu koule ($u(x,y,z,0) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$). Povrch koule udržujeme na nulové teplotě. Určete teplotu koule v libovolném bodě a libovolném čase.

Řešte úlohu

23) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$
$u(0,y) = Ay(b-y)$, $u(a,y) = 0$, $0 \le y \le b$; $u(x,0) = B\sin(\frac{\pi x}{a}$, $u(x,b) = 0$, $0 \le x \le a$

24) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $x^2 + y^2 > a$
$u(a\cos\varphi, a\sin\varphi) = 2\sin^2\varphi + 3\cos^2\varphi$, u je ohraničená

25) $u_{xx} + u_{yy} = -2$, $0 < x < a$, $-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$
$u(0,y) = u(a,y) = 0$, $-\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$; $u(x,-\frac{b}{2}) = u(x,\frac{b}{2})$, $0 \le x \le a$

26) $u_{xx} + u_{yy} = c$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1$; $u(x,y) = 0$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Výsledky: 1) $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \dfrac{\pi}{6}\left(\cos\sqrt{3}x - \operatorname{cotg}\sqrt{3}\pi \sin\sqrt{3}x - 1\right) + \dfrac{x}{6}$

2) $y(x) = \dfrac{1}{4+\pi}\left(\int\limits_0^x f(\xi)(\pi - 4\operatorname{arctg} x)(\operatorname{arctg}\xi + 1)\mathrm{d}\xi + \int\limits_x^1 f(\xi)(\operatorname{arctg} x + 1)(\pi - 4\operatorname{arctg} x)\mathrm{d}\xi\right)$

3) $z(x,y) = \Phi(2x^3 + y)$ 4) $v(x,y,z) = \Phi(x + y - 2z, z^2(x-y))$ 5) $z(x,y) = \frac{e^x}{y}$

6) $u(x,t) = \sin(x - at)$ 7) $u(x,t) = \frac{a^2}{12}t^4 - \frac{ax}{3}t^3 + \frac{x^2}{2}t^2 - (a-1)t + x + 2$

8) $z(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2a^2 - a\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ 9) $z(x,y) = \sqrt{2 - xy}$ 10) $z(x,y) = x^2 + \frac{1}{4}(y^4 - 1)$

11) hyperbolická pro $y < 0$, eliptická pro $y > 0$ 12) parabolická 13) $u_{\eta\eta} = (\frac{1}{\eta - \xi\eta^2} - 1)u_\xi - u_\eta$

14) $z_{\xi\eta} = \frac{\xi}{\eta^2 - \xi^2} z_\eta$ 15) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$ 16) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{4}{9}$, $v = e^{\frac{1}{3}\xi + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta}$, $\xi = \frac{1}{2}x - y$, $\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

17) $u(x,y) = \Phi(xy)\ln y + \Psi(xy)$ 18) $u(x,y) = \Phi(\frac{y}{x})\sqrt{xy} + \Psi(xy)$ 19) $u(x,t) = x + \ln\sqrt{\frac{x+t}{x-t}} + \sin x - \cos x \sin t$

20a) $u(x,t) = \frac{2l^2 h}{c(l-c)\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{\pi n}{l}c)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\cos(\frac{a\pi n}{l}t)$

20b) $u(x,t) = \frac{4lv}{a\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\frac{\pi n}{l}c)\sin(\frac{\pi n}{l}\delta)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\cos(\frac{a\pi n}{l}t)$

20c) $u(x,t) = \frac{4l^2 f}{a^2\pi^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}(1 - \cos(\frac{a\pi(2n+1)}{l}t))\sin(\frac{\pi(2n+1)}{l}x)$

20d) $u(x,t) = \frac{A}{l}(x\cos(\frac{a\pi}{l}t) - at\sin(\frac{a\pi}{l}t)) + \frac{4A}{\pi} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 - n}\sin(\frac{a\pi(n+1)}{l}t)\sin(\frac{\pi n}{l}x)$

21a) $u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(\frac{2n+1}{2l}\pi x)}{(2n+1)\exp((\frac{(2n+1)a\pi}{2l})^2 t)}$, stacionární stav $u \equiv 0$

21b) $u(x,t) = \frac{u_2 - u_1}{l}x + u_1 + \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(u_0 - u_1 + (-1)^{n+1}(u_0 - u_2))\sin(\frac{\pi n}{l}x)}{n\exp((\frac{a\pi n}{l})^2 t)}$,
stacionární stav $u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x$

21c) $u(x,t) = 2u_0 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a^2\lambda_n t)}{\lambda_n l + h^2 l + 2h}(\sin(\sqrt{\lambda_n}\,l) - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}}(\cos(\sqrt{\lambda_n}\,l) - 1))(\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}\,x) + h\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x))$,
kde $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ jsou kladné kořeny rovnice $\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2\operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda}l)$

22) $u(r,t) = \frac{2}{Rr} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp(-(\frac{n\pi a}{R})^2 t)\sin(\frac{n\pi r}{R}) \int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin(\frac{n\pi\rho}{R})\mathrm{d}\rho$

23) $u(x,y) = \dfrac{B\operatorname{sh}(\frac{\pi(b-y)}{a})\sin(\frac{\pi x}{a})}{\operatorname{sh}(\frac{\pi b}{a})} + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b})\sin(\frac{(2n+1)\pi y}{b})}{(2n+1)^3\operatorname{sh}(\frac{(2n+1)\pi a}{b})}$

24) $u(x,y) = \frac{5}{2} + \frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ 25) $u(x,y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(\frac{2n+1}{a}\pi y)\sin(\frac{2n+1}{a}\pi x)}{(2n+1)^3\operatorname{ch}(\frac{2n+1}{a}\pi b)}$

26) $u(x,y) = \frac{c}{2}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1)$