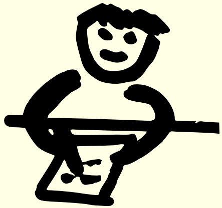
Diferenciální rovnice prvního řádu
Explicitní vzorec

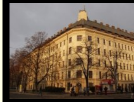
Robert Mařík

3. dubna 2009

Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte anketu na webu. Děkuji!

Pro vytvoření vlastího testu podle tohoto vzoru budete potřebovat volně šiřitelný AcroTEXeDucation bundle, zdrojový soubor pro TEX a přečíst si návod na domovské stránce.





1. Teorie

Definice 1 (lineární DR) *Nechť funkce a, b jsou spojité na intervalu I. Rovnice*

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$

se nazývá obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu (zkráceně píšeme LDR). Je-li navíc $b(x) \equiv 0$ na I, nazývá se rovnice (1) homogenní, v opačném případě nehomogenní.

Tvar (1) budeme v tomto testu nazývat *standartním tvarem*. Například rovnice $2y' + xy = 4$ má normální tvar $y' + \dfrac{x}{2}y = 2$.

Definice 2 (homogenní rovnice) *Buď dána rovnice (1). Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice (1) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice*

$$y' + a(x)y = 0 \tag{2}$$

se nazývá homogenní rovnice asociovaná s nehomogenní rovnici (1).

Věta 1 (obecné řešení)

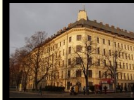
- *Je-li $y_p(x)$ partikulární řešení nehomogenní rovnice a $y_0(x)$ obecné řešení asociované homogenní rovnice, je funkce*

  $$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

  obecným řešením nehomogenní rovnice.
- *Je-li $y_p(x)$ partikulární řešení nehomogenní rovnice a $y_0(x)$ nějaké netriviální řešení asociované homogenní rovnice, je funkce*

  $$y(x) = y_p(x) + Cy_0(x)$$

  obecným řešením této nehomogenní rovnice.



$$y' + a(x)y = b(x) \qquad \text{lineární ODR} \tag{3}$$

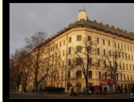
$$y' + a(x)y = 0 \qquad \text{asoc. hom. ODR} \tag{4}$$

$$y_0(x) = C \underbrace{e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}_{\text{part. řešení rce (4)}}, \qquad C \in \mathbb{R} \qquad \text{Obecné řešení rce (4)} \tag{5}$$

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x) e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right] \qquad \text{Obecné řešení rce (3)} \tag{6}$$

$$= \underbrace{e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\int b(x) e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}_{y_p(x)\text{ — part. řeš. rce (3)}} + \underbrace{Ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}_{y_0(x)} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Kde $\int \cdots \mathrm{d}x$ je *jedna* libovolná z primitivních funkcí (bez integrační konstanty) a je dána jednoznačně až na aditivní konstantu. Proto $e^{\pm\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ je dána jednoznačně až na nenulovou multiplikativní konstantu a partikulární řešení je dáno jednoznačně až na aditivní faktor, který je řešením asociované homogení rovnice.



Robert Mařík
LDR prvního řádu
file ldr1a-CZ.tex

Teorie
Testy

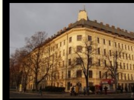
Úvodní strana
Print
Titulní strana
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 3 z 14
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

2. Testy

Testy začínají na následujících stranách, vždy jeden test na stránku.

- Odpověď na normální tvar LDR je dána jednoznačně, až na to, jestli člen b uvedete napravo nebo nalevo.
- Integrál funkce a je dán jednoznačně až na aditivní konstantu. Proto musíte nejprve odpovědět na tuto otázku a poté se vám zobrazí, kterou z primitivních funkcí máte použít. Potom bude odpověď na funkci $b(x)e^{\int a(x)\,dx}$ a její integrál dána jednoznačně (resp. jednoznačně až na aditivní konstantu pro integrál).
- Jako obvykle si můžete správné řešení zobrazit kliknutím na tlačítko ? (i opakovaně, pokud se tlačítko vztahuje k více políčkům). Nedělejte to ale příliš často - úlohy jsou jednoduché a máte se naučit metodu. Příklady na písemkách budou složitější[1]!
- A jako obvykle: Máte-li nějakou připomínku či návrh k těmto testům, dejte mi prosím vědět!

[1] delší integrály, složitější derivace . . .



Kvíz. 1. Řešte rovnici $y' - y = 2$

1. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

2. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$$ [ ] ?

3.

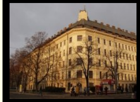
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

4. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

5. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?



Kvíz. 2. Řešte rovnici $xy' + y = x^2$

1. Standartní tvar rovnice je [ ] ?

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$$ [ ] ?

4.

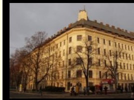
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

5. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?



Kvíz. 3. Řešte rovnici $xy' - y = 1$

1. Standartní tvar rovnice je [?]

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [?]

$b(x) =$ [?]

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$ [?]

4.

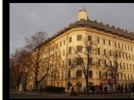
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [?]

5. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [?]

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [?]



Kvíz. 4. Řešte rovnici $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

1. Standartní tvar rovnice je [ ] ?

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

4.

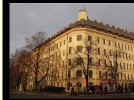
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

5. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?



ROBERT MAŘÍK

Kvíz. 5. Řešte rovnici $y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$

1. Standartní tvar rovnice je [ ] ?

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

4.

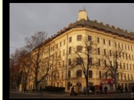
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

5. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?



Kvíz. 6. Řešte rovnici $y' - y = \dfrac{1+x^2}{x}e^x$

1. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

2. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

3.

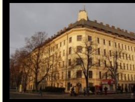
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

4. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

5. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?



Kvíz. 7. Řešte rovnici $y' - y\tan x = \sin x$

1. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$?

$b(x) =$?

2. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$?

3.

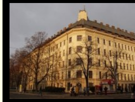
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$?

4. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$?

5. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$?



Kvíz. 8. Řešte rovnici $y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x$

1. Standartní tvar rovnice je [ ] ?

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

4.

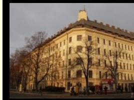
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

5. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?



Robert Mařík
LDR prvního řádu
file ldr11a-CZ.tex

Kvíz. 9. Řešte rovnici $(2x+1)y' + y = \sqrt{2x+1} + 3$

1. Standartní tvar rovnice je [ ] ?

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

4.

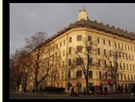
Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

5. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?



Kvíz. 10. Řešte rovnici $xy' + 2y = e^{-x^2}$

1. Standartní tvar rovnice je [ ] ?

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$a(x) =$ [ ] ?

$b(x) =$ [ ] ?

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$\int a(x)\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

4.

Najděte $b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} =$ [ ] ?

5. Integrujte: $\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$ [ ] ?

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

$=$ [ ] ?