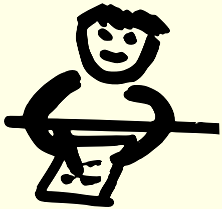
Nehomogenní LDR druhého řádu
Variace konstant
Kramerovým pravidlem pomocí Wronskiánu
Interaktivní kvízy

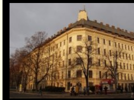
Robert Mařík

3. dubna 2009

Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte anketu na webu. Děkuji!

Pro vytvoření vlastího testu podle tohoto vzoru budete potřebovat volně šiřitelný AcroTEXeDucation bundle, zdrojový soubor pro TEX a přečíst si návod na domovské stránce.





1. Teorie

Definice 1 *Buďte p, q reálná čísla a f funkce definovaná a spojitá na intervalu I. Diferenciální rovnice*

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice (zkráceně LDR) druhého řádu s konstantními koeficienty.

Definice 2 *Nahradíme-li v nehomogenní LDR (1) pravou stranu (tj. funkci f) nulovou funkcí obdržíme rovnici*

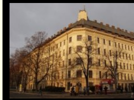
$$y'' + py' + qy = 0. \tag{2}$$

Tato rovnice se nazývá homogenní rovnice příslušná (asociovaná) k rovnici (1).

Věta 1 *Je-li $y_p(x)$ partikulárním řešením rovnice (1) a tvoří-li funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ fundamentální systém řešení asociované homogenní LDR (2), je funkce*

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_p(x), \qquad A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R} \tag{3}$$

obecným řešením rovnice (1).



Věta 2 *Uvažujme rovnici*

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{4}$$

Buďte $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *funkce tvořící fundamentální systém řešení asociované homogenní LDR. Buďte* $A(x)$ *a* $B(x)$ *diferencovatelné funkce, jejichž derivace jsou dány vztahy*

$$A'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} \qquad a \qquad B'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)},$$

kde

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \qquad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Pak funkce $y_p(x)$ *daná vztahem*

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) \tag{5}$$

je partikulátním řešením rovnice (1). Funkce

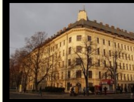
$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_p(x), \quad A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R},$$

je obecným řešením rovnice (1).

2. Testy

Na následujících strnách máte řešit nehomogenní LDR variací konstant

- Funkce z fundamentálního systému řešení nejsou určeny jednoznačně. Po správném nalezení těchto funkcí (nebo po shlédnutí nápovědy) vám bude sděleno, kterou z funkcí máte v dalším považovat za y_1 a kterou za y_2. Potom jsou odpovědi na otázky ohledně W, W_1, W_2, A' a B' jednoznačné .
- Funkce A a B jsou určeny jednoznačně až na aditivní konstantu.
- partikulární řešení je určeno jednozačně, až na aditivní faktor, který je řešením asociaované homogenní LDR. Například tedy obě odpovědi $y = 1$ a $y = 1 + \sin(x) + 2\cos(x)$ jsou brány jako ekvivalentní pro rovnici $y'' + y = 1$.
- Obecné řešení musí obsahovat dvě konstanty A a B a být lineární vzhledem k těmto konstantám. Jinak, přesně jak bychom očekávali, odpovědi $y = 1 + A\sin(x) + B\cos(x)$, $y = 1 + \sin(x) + A\cos(x) + 3B\sin(x)$ nebo $y = 1 + A\sin(x) - B(\cos(x) - \sin(x))$ jsou brány jako ekvivalentní, protože jde o jiný zápois téhož.



Kvíz. Řešte $y'' + y = 1$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ______ ?

2. Fundamentální systém: ______ ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = \text{______ ?}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = \text{______ ?}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = \text{______ ?}$$

4.

$$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \text{______ ?}$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \text{______ ?}$$

5. Integrováním dostaneme

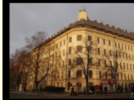
$$A(x) = \text{______ ?}$$

$$B(x) = \text{______ ?}$$

6. Partikulární řešení: $y_p =$ ______ ?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$$y = \text{______ ?}$$



Kvíz. Řešte $y'' + y = x$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

4.

$$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \quad ?$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \quad ?$$

5. Integrováním dostaneme

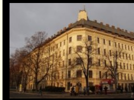
$A(x) =$?

$B(x) =$?

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?



Kvíz. Řešte $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

4.

$$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \quad ?$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \quad ?$$

5. Integrováním dostaneme

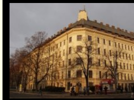
$$A(x) = \quad ?$$

$$B(x) = \quad ?$$

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$$y = \quad ?$$



Kvíz. Řešte $y'' + 4y = x$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} =$$?

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} =$$?

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} =$$?

4. $$A'(x) = \frac{W_1}{W} =$$?

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} =$$?

5. Integrováním dostaneme

$A(x) =$?

$B(x) =$?

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. Řešte $y'' + y = x + 2$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): [ ] ?

2. Fundamentální systém: [ ] ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square \ ?$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square \ ?$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square \ ?$$

4.

$$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \square \ ?$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \square \ ?$$

5. Integrováním dostaneme

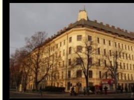
$$A(x) = \square \ ?$$

$$B(x) = \square \ ?$$

6. Partikulární řešení: $y_p = \square$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$$y = \square \ ?$$



Robert Mařík

LDE and Wronskian

file ldr24-CZ.tex

Kvíz. Řešte $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{vmatrix} = \quad ?$$

4.

$$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \quad ?$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \quad ?$$

5. Integrováním dostaneme

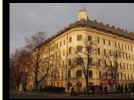
$$A(x) = \quad ?$$

$$B(x) = \quad ?$$

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$$y = \quad ?$$



Kvíz. Řešte $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{vmatrix} =$$?

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{vmatrix} =$$?

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{vmatrix} =$$?

4. $$A'(x) = \frac{W_1}{W} =$$?

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} =$$?

5. Integrováním dostaneme

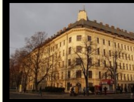
$A(x) =$?

$B(x) =$?

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?



Teorie
Testy
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 11 z 15
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. Řešte $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \quad ?$$

4. $$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \quad ?$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \quad ?$$

5. Integrováním dostaneme

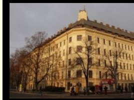
$A(x) =$?

$B(x) =$?

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?



ROBERT MAŘÍK
LDE and Wronskian
file ldr24-CZ.tex

Kvíz. Řešte $y'' + 2y' - 3y = e^x$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): [ ] ?

2. Fundamentální systém: [ ] ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square \; ?$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square \; ?$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square \; ?$$

4.

$$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \square \; ?$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \square \; ?$$

5. Integrováním dostaneme

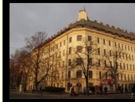
$$A(x) = \square \; ?$$

$$B(x) = \square \; ?$$

6. Partikulární řešení: $y_p = \square$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$$y = \square \; ?$$



Teorie
Testy
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 13 z 15
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. Řešte $y'' - 4y = e^{2x}$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$$W(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = \quad ?$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = \quad ?$$

4. $$A'(x) = \frac{W_1}{W} = \quad ?$$

$$B'(x) = \frac{W_2}{W} = \quad ?$$

5. Integrováním dostaneme

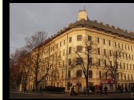
$A(x) =$?

$B(x) =$?

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?



Kvíz. Řešte $y'' - 4y = xe^x$.

1. Char. rce. asoc. hom. LDR (v proměnné z): ?

2. Fundamentální systém: ?

3. Hledejte partikulární řešení va tvaru $y_p = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$

kde y_1=... a y_2=... .

$W(x) =$ = ?

$W_1(x) =$ = ?

$W_2(x) =$ = ?

4. $A'(x) = \frac{W_1}{W} =$?

$B'(x) = \frac{W_2}{W} =$?

5. Integrováním dostaneme

$A(x) =$?

$B(x) =$?

6. Partikulární řešení: $y_p =$?

7. Obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?