Diferenciální rovnice prvního řádu
Variace konstanty

Robert Mařík

3. dubna 2009

Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte anketu na webu. Děkuji!

Pro vytvoření vlastího testu podle tohoto vzoru budete potřebovat volně šiřitelný AcroTEXeDucation bundle, zdrojový soubor pro TEX a přečíst si návod na domovské stránce.

1. Teorie

Definice 1 (lineární DR) *Nechť funkce a, b jsou spojité na intervalu I. Rovnice*

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$

se nazývá obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu (zkráceně píšeme LDR). Je-li navíc $b(x) \equiv 0$ na I, nazývá se rovnice (1) homogenní, v opačném případě nehomogenní.

Definice 2 (homogenní rovnice) *Buď dána rovnice (1). Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice (1) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice*

$$y' + a(x)y = 0 \tag{2}$$

se nazývá homogenní rovnice asociovaná s nehomogenní rovnici (1).

Věta 1 (obecné řešení)

- *Je-li $y_p(x)$ partikulární řešení nehomogenní rovnice a $y_0(x)$ obecné řešení asociované homogenní rovnice, je funkce*

  $$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

  obecným řešením nehomogenní rovnice.
- *Je-li $y_p(x)$ partikulární řešení nehomogenní rovnice a $y_0(x)$ nějaké netriviální řešení asociované homogenní rovnice, je funkce*

  $$y(x) = y_p(x) + Cy_0(x)$$

  obecným řešením této nehomogenní rovnice.

Je-li $y_{p0}(x)$ netriviální partikulární řešení homogenní rovnice, pak obecné řešení této rovnice je $y(x, C) = Cy_{p0}(x)$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = K(x)y_{p0}(x), \tag{3}$$

kde $K(x)$ je diferencovatelná funkce. Fakt, že tato funkce nahradila konstantu v obecném řešení homogenní rovnice, dal metodě název *variace konstanty*. Požadujeme aby funkce $y_p(x)$ byla řešením rovnice (1) a budeme hledat takové $K(x)$ abychom tento požadavek splnili. Derivováním (3) získáme

$$y_p'(x) = K'(x)y_{p0}(x) + K(x)y_{p0}'(x),$$

a po substituci do (1) máme

$$K'(x)y_{p0}(x) + K(x)y_{p0}'(x) + a(x)K(x)y_{p0}(x) = b(x),$$

a

$$K'(x)y_{p0}(x) + K(x)\left[y_{p0}'(x) + a(x)y_{p0}(x)\right] = b(x).$$

Protože $y_{p0}(x)$ je řešením asociované homogenní rovnice, výraz v hranaté závorce je nulový a odsud

$$K'(x)y_{p0}(x) = b(x). \tag{4}$$

Vyřešíme tuto rovnici vzhledem ke $K'(x)$ a po integraci obdržíme $K(x)$. Dosazením funkce $K(x)$ do (3) získáme partikulární řešení nehomogenní rovnice a získat obecné řešení je již snadné pomocí Věty 1.

Teorie
Testy
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 3 z 10
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

2. Testy

- Na následujících stránkách máte zadánu vždy jednu lineární diferenciální rovnici a obecné řešení její asociované homogenní rovnice. Toto řešení vám dává formu ve které budete hledat partikulární řešení. Toto partikulární řešení máte najít a poté máte sestavit obecné řešení.
- Musíte nejprve najít derivaci partikulárního řešení. Pokládejte K za funkci proměnné x. K' je potom derivace této funkce. Pozor! Nepište k funkci K argument. Nepište $K(x)$ — tohle bude interpretováno jako $K * x$, tj. jako součin funkce K a lineární funkce x. Když derivaci napíšete správně, automaticky se objeví v zadané rovnici místo y'.
- Vyřešíte rovnici, která se objeví po překonání předchozího kroku. Máte za úkol najít K'. Proměnná K by se měla úplně vyrušit. Potom musíte najít K integrováním. Funkce K je dána jednoznačně až na aditivní konstantu - můžete si volit jakoukoliv, nejpohodlnější je volit nulu.
- Dosazením nalezeného K na patřičné místo obdržíte partikulární řešení. To také není dáno jednoznačně (záleží na volbě integrační konstanty) ale tento test by měl být dostatečně chytrý na to, aby správně poznal zda se jedná nebo nejedná o partikulární řešení.
- Jako obvykle si můžete správné řešení zobrazit kliknutím na tlačítko ? (i opakovaně, pokud se tlačítko vztahuje k více políčkům). Nedělejte to ale příliš často - úlohy jsou jednoduché a máte se naučit metodu. Příklady na písemkách budou složitější[1]!
- A jako obvykle: Máte-li nějakou připomínku či návrh k těmto testům, dejte mi prosím vědět!

[1] delší integrály, složitější derivace ...

Kvíz. 1. Řešte lineární DR prvního řádu

$$y' - \frac{1}{x} y = 1.$$

Obecné řešení asociované homogení rovnice je $y_0(x) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ a proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = Kx$, kde K je funkce proměnné x.

1. Derivujte vztah

$$y_p(x) = Kx.$$

Člen K považujte za funkci proměnné x a napište do políčka derivaci y_p'. Pište K a K' pro funkci K a její derivaci.

$y_p' =$?

2. Dosazení do původní nehomogenní rovnice je provedeno automaticky po správném odpovězení předchozí otázky.

$$\underbrace{\text{y'}}_{y'} - \frac{1}{x} \underbrace{K \cdot x}_{y} = 1$$

Osamostatníme-li K', dostáváme: $K' =$?

3. Integrací obdržíme $K =$?

4. Partikulární řešení nehom. rovnice

$y_p(x) =$?

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice (použijte C jako konstantu v obecném řešení)

$y(x) = y_p(x) + y_0(x) =$?

Kvíz. 2. Řešte lineární DR prvního řádu

$$y' - \frac{2}{x}y = 1.$$

Obecné řešení asociované homogení rovnice je $y_0(x) = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$ a proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = Kx^2$, kde K je funkce proměnné x.

1. Derivujte vztah

$$y_p(x) = Kx^2.$$

Člen K považujte za funkci proměnné x a napište do políčka derivaci y_p'. Pište `K` a `K'` pro funkci K a její derivaci.

$y_p' =$ [ ] ?

2. Dosazení do původní nehomogenní rovnice je provedeno automaticky po správném odpovězení předchozí otázky.

$$\underbrace{\text{y'}}_{y'} - \frac{2}{x}\underbrace{K \cdot x^2}_{y} = 1$$

Osamostatníme-li K', dostáváme: $K' =$ [ ] ?

3. Integrací obdržíme $K =$ [ ] ?

4. Partikulární řešení nehom. rovnice

$y_p(x) =$ [ ] ?

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice (použijte C jako konstantu v obecném řešení)

$y(x) = y_p(x) + y_0(x) =$ [ ] ?

Kvíz. 3. Řešte lineární DR prvního řádu

$$y' + \frac{1}{x}y = x.$$

Obecné řešení asociované homogení rovnice je $y_0(x) = C\frac{1}{x}$, $C \in \mathbb{R}$ a proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = K\frac{1}{x}$, kde K je funkce proměnné x.

1. Derivujte vztah

$$y_p(x) = K\frac{1}{x}.$$

Člen K považujte za funkci proměnné x a napište do políčka derivaci y_p'. Pište `K` a `K'` pro funkci K a její derivaci.

$y_p' =$ [ ] ?

2. Dosazení do původní nehomogenní rovnice je provedeno automaticky po správném odpovězení předchozí otázky.

$$\underbrace{\text{y'}}_{y'} + \frac{1}{x}\underbrace{K\cdot\frac{1}{x}}_{y} = x$$

Osamostatníme-li K', dostáváme: $K' =$ [ ] ?

3. Integrací obdržíme $K =$ [ ] ?

4. Partikulární řešení nehom. rovnice

$y_p(x) =$ [ ] ?

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice (použijte C jako konstantu v obecném řešení)

$y(x) = y_p(x) + y_0(x) =$ [ ] ?

Kvíz. 4. Řešte lineární DR prvního řádu

$$y' - 2xy = xe^{x^2}.$$

Obecné řešení asociované homogení rovnice je $y_0(x) = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$ a proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = Ke^{x^2}$, kde K je funkce proměnné x.

1. Derivujte vztah

$$y_p(x) = Ke^{x^2}.$$

Člen K považujte za funkci proměnné x a napište do políčka derivaci y'_p. Pište K a K' pro funkci K a její derivaci.

$y'_p =$?

2. Dosazení do původní nehomogenní rovnice je provedeno automaticky po správném odpovězení předchozí otázky.

$$\underbrace{\text{y'}}_{y'} - 2x \underbrace{K \cdot e^{x^2}}_{y} = xe^{x^2}$$

Osamostatníme-li K', dostáváme: $K' =$?

3. Integrací obdržíme $K =$?

4. Partikulární řešení nehom. rovnice
$y_p(x) =$?

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice (použijte C jako konstantu v obecném řešení)
$y(x) = y_p(x) + y_0(x) =$?

Teorie
Testy
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 8 z 10
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 5. Řešte lineární DR prvního řádu

$$y' + 3y = 1.$$

Obecné řešení asociované homogení rovnice je $y_0(x) = Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$ a proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = Ke^{-3x}$, kde K je funkce proměnné x.

1. Derivujte vztah

$$y_p(x) = Ke^{-3x}.$$

Člen K považujte za funkci proměnné x a napište do políčka derivaci y_p'. Pište `K` a `K'` pro funkci K a její derivaci.

$y_p' =$?

2. Dosazení do původní nehomogenní rovnice je provedeno automaticky po správném odpovězení předchozí otázky.

$$\underbrace{\text{y'}}_{y'} + 3\underbrace{K \cdot e^{-3x}}_{y} = 1$$

Osamostatníme-li K', dostáváme: $K' =$?

3. Integrací obdržíme $K =$?

4. Partikulární řešení nehom. rovnice

$y_p(x) =$?

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice (použijte C jako konstantu v obecném řešení)

$y(x) = y_p(x) + y_0(x) =$?

Teorie
Testy
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 9 z 10
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 6. Řešte lineární DR prvního řádu

$$y' - \frac{2x}{x^2+1} y = (x^2+1)^2.$$

Obecné řešení asociované homogení rovnice je $y_0(x) = C(x^2+1)$, $C \in \mathbb{R}$ a proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = K(x^2+1)$, kde K je funkce proměnné x.

1. Derivujte vztah

$$y_p(x) = K(x^2+1).$$

Člen K považujte za funkci proměnné x a napište do políčka derivaci y_p'. Pište K a K' pro funkci K a její derivaci.
$y_p' =$ [ ] ?

2. Dosazení do původní nehomogenní rovnice je provedeno automaticky po správném odpovězení předchozí otázky.

$$\underbrace{\text{y'}}_{y'} - \frac{2x}{x^2+1} \underbrace{K \cdot (x^2+1)}_{y} = (x^2+1)^2$$

Osamostatníme-li K', dostáváme: $K' =$ [ ] ?

3. Integrací obdržíme $K =$ [ ] ?

4. Partikulární řešení nehom. rovnice
$y_p(x) =$ [ ] ?

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice (použijte C jako konstantu v obecném řešení)
$y(x) = y_p(x) + y_0(x) =$ [ ] ?

Teorie
Testy
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 10 z 10
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec