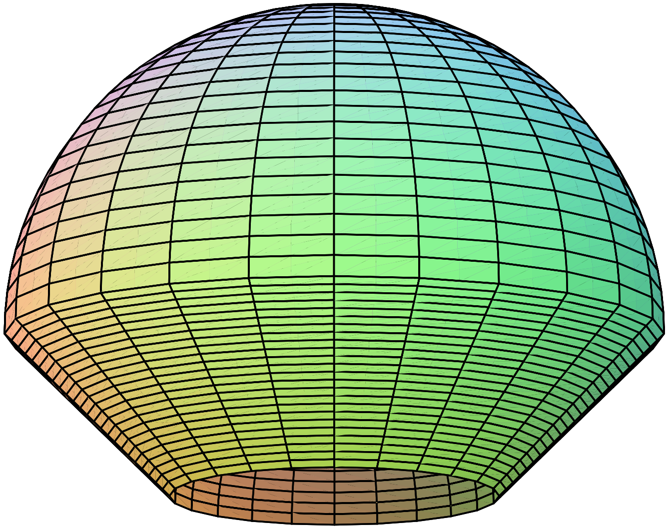
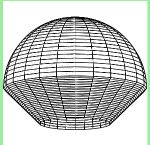


Roman Plch, Petra Šarmanová, Petr Sojka

Integrální počet funkcí více proměnných
interaktivní sbírka příkladů a testových otázek



Titulní strana

Obsah

Strana 1 z 171

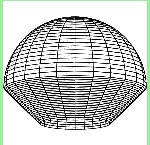
Zpět

Vpřed

Zavřít

Konec

Obsah

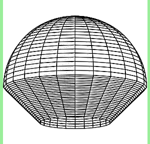


Kapitola 1

Úvod

Vážený čtenáři,
dostává se Ti do rukou Multimediální sbírka příkladů z Integrálního počtu funkcí více proměnných. Naším cílem bylo vytvořit interaktivní materiál, který povede k maximálně efektivnímu zvládnutí a procvičení této pro studenty často obtížné partie. Přitom jsme chtěli, aby naše učební pomůcka byla nezávislá na operačním systému, nevyžadovala použití nějakého LMS systému či instalaci dodatečného softwaru a připojení k Internetu. Z tohoto důvodu jsme jako výstupní formát zvolili PDF.

Formát PDF již několik let dominuje na poli digitálních dokumentů nejen ve vědecké literatuře, ale rozšířil se díky přenositelnosti i mezi širokou veřejnost. Původní myšlenkou pro vznik formátu PDF byla právě přenositelnost textových dokumentů mezi různými platformami, kdy výsledný dokument vypadá na všech

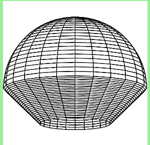


platformách i různém hardwaru stejně. Formát PDF se však stále vyvíjí a přináší nové možnosti. Dnes je možné do PDF dokumentů začleňovat animace, video a audio nahrávky či 3D objekty.

Výukový text je zpracován sázecím systémem TeX ve formátu pdfLaTeX. Vzhledem k tomu, že jde o matematický text obsahující řadu i značně komplikovaných vzorců, je použití sázecího systému TeX jedinou rozumnou alternativou. Zaručuje totiž vysokou typografickou kvalitu a snadnou modifikovatelnost textu.

Při vytváření sbírky jsme se snažili o vytvoření uživatelsky příjemného a efektivního výukového prostředí. Student má stále k dispozici ovládací panel, který umožňuje volit mezi celoobrazovkovým režimem a zobrazením v okně, obsahuje tlačítko posuvu o stranu vpřed a vzad, skok na začátek nebo konec dokumentu a posouvání v historii prohlížení. Důležitá je také možnost skoku na konkrétní stranu v textu a na obsah. Obsah je hypertextový, kliknutím na příslušnou položku v obsahu se přesunete na uvedené místo v textu. Text je přizpůsoben velikosti obrazovky (posuv textu na obrazovce není nutný).

Základním učebním textem, na který je tato sbírka příkladů navázána, je skriptum [2], používané ve výuce jak na MU v Brně, tak na VŠB TU v Ostravě. Text je tvořen pěti kapitolami (Úvod, Dvojný integrál, Trojný integrál, Souhrnné testy a Úlohy na procvičení). Na začátku kapitol Dvojný a Trojný integrál uvádíme shrnutí potřebné teorie, následuje několik podrobně vyřešených úloh, které jsou ilustrovány interaktivní 3D grafikou.



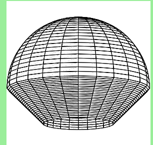
Titulní strana
Obsah
Strana 5 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Interaktivní 3D grafika

Vhodně vytvořená a okomentovaná grafika přispívá k pochopení probírané problematiky a rozvoji geometrické představivosti studentů. Ilustrační grafiku lze použít k objasňování nového teoretického pojmu či závislosti daného jevu na parametrech, k dokreslení geometrického významu řešených úloh a případně k ověření „reálnosti“ řešení. Jedním z možných dělení grafiky je na grafiku statickou a dynamickou. Mezi statickou grafiku počítáme jakékoliv obrázky, s nimiž nemůžeme dále manipulovat. Interaktivní grafika nám naproti tomu umožňuje aktivně pracovat s objektem, např. prohlédnout si ho ze všech stran, zvětšovat a zmenšovat, zobrazit detail vybrané části, zobrazit normálové vektory, měnit nastavení barev, průhlednost objektu a mnoho dalšího (dle možností zobrazovacího programu). Z tohoto důvodu jsou všechny 3D obrázky ve sbírce v interaktivní podobě.

3D obrázky jsme vytvořili v CAS systému Maple a následně konvertovali do formátu U3D pomocí programu Deep Exploration. 3D objekty ve formátu U3D jsme pak vkládali do PDF dokumentu pomocí pdfLaTeXu a balíčku `movie15`. Technika tvorby interaktivní 3D grafiky a její následné začlenění do PDF dokumentu je podrobně popsána v [9].

Na obrázku 1.1 vidíte ukázku interaktivní 3D grafiky. K manipulaci s grafikou je nutné zobrazit 3D Toolbar (je součástí Adobe Readeru). Toolbar se zobrazí umístěním kurzoru myši na obrázek. Základní možnosti Toolbaru jsou dynamický zoom, posunutí, natočení, změna osvětlení, změna barvy pozadí či skrytí, zobrazení nebo izolování pouze určitých prvků modelu. Možné je rovněž využití různých zobrazovacích módů (Solid, Transparent, Shaded Illustration



atd.). Pro korektní zobrazení interaktivní 3D grafiky musíte použít Adobe Reader verze 8.1.1. (a vyšší).

obr. 1.1 Grafický objekt ve formátu U3D

Interaktivní testy

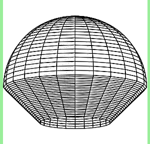
K důkladnému procvičení studované problematiky jsme do každé kapitoly začlenily interaktivní testové otázky (přímo do textu za testované učivo) a na závěr několik souhrnných testů (kapitola Souhrnné testy). Protože rozeznávání ploch, které ohraničují integrační obor, je nezbytné pro úspěšné zvládnutí trojného integrálu, zařadili jsme i testové otázky na rozeznávání množin bodů v prostoru. Kapitola Úlohy na procvičení je tvořena výpočetními příklady, u kterých si je možno pomocí testového prostředí zkontrolovat správnost výsledku.

Tyto testové otázky byly vytvořeny pomocí kolekce LaTeXových maker AcroTeX (více např. v [4] a na webových stránkách [13]. Během práce s těmito makry jsme narazili na některé chyby, zejména při použití otázky s více správnými odpověďmi. Tyto chyby byly po korespondenci s autorem maker profesorem D. P. Story následně opraveny.

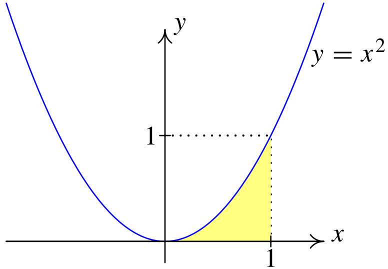
Následující test ukazuje použité typy testových otázek a slouží k vyzkoušení práce s testy. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacatek testu“.

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

Zacatek testu **Ukázkový test**



1. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



☐ $\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\int_{-1}^{0} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

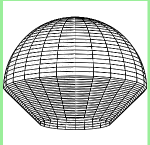
☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_1^{x^2}\left(\int_{-1}^{0} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

☐ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

☐ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$



2. (4b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u integrálu: $\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$,

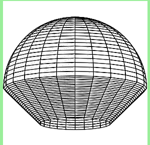
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}+1}^{-\sqrt{1-y^2}+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}-1}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{\sqrt{1-y^2}-1} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

3. (2b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$\int_1^4 \left(\int_{-2}^3 x^2 y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$ ☐

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

☐



Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí po kliknutí na tlačítko „Odpoved“.

Pro zápis matematických výrazů v otázkách s tvořenou odpovědí používejte následující syntaxi.

- Základní matematické operace zapisujte takto: + sčítání (př.: `x+1`), − odčítání (př.: `x-1`), `*` nebo mezera pro násobení (př.: `3*x` nebo `3x` nebo `3␣x` pro $3x$) a `/` pro dělení a zlomky (př.: `1/x` pro $\frac{1}{x}$)
- Mezery jsou před zpracováním odpovědi odstraněny. Při násobení čísel tedy musíte napsat explicitně `*`.
- Pro zapsání mocniny využijte symbol `^` a exponent uzavřete do libovolných závorek závorek (př.: `x^(-2)` pro x^{-2}).
- Pořadí operací definujete uzavřením jednotlivých operací do závorek, je možné používat i hranaté nebo složené závorky (př.: `(sin(x))^(2)` pro $(\sin(x))^2$).

- Odmocninu zapíšete pomocí `sqrt` a odmocněnec umístíte do závorek (př.: `sqrt(x)` pro $\sqrt{x}$), pro odmocninu můžete také použít zápis (př.: `x^(1/3)` pro $\sqrt[3]{x}$).
- Základní funkce zapisujte takto:
`sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`, `sec(x)`, `csc(x)`, `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `ln(x)`.
- Exponenciální funkci e^x zapisujte `exp(x)` nebo `e^x`.
- Číslo π zapisujte jako `pi` (př.: `6*pi` pro 6π nebo `6+pi` pro $6+\pi$).
- Absolutní hodnotu zapisujte `abs()` nebo pomocí | | (př. `abs(x)` nebo `| x |` pro $|x|$) .

Pokud vaše odpověď není platný matematický výraz, nepočítá se vám chybná odpověď, ale musíte si výsledek opravit.

Všechny 3D obrázky v testech jsou taktéž interaktivní. Můžete s nimi otáčet a kliknutím pravým tlačítkem myši můžete vyvolat Toolbar, pomocí něhož je možno využít dalších možností práce s 3D grafikou (změna velikosti, osvětlení, zobrazovacího módu, skrytí, zobrazení nebo izolování pouze určitých prvků modelu, atd.).

Závěrem bychom rádi poděkovali panu Doc. RNDr. J. Kubenovi, CSc. za pečlivé přečtení celé sbírky a přípravu metapostových obrázků, studentce Přírodovědecké fakulty N. Jalové za přípravu metapostových obrázků a některých testových otázek.

Tato multimediální sbírka příkladů a testových otázek vznikla za podpory Fondu rozvoje VŠ v rámci řešení projektu č. 92/2008. Pro tvorbu a začlenění interaktivní grafiky do PDF dokumentů jsme navrhli a následně otestovali nový postup, založený na konverzi 3D grafiky z CAS systému Maple. Tento postup byl zdokumentován a následně publikován v [9] a [10]. Zkušenosti s tvorbou multimediálních učebních pomůcek v PDF formátu jsme prezentovali na konferenci Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, příspěvek je možno najít ve sborníku [11].

Brno, prosinec 2008 Autoři

1.1. Integrální počet funkcí více proměnných

Dvojný a trojný integrál je zobecněním určitého integrálu funkce jedné proměnné, který funkci jedné proměnné přiřazoval číslo. Toto číslo pak mohlo mít různý geometrický a fyzikální význam, např. vyjadřovala obsah rovinné oblasti, objem rotačního tělesa nebo obsah jeho pláště, hmotnost nebo moment setrvačnosti rotačního tělesa.

Obdobně dvojný integrál bude přiřazovat funkci dvou proměnných definované na nějaké rovinné oblasti jisté číslo a trojný integrál bude přiřazovat funkci tří proměnných definované na prostorové oblasti nějaké číslo. Toto číslo může mít opět různý geometrický a fyzikální význam, např. obsah, objem, hmotnost nebo moment setrvačnosti.

V dalším textu budeme místo o délce, obsahu a objemu nějaké množiny A často mluvit o míře této množiny a používat označení $m(A)$. Abychom rozlišili, zda se jedná o délku, obsah nebo objem, budeme používat index, který odpovídá tomu, v jakých jednotkách (délkových, plošných, objemových) se daná míra měří. Tedy $m_1(A)$ bude značit délku, $m_2(A)$ obsah a $m_3(A)$ objem množiny A.

Kapitola 2

Dvojný integrál

Rozcestník kapitoly:

Dvojný integrál a Fubiniova věta

Typové řešené příklady   Test

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

Typové řešené příklady   Test

2.1. Dvojný integrál

Dvojný integrál přiřazuje omezené funkci dvou proměnných definované na nějaké měřitelné množině A v $\mathbb{R}^2$ číslo, které může mít v závislosti na konkrétním tvaru integrandu následující geometrický význam:

$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ představuje míru $\mathrm{m}_3(S)$ (**objem**) tělesa S, které je shora ohraničeno nezápornou funkcí $f(x, y)$ a zdola funkcí nulovou $g(x, y) = 0$. Obě funkce uvažujeme na množině A, tj. $D(f) = D(g) = A$.

$\iint_A (f(x, y) - g(x, y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $f(x, y) \geq g(x, y)$ pro $x, y \in A$, představuje míru $\mathrm{m}_3(S)$ (**objem**) tělesa S, které je shora ohraničeno funkcí $f(x, y)$ a zdola funkcí $g(x, y)$. Obě funkce opět uvažujeme na množině A, tj. $D(f) = D(g) = A$.

$\iint_A 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ představuje míru $\mathrm{m}_3(S)$ (objem) tělesa S, které je shora ohraničeno konstantní funkcí $f(x, y) = 1$ a zdola funkcí nulovou $g(x, y) = 0$. Obě funkce uvažujeme na množině A, tj. $D(f) = D(g) = A$. Vzhledem k tomu, že je objem roven součinu obsahu podstavy a výšky, platí

$$\iint_A 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}_2(A). \tag{2.1}$$

Tento vztah říká, že číselně je objem tělesa s podstavou A a výškou rovnou jedné roven **obsahu** množiny A.

Titulní strana
Obsah
Strana 16 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

2.2. Dvojný integrál – Fubiniova věta

Fubiniova věta nám dává návod, jak převést dvojný integrál na dvojnásobný. Převádíme tak výpočet dvojného integrálu na výpočet dvou po sobě jdoucích jednorozměrných integrálů.

Věta 2.1. (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^2$) Nechť je funkce f dvou proměnných x, y spojitá na množině $A = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \;\; a \le x \le b;\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\big\}$, kde φ, ψ jsou funkce spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $\varphi(x) \le \psi(x)$ pro $\forall x \in \langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Množinu typu $A = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \;\; a \le x \le b;\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\big\}$ budeme dále nazývat elementární oblastí vzhledem k x.

Obdobně množinu typu $A = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \;\; c \le y \le d;\ \varphi(y) \le y \le \psi(y)\big\}$ budeme dále nazývat elementární oblastí vzhledem k y.

Titulní strana
Obsah
Strana 17 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Typové řešené příklady:

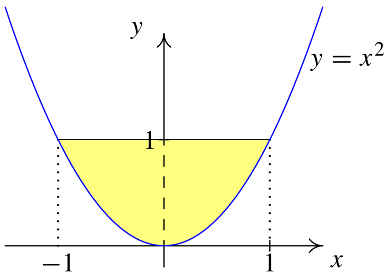
- Převeďte (oběma způsoby) dvojný integrál I na dvojnásobný a vypočtěte jej. Příklad 2.1
- Zaměňte pořadí integrace. Příklad 2.2
- Vypočítejte dvojný integrál $\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Příklad 2.3
- Vypočítejte obsah množiny. Příklad 2.4
- Vypočítejte objem tělesa. Příklad 2.5

Titulní strana
Obsah
Strana 18 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Příklad 2.1. Převeďte (oběma způsoby) dvojný integrál I na dvojnásobný a vypočtěte jej:

$$I = \iint_A yx^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ kde } A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \le y \le 1\right\}.$$

Řešení: Hraniční křivky jsou $y = x^2$ (parabola) a $y = 1$ (přímka). Integrační obor A je znázorněn na obrázku 2.1. Určíme x-ové souřadnice průsečíků obou křivek. Dostáváme rovnici $1 = x^2$, tj. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.



obr. 2.1 Množina A

Chápeme-li množinu A jako elementární množinu vzhledem k x, pak integrační meze jsou:

$$-1 \le x \le 1,$$
$$x^2 \le y \le 1.$$

Integrand yx^2 je spojitá funkce na A. Podle Fubiniovy věty bude

$$I = \iint\limits_A yx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{x^2}^{1} yx^2\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}y^2x^2\right]_{x^2}^{1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(x^2 - x^6)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right] = \frac{4}{21}.$$

Chápeme-li množinu A jako elementární množinu vzhledem k y, pak integrační meze budou následující:

$$\begin{aligned} 0 &\le y \le 1, \\ -\sqrt{y} &\le x \le \sqrt{y}. \end{aligned}$$

$$I = \iint\limits_A yx^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} yx^2\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{1}\left[\frac{1}{3}x^3y\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}\left(y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{5}{2}}\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_{0}^{1} = \frac{4}{21}.$$

Příklad 2.2. Zaměňte pořadí integrace

$$I = \int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

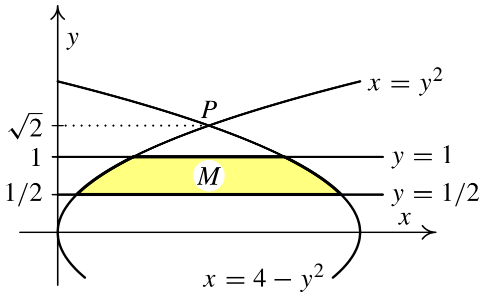
Titulní strana
Obsah
Strana 20 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Řešení: Ze zadání vidíme, že se jedná se o čtverec, kde $-1 \le x \le 1$ a $0 \le y \le 2$. Tedy

$$I = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 2.3. Vypočtěte $\iint_M \frac{y}{x+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je ohraničena křivkami $y = 1$, $y = 1/2$, $x = 4 - y^2$ a $x = y^2$.

Řešení: První dvě křivky jsou přímky, druhé dvě paraboly. Integrační obor M je znázorněn na obrázku 2.2. Určíme ještě y-ovou souřadnici horního průsečíku P obou parabol, abychom se přesvědčili, že máme přímky $y = 1$ a $y = 1/2$ správně umístěny. Z rovnic parabol dostaneme $4 - y^2 = y^2$, tj. $y^2 = 2$, a tedy $y = \sqrt{2}$.



obr. 2.2 Množina M

Množina M je elementární množina vzhledem k y. Ve vzorci (2.2) se tedy zamění role x a y. Integrační meze jsou

$$\begin{aligned} 1/2 \le y &\le 1, \\ y^2 \le x &\le 4 - y^2. \end{aligned}$$

Integrand $y/(x+y^2)$ je spojitá funkce na M. Podle Fubiniovy věty bude

$$I = \iint_M \frac{y}{x+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x+y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Vnitřní integrál vyjde

$$\begin{aligned} \int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x+y^2}\,\mathrm{d}x = y\big[\ln|x+y^2|\big]_{y^2}^{4-y^2} &= y(\ln 4 - \ln 2y^2) = \\ &= y(2\ln 2 - \ln 2 - 2\ln y) = y\ln 2 - 2y\ln y \end{aligned}$$

vzhledem k tomu, že v našem případě je $y > 0$.

Při výpočtu vnějšího integrálu použijeme mimo jiné metodu per partes. Dostaneme:

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^{1} (y\ln 2 - 2y\ln y)\,\mathrm{d}y = \ln 2\int_{1/2}^{1} y\,\mathrm{d}y - 2\int_{1/2}^{1} y\ln y\,\mathrm{d}y = \\ &= \left|\begin{matrix} u = \ln y & u' = \frac{1}{y} \\ v' = y & v = \frac{y^2}{2} \end{matrix}\right| = \ln 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/2}^{1} - 2\left[\frac{y^2}{2}\,\ln y\right]_{1/2}^{1} + 2\int_{1/2}^{1} \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = \\ &= \ln 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\,\ln 2 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{8}\,\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\,(\ln 2 + 3). \end{aligned}$$

Příklad 2.4. Vypočítejte obsah množiny

$$A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \le y,\ y - x \le 2 \right\}.$$

Řešení: Obsah $\mathrm{m}_2(A)$ množiny A budeme počítat podle vztahu (2.1), tj.

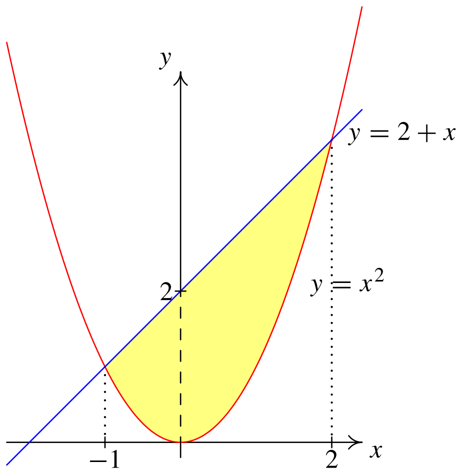
$$\mathrm{m}_2(A) = \iint\limits_A 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Množina A je shora ohraničena křivkou $y = 2 + x$, zdola křivkou $y = x^2$, viz obrázek 2.3. Najděme x-ové souřadnice průsečíků těchto křivek. Musí platit:

$$\begin{aligned} 2 + x &= x^2, \\ x^2 - x - 2 &= 0, \\ (x+1)(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Dostali jsme následující integrační meze:

$$\begin{aligned} -1 \le x &\le 2, \\ x^2 \le y &\le 2 + x. \end{aligned}$$



obr. 2.3 Množina A

$$
\begin{aligned}
m_2(A) &= \iint\limits_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{2}\Big(\int\limits_{x^2}^{2+x} 1\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2}\,[y]_{x^2}^{2+x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2}\Big(2+x-x^2\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 4+2-\frac{8}{3}-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

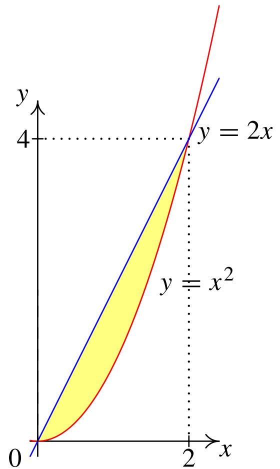
Příklad 2.5. Vypočítejte objem tělesa S ležícího pod paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a nad množinou A v rovině xy ohraničenou přímkou $y = 2x$ a parabolou $y = x^2$.

Řešení: Pro objem $\mathrm{m}_3(S)$ tělesa S platí

$$\mathrm{m}_3(S) = \iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde A představuje podstavu tělesa S a funkce $f(x, y)$ ohraničuje těleso S shora – viz obrázek 2.4. Množina A je shora ohraničená přímkou $y = 2x$ a zdola parabolou $y = x^2$. Spočítáme x-ové souřadnice průsečíků těchto křivek: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Dostali jsme následující integrační meze:

$$0 \leq x \leq 2,$$
$$x^2 \leq y \leq 2x.$$



Titulní strana
Obsah
Strana 25 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

obr. 2.4 Množina A

$$\mathrm{m}_3(S) = \iint\limits_A (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \Bigg(\int\limits_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \Bigg) \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^2 = \frac{216}{35}.$$

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

Zacatek testu **Dvojný integrál – Fubiniova věta**

1. (2b.) Uveďte název věty, která pojednává o převedení vícerozměrného integrálu na integrál vícenásobný.

- [ ] Fubiniova
- [ ] Cauchyova
- [ ] Weierstrassova
- [ ] Greenova

2. (2b.) Platí $\displaystyle\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2+\sin x} \frac{y}{3}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{2}$.

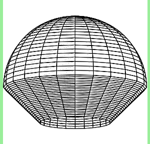
Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

☐ Číslo $\dfrac{3\pi}{2}$ představuje obsah rovinné oblasti A.

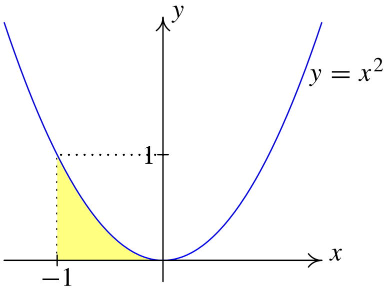
☐ Číslo $\dfrac{3\pi}{2}$ představuje obsah rovinné oblasti, která je ohraničena funkcemi $z = \dfrac{y}{3}$ a $z = 2 + \sin x$.

☐ Číslo $\dfrac{3\pi}{2}$ představuje objem tělesa, které je shora ohraničeno grafem funkce $z = \dfrac{y}{3}$ a jehož podstava je A.

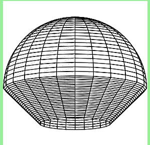
☐ Číslo $\dfrac{3\pi}{2}$ představuje objem tělesa, které je ohraničeno grafem funkce $z = 2 + \sin x$ a jehož podstava je A.



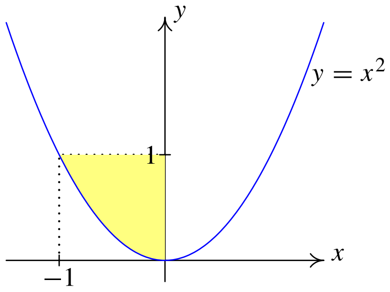
3. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



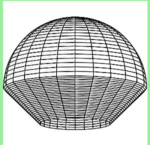
- ☐ $\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_1^{x^2}\left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$



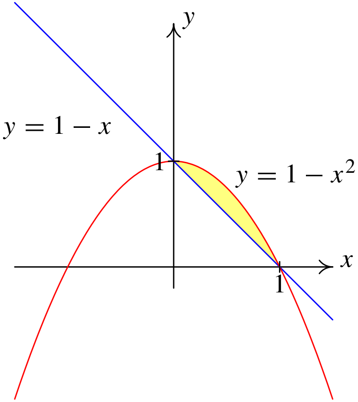
4. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



- ☐ $\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

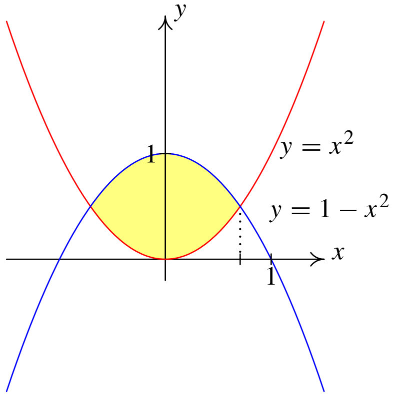


5. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{1-x^2}^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{1-y}^{-\sqrt{1-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

6. (4b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.

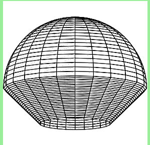


☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_0^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{1-x^2}^{x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$



7. (4b.) U následujícího příkladu vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u integrálu: $\int_{-2}^{0}\left(\int_{y^2-4}^{0} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

- ☐ $\int_{-2}^{0}\left(\int_{-\sqrt{x+4}}^{0} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\int_{-4}^{0}\left(\int_{\sqrt{x+4}}^{0} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\int_{-2}^{0}\left(\int_{-\sqrt{x-4}}^{0} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\int_{-4}^{0}\left(\int_{-\sqrt{x+4}}^{0} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

8. (2b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^3 \left(\int_1^2 x^2 y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

9. (2b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + 2y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

10. (3b.) Nechť Ω je trojúhelník určený body $A = 0, 0$, $B = 0, 2$, $C = 2, 0$, pak

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

2.3. Transformace dvojného integrálu

Výpočet dvojného integrálu pomocí transformace do polárních souřadnic spočívá v tom, že změníme souřadnicový systém a tím převedeme výpočet jistého dvojného integrálu na jiný dvojný integrál. Dojde přitom jak ke změně integračního oboru, tak ke změně integrandu.

Jde o jistou analogii substituční metody pro jednoduchý určitý integrál. Zde nám však šlo především o to, abychom substitucí zjednodušili integrand. Integrační obor se změnil z jistého intervalu na jiný interval, což pro nás nebylo podstatné.

U dvojného integrálu nám však půjde především o změnu integračního oboru tak, abychom mohli využít Fubiniovu větu. Přitom dojde samozřejmě i ke změně integrandu, tato změna však pro nás nebude důležitá.

Mějme množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ a zobrazení $F \quad A \to B$ takové, že $F u, v = x, y \in F(A) \subseteq B$ pro každé $u, v \in A$. Pak existují funkce $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ tak, že každý bod $u, v \in A$ se zobrazí na bod $g(u, v), h(u, v) = x, y$. A naopak, jsou-li na množině A definovány reálné funkce $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, je jimi určeno zobrazení $A \to \mathbb{R}^2$.

Je-li F spojitě diferencovatelné zobrazení, pak se determinant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{vmatrix}$$

nazývá jakobián zobrazení F. Připomeňme, že zobrazení F se nazývá regulární právě tehdy, když je jakobián různý od nuly.

Uveďme nyní větu o transfomaci dvojného integrálu, kterou budeme používat při řešení konkrétních úloh.

Věta 2.2. Buď $M_1 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^2$, kde M_1 je otevřená množina, M je měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_2(M \setminus M_1) = 0$.

Nechť F je spojitě diferencovatelné zobrazení M do $\mathbb{R}^2$, které je regulární a prosté v M_1. Označme $\Omega = F(M)$, $\Omega_1 = F(M_1)$. Nechť je množina Ω měřitelná a platí $\mathrm{m}_2(\Omega \setminus \Omega_1) = 0$.

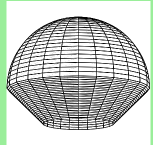
Buď funkce f ohraničená na množině Ω a spojitá na Ω_1. Dále nechť je funkce $f\left[g(u,v), h(u,v)\right] |J(u,v)|$ ohraničená na množině M. Pak platí

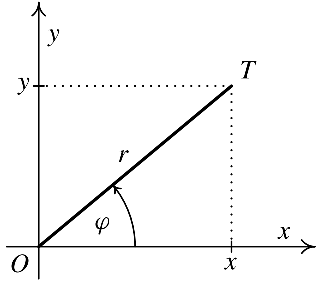
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{M} f\left[g(u,v), h(u,v)\right] |J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{2.3}$$

S využitím předchozí věty lze provádět různé transformace souřadnic, my si zde uvedeme nejčastější transformaci, a to do polárních souřadnic.

Transformace do polárních souřadnic

Uvažujme bod T v rovině s kartézskými souřadnicemi x, y. Označme r vzdálenost bodu T od počátku O kartézské soustavy souřadnic a φ úhel, který svírá polopřímka OT s kladnou částí osy x.





Z definicí funkcí sinus a kosinus vyplývá, že vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a polárními souřadnicemi r, φ je dán rovnicemi:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi,\\
y &= r\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Přitom $r \geq 0$ a φ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ nebo z jiného intervalu délky 2π.

Zobrazení F dané těmito rovnicemi přiřazuje polárním souřadnicím daného bodu kartézské souřadnice téhož bodu, tj. $F r, \varphi = x, y$. Spočtěme si jakobián této transformace:

$$
J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r
$$

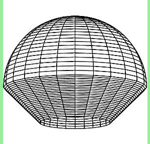
$$
|J| = r
$$

Typové řešené příklady:

- Vypočítejte dvojný integrál $\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (po transformaci dostaneme konstantní meze). Příklad 2.6

- Vypočítejte dvojný integrál $\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (po transformaci dostaneme nekonstantní meze). Příklad 2.7

- Vypočítejte objem tělesa. Příklad 2.8



Titulní strana

Obsah

Strana 37 z 171

Zpět

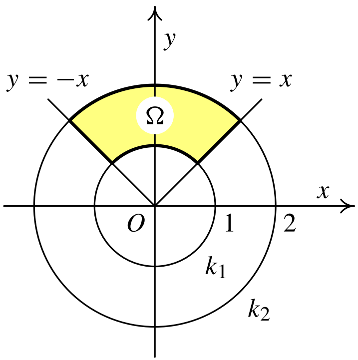
Vpřed

Zavřít

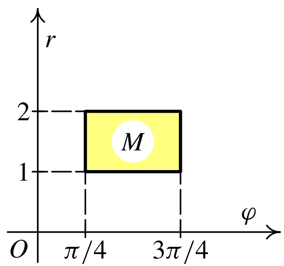
Konec

Příklad 2.6. Vypočtěte $\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina Ω je určena podmínkami $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $y \ge |x|$.

Řešení: Rovnice $x^2+y^2=1$ a $x^2+y^2=4$ určují kružnice k_1 a k_2 se středy v počátku O a poloměry 1 a 2. První podmínka tedy zadává mezikruží. Graf funkce $y=|x|$ je tvořen dvěma polopřímkami (osami prvního a druhého kvadrantu) o rovnicích $y=x$ a $y=-x$. Body splňující nerovnost $y \ge |x|$ leží nad tímto grafem. Dohromady tudíž obě podmínky zadávají množinu Ω – viz obrázek 2.5.



obr. 2.5



obr. 2.6

Určíme, jak bude tato množina popsána v polárních souřadnicích. Polopřímky vycházející z počátku O, které protínají množinu Ω, musí svírat s kladnou částí osy x úhel v rozmezí $\pi/4$ ($y = x$ je osa prvního kvadrantu) až $3\pi/4$ ($y = -x$ je osa druhého kvadrantu). Tedy $\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4$.

Libovolná taková polopřímka protíná množinu Ω v úsečce, jejíž koncové body mají od počátku O stále stejné vzdálenosti, a to 1 a 2. Tedy $1 \le r \le 2$. To znamená, že transformací do polárních souřadnic přejde množina Ω v obdélník M – viz obrázek 2.6.

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M} \big((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\big) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \iint_{M} r^3(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \iint_{M} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{15}{4}\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{4}[\varphi]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{15}{4}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{15\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

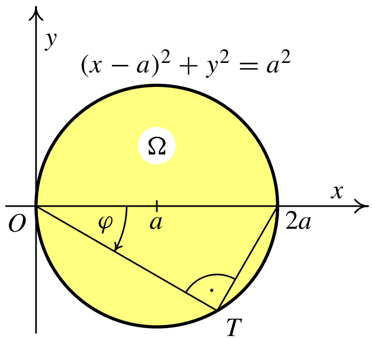
Na výpočet transformovaného integrálu jsme použili Fubiniovu větu.

Příklad 2.7. Vypočtěte $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina Ω je určena podmínkou $x^2 + y^2 - 2ax \le 0$, $a > 0$.

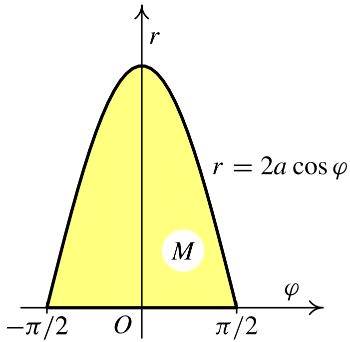
Řešení: Rovnice $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ zadává nějakou kuželosečku. Doplněním na čtverec určíme, o jakou kuželosečku jde:

$$x^2 + y^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Jde o kružnici se středem v bodě $a, 0$ a poloměrem a. Integračním oborem Ω je tedy kruh – viz obr. 2.7, proto použijeme transformaci do polárních souřadnic. Vzhledem k poloze množiny Ω (leží v prvním a čtvrtém kvadrantu) bude výhodnější volit rozmezí úhlů z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$. Polopřímky vycházející z počátku O, které protínají množinu Ω i v jiných bodech než v počátku O, svírají potom s kladnou částí osy x úhly z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Protože s uzavřenými množinami se nám lépe pracuje, zahrneme i koncové body, takže budeme mít $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

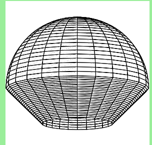


obr. 2.7



obr. 2.8

Nyní určíme omezení pro r. Z obrázku je zřejmé, že délky úseček $|\overline{OT}|$, které jsou průnikem uvažovaných polopřímek s množinou Ω, se budou měnit a budou záviset na úhlu φ. Dosazením polárních souřadnic do rovnice kružnice



obdržíme:

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 - 2ar\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r - 2a\cos\varphi) = 0.$$

Hodnotě $r = 0$ odpovídá počátek O, pro druhý průsečík polopřímky s kružnicí platí $r = 2a\cos\varphi$. (Tento výsledek lze snadno zdůvodnit i geometricky. V trojúhelníku s vrcholy O, $2a, 0$ a T je podle Thaletovy věty u vrcholu T pravý úhel. Z definice kosinu vyplývá, že $r = \left|\overline{OT}\right| = 2a\cos\varphi$.) Celkově tedy dostáváme, že

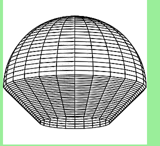
$$M \quad \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 2a\cos\varphi. \end{array}$$

Množina M je tudíž elementární vzhledem k φ.

Použitím vztahu (2.3) dostaneme:

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \iint_M r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi} r^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3}a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{c} \sin\varphi = t \\ \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t \\ -\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow -1,\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \frac{8}{3}a^3\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}a^3\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{9}a^3. \end{aligned}$$

Na výpočet transformovaného integrálu jsme použili Fubiniovu větu, vzniklý jednoduchý integrál jsme pak řešili substituční metodou.



Příklad 2.8. Vypočítejte objem tělesa S ležícího pod rovinou $z = y$ a nad množinou Ω:

$$\Omega = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\; x^2 - 2x + y^2 \geq 0 \wedge x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \wedge y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x \wedge y \leq x\right\}.$$

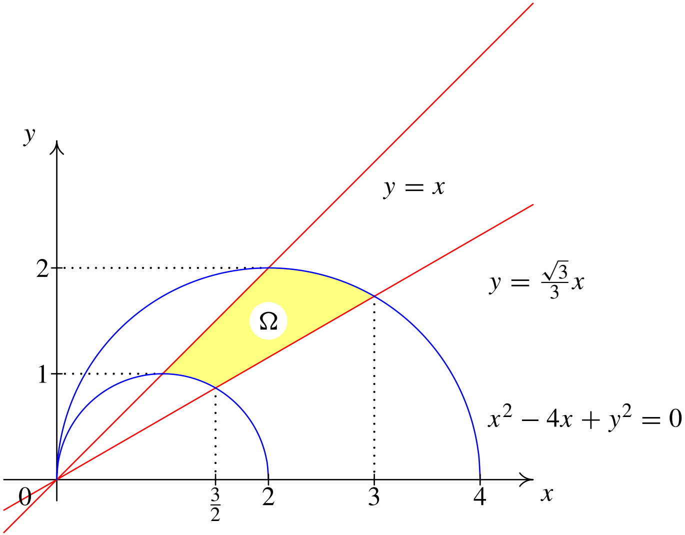
Řešení: Pro objem $\mathrm{m}_3(S)$ tělesa S platí

$$\mathrm{m}_3(S) = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde Ω představuje „podstavu tělesa S“ a funkce $f(x, y)$ ohraničuje těleso S shora.

Ohraničující funkcí je rovina $z = y$, tj. $f(x, y) = y$. Podívejme se podrobněji na množinu Ω. Hraniční křivky množiny Ω jsou následující:

- $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Po úpravě na tvar $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ vidíme, že se jedná o kružnici se středem v bodě $1, 0$ a poloměrem 1.
- $x^2 - 4x + y^2 = 0$. Po úpravě na tvar $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ vidíme, že se jedná o kružnici se středem v bodě $2, 0$ a poloměrem 2.
- $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ je přímka.
- $y = x$ je také přímka.



obr. 2.9

Uvedené křivky ohraničují množinu Ω – viz obrázek 2.9. Celé těleso je znázorněno na obrázku 2.10.

Vzhledem ke tvaru množiny Ω je vhodné provést transformaci do polárních souřadnic. Polopřímky vycházející z počátku O, které protínají množinu Ω, musí svírat s kladnou částí osy x úhel v rozmezí $\pi/6$ až $\pi/4$. Tedy $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4$. Ukážeme si nyní, jak lze tyto hodnoty dostat dosazením polárních souřadnic do p28.u3d

obr. 2.10

rovnic přímek:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad \Rightarrow \quad r \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} r \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Titulní strana
Obsah
Strana 44 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

$$y = x \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi = r\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Nyní určíme omezení pro r. Z obrázku je zřejmé, že r bude záviset na φ. Dosazením polárních souřadnic do rovnic kružnic dostáváme:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r - 2\cos\varphi) = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 4r\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r - 4\cos\varphi) = 0.$$

Řešení $r = 0$ předchozích rovnic neodpovídá zadané množině, proto ho neuvažujeme. Pro průsečík libovolné polopřímky vycházející z počátku s menší kružnicí platí $r = 2\cos\varphi$ a pro průsečík této polopřímky s větší kružnicí platí $r = 4\cos\varphi$. Integrační meze transformované množiny jsou tedy následující:

$$\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4},$$
$$2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi.$$

$$\iint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left(\frac{64}{3}\cos^3\varphi - \frac{8}{3}\cos^3\varphi \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{56}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \cos\varphi = t \\ -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t \\ \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = -\frac{56}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^3\,\mathrm{d}t = \frac{56}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^3\,\mathrm{d}t =$$

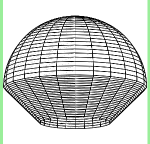
$$= \frac{14}{3} \left[t^4 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{35}{24}.$$

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

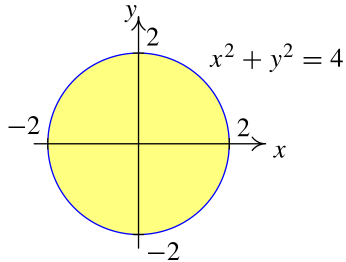
Zacatek testu **Dvojný integrál – transformace do polárních souřadnic**

1. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do polárních souřadnic při použití r, φ je:

☐ $r\cos\varphi$ ☐ r ☐ r^2 ☐ $r\sin\varphi$



2. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; x^2+y^2 \le 4\}$.



☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2} r^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

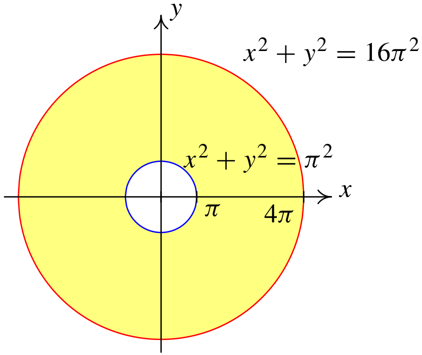
☐ $\displaystyle\int_0^{2}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{2} r^2\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{4} \sqrt{r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

Titulní strana
Obsah
Strana 47 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

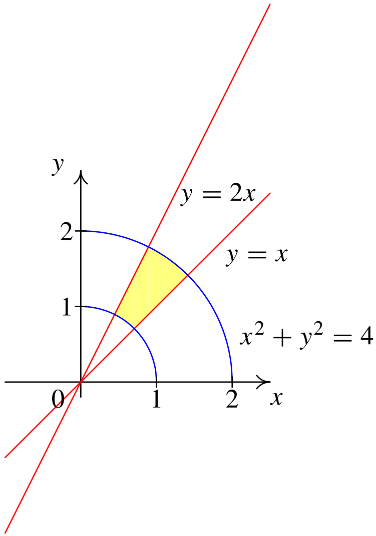
3. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \pi^2 \le x^2+y^2 \le (4\pi)^2\}$.



- [ ] $\int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} \sin r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- [ ] $\int_0^{4\pi} r^2 \left(\int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$
- [ ] $\int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi}^{4\pi} r \sin r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- [ ] $\int_{\pi}^{4\pi} \left(\int_{\pi}^{4\pi} r \sin\sqrt{r^2} \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

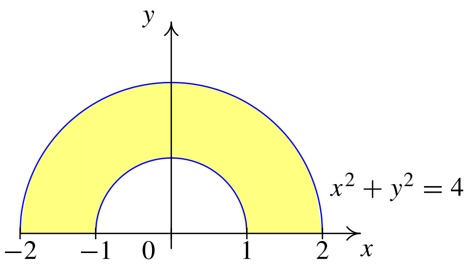
Titulní strana
Obsah
Strana 48 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

4. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \;\wedge\; x \le y \le 2x\}$.



- [ ] $\int_1^4 \left(\int_{\pi/4}^{2\pi} r^3 \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$
- [ ] $\int_1^4 \left(\int_{\pi/4}^{2\pi} r^2 \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- [ ] $\int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} r^2 \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$
- [ ] $\int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} r^3 \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$

5. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_{\Omega} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \ \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \ \wedge y \geq 0\}$.



☐ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\ln r^2}{r^2}\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_1^{2} \frac{\ln r^2}{r^2} r\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$

☐ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\pi} \frac{\ln r^2}{r^2} r\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_1^{2} \frac{\ln r^2}{r^2}\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$

Titulní strana
Obsah
Strana 50 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

6. (3b.) Transformujte integrál $\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω $x^2 + y^2 \le 2$, $y \ge x$ do polárních souřadnic.

- [ ] $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r f(r \sin\varphi, \cos\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

- [ ] $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r f(r \sin\varphi, \cos\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

- [ ] $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

- [ ] $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

7. (4b.) Nechť $\Omega = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \;\; x^2 + y^2 \le 1 \wedge x + y \ge 1\right\}$. Transformujte integrál $\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic.

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{1} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^{\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{1} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$

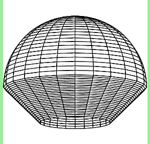
8. (4b.) Nechť $\Omega = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \;\; x^2 + y^2 \le 1 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\right\}$. Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte integrál:

$\displaystyle\iint_\Omega (x + y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ______

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

______

Konec testu



Titulní strana

Obsah

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Zpět

Vpřed

Zavřít

Konec

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Kapitola 3

Trojný integrál

Rozcestník kapitoly:

Množiny bodů v prostoru

Typové řešené příklady   Test

Transformace trojného integrálu

Typové řešené příklady   Test

3.1. Množiny bodů v prostoru

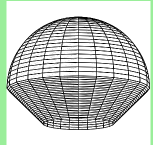
Při výpočtech trojných integrálů pracujeme s množinami v trojrozměrném prostoru. Integračními obory jsou množiny bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. Doporučujeme proto čtenáři, aby si zopakoval rovnice základních kvadrik (koule, elipsoid, jednodílný a dvojdílný hypeboloid, kužel, eliptický a hyperbolický paraboloid) a kvadratických válců (rotační válec, eliptický válec, parabolický válec a hyperbolický válec).

Vzhledem k tomu, že rozpoznání ploch, které ohraničují integrační obor, je pro úspěšné zvládnutí trojného integrálu nezbytné, zařazujeme na začátek test, kde si své znalosti ověříte.

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

Zacatek testu **Množiny bodů v prostoru**

1. (2b.) K množině zobrazené na obrázku přiřaďte odpovídající rovnici. Přitom $a, b, c, p, q > 0$

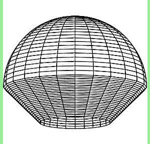


☐ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

☐ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

☐ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

☐ $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$



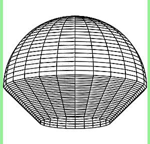
2. (2b.)

(a) (b)

(c) (d)

Kvadrika s rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r > 0$ je na obrázku

- [ ] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)
- [ ] (d)



3. (2b.)

(a) (b)

(c) (d)

Kvadrika s rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, kde $a, b, c > 0$, je na obrázku

☐ (a) ☐ (b)

☐ (c) ☐ (d)

4. (2b.)

(a) (b)

(c) (d)

Kvadrika s rovnicí $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$, kde $p, q > 0$, je na obrázku

- ☐ (a)
- ☐ (b)
- ☐ (c)
- ☐ (d)

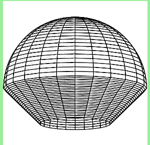
5. (2b.) K množině na obrázku přiřaďte odpovídající rovnici. Přitom $a, b, c, p, q > 0$

☐ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

☐ $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$

☐ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

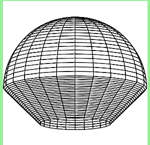
☐ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



6. (2b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku, je li $z \geq 0$

test2.u3d

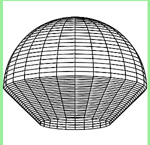
- [ ] $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = -9$
- [ ] $2y^2 + 2z^2 - x^2 = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = -9$
- [ ] $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- [ ] $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = 1$



7. (2b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

test5.u3d

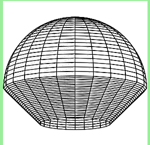
- [ ] $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 3 - y$
- [ ] $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 3 - y$
- [ ] $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 3 - x$
- [ ] $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z = 0,\ z = 3 - x$



8. (2b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test6.u3d

- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 - y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 - z^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$



9. (2b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test9.u3d

- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, y^2 + 2 \leq z \leq 1 - x^2\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 + x^2 \leq z \leq x^2 + y^2\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 - x^2 \leq z \leq x^2 + y^2\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 - x^2 \leq z \leq y^2 + 2\}$

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

3.2. Trojný integrál

Trojný integrál přiřazuje omezené funkci tří proměnných definované na nějaké měřitelné množině M v trojrozměrném prostoru číslo, které může mít v závislosti na konkrétním tvaru integrandu následující geometrický význam:

$\iiint_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ představuje míru $\mathrm{m}_4(S)$ množiny S, která je shora ohraničena nezápornou funkcí $f(x, y, z)$ a zdola funkcí nulovou $g(x, y, z) = 0$. Obě funkce uvažujeme na množině M, tj. $D(f) = D(g) = M$.

$\iiint_M (f(x, y, z) - g(x, y, z))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ pro $x, y, z \in M$, představuje míru $\mathrm{m}_4(S)$ množiny S, která je shora ohraničena funkcí $f(x, y, z)$ a zdola funkcí $g(x, y, z)$. Obě funkce opět uvažujeme na množině M, tj. $D(f) = D(g) = M$.

$\iiint_M 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ představuje míru $\mathrm{m}_4(S)$ množiny S, která je shora ohraničena konstantní funkcí $f(x, y, z) = 1$ a zdola funkcí nulovou $g(x, y, z) = 0$. Obě funkce uvažujeme na množině M, tj. $D(f) = D(g) = M$. Vzhledem k tomu, že je míra $\mathrm{m}_4(S)$ rovna součinu míry podstavy (množiny A) a výšky, platí

$$\iiint\limits_M 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{m}_3(M). \tag{3.1}$$

Tento vztah říká, že číselně je míra $\mathrm{m}_4(S)$ množiny s podstavou M a výškou rovnou jedné rovna **objemu množiny** M.

3.3. Trojný integrál – Fubiniova věta

Fubiniova věta nám dává návod, jak převést trojný integrál na trojnásobný. Převádíme tak výpočet trojného integrálu na výpočet tří po sobě jdoucích jednorozměrných integrálů.

Věta 3.1. (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^3$) Nechť je funkce f tří proměnných x, y, z spojitá na množině

$$M = \left\{ \left[x, y, z\right] \in \mathbb{R}^3 \quad x, y \in A;\ u(x, y) \le z \le v(x, y) \right\},$$

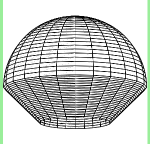
kde u, v jsou funkce spojité na množině A takové, že $u(x, y) \le v(x, y)$ pro každé $\left[x, y\right] \in A$. Dále nechť

$$A = \left\{ \left[x, y\right] \in \mathbb{R}^2 \quad a \le x \le b;\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\},$$

kde kde φ, ψ jsou funkce spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $\varphi(x) \le \psi(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\iiint\limits_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

V předchozí větě je množina A elementární množinou vzhledem k x. Jednoduše lze přeformulovat Fubiniovu větu pro případ, kdy bude množina A elementární oblastí vzhledem k y.



Bude-li integračním oborem množina M uvedená výše, budeme mluvit o elementární oblasti vzhledem k xy. A to i v případě, že množina A je elementární množinou vzhledem k y.

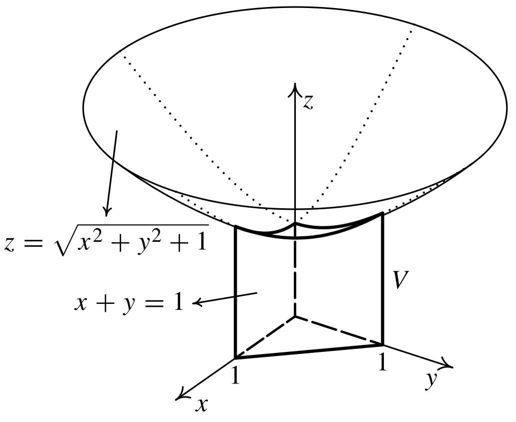
Analogicky lze Fubiniovu větu použít v případě elementárních oblastí vzhledem k xz nebo yz.

Typové řešené příklady:

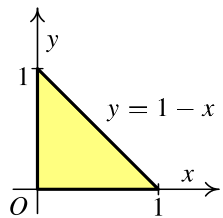
- Vypočítejte trojný integrál $\iiint\limits_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Příklad 3.1
- Vypočítejte objem tělesa. Příklad 3.2, 3.3

Příklad 3.1. Vypočtěte $\iiint_V 2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina V je omezena plochami $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x + y = 1$, přičemž $x, y, z \geq 0$.

Řešení: První plochou je dvojdílný rotační hyperboloid s osou rotace v ose z. Druhou plochou je rovina, která je rovnoběžná s osou z. Podmínky $x, y, z \geq 0$ znamenají, že se máme omezit jen na první oktant. Z hyperboloidu nás tedy bude zajímat jen jeho horní část. Integrační obor V vidíme na obrázku 3.1 a jeho průmět do roviny xy na obrázku 3.2.

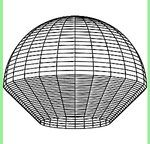


obr. 3.1



obr. 3.2

Titulní strana
Obsah
Strana 70 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec



Integrační obor V je elementární množina vzhledem k xy. Z rovnice hyperboloidu určíme, že $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Množinu V popíšeme následovně:

$$V \quad \begin{aligned} &0 \le x \le 1, \\ &0 \le y \le 1 - x, \\ &0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Na výpočet integrálu použijeme Fubiniovu větu.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V 2z \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} 2z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[z^2 \right]_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + 1) \, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 + 1 - x \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{4}{3} x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{4}{3} \right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - x^2 + \frac{4}{3} x \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 3.2. Vypočítejte objem tělesa A ohraničeného plochami

$$z = 4 - y^2, \; z = 2 + y^2, \; x = -1, \; x = 2.$$

Řešení: Pro objem $m_3(A)$ tělesa A platí

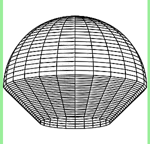
$$m_3(A) = \iiint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Nejprve určíme mezní plochy, které ohraničují integrační obor A:

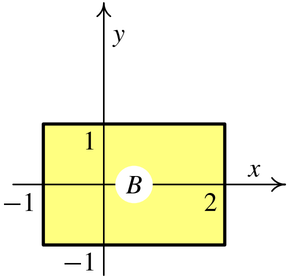
- $z = 4 - y^2$ (parabolická válcová plocha).
- $z = 2 + y^2$ (parabolická válcová plocha).
- $x = -1$ (rovina).
- $x = 2$ (rovina).

Průmětem tělesa A do roviny xy je obdélník B ohraničený přímkami $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$ a $y = 1$. Meze pro x jsou přímo zadány. Meze pro y získáme jako průsečíky parabolických ploch, tj. jako řešení rovnice $4 - y^2 = 2 + y^2$. Odtud $2y^2 = 2$ a tedy $y_1 = -1$, $y_2 = 1$. Integrační obor A vidíme na obrázku 3.3 a jeho průmět do roviny xy na obrázku 3.4.
Integrační meze tedy jsou:

$$\begin{aligned} -1 \le x &\le 2, \\ -1 \le y &\le 1, \\ y^2 + 2 \le z &\le 4 - y^2. \end{aligned}$$



o1.u3d



obr. 3.3

obr. 3.4

$$
\mathrm{m}_3(A) = \iiint\limits_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{2}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{y^2+2}^{4-y^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2}\left\{\int\limits_{-1}^{1} z_{y^2+2}^{4-y^2}\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x =
$$

$$
= 2\int\limits_{-1}^{2}\left\{\int\limits_{-1}^{1}(1-y^2)\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^{2}\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^{2}\frac{4}{3}\,\mathrm{d}x =
$$

$$
= \frac{8}{3}\,[x]_{-1}^{2} = 8.
$$

Příklad 3.3. Vypočítejte objem tělesa A ohraničeného plochami

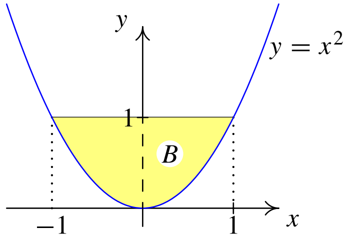
$$y = x^2,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ y = 1.$$

Řešení: Nejprve určíme mezní plochy, které ohraničují integrační obor A:

- $z = x^2 + y^2$ (rotační paraboloid).
- $y = x^2$ (parabolická válcová plocha).
- $z = 0$ (rovina).
- $y = 1$ (rovina).

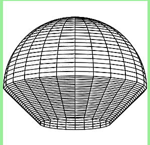
o2.u3d

obr. 3.5



obr. 3.6

Průmětem tělesa A do roviny xy je množina B ohraničená parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 1$ – viz obr. 3.6. Vidíme, že těleso A je souměrné podle roviny



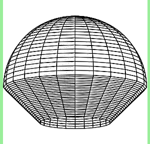
$x = 0$. Výpočet tedy provedeme pouze pro první oktant a výsledek vynásobíme dvěma. Dostáváme následující integrační meze:

$$\begin{aligned} 0 \le x &\le 1, \\ x^2 \le y &\le 1, \\ 0 \le z &\le x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_3(A) &= 2 \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 \left(x^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\ &= 2 \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^1 \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) \mathrm{d}x = \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right]_0^1 = \frac{88}{105}. \end{aligned}$$

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

Zacatek testu **Trojný integrál — Fubiniova věta**



1. (2b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li:
$A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; x + y + z \leq 5\}$

t1.u3d

- [ ] $\int_0^5 \left(\int_0^{5-x} \left(\int_0^{5-x-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$
- [ ] $\int_0^5 \left(\int_0^5 \left(\int_0^5 f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- [ ] $\int_0^5 \left(\int_0^{5-x} \left(\int_0^{5-x-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- [ ] $\int_0^5 \left(\int_0^5 \left(\int_0^{5-x-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$

2. (2b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li:
$A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$

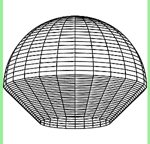
t2.u3d

☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$

☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$



3. (2b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f\,(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li:
$A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; 2x + y \leq 4,\; z \leq 4 - x^2\}$

t3.u3d

- [ ] $\int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{4-x^2} f\,(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$
- [ ] $\int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} \left(\int_0^{4-x^2} f\,(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- [ ] $\int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{4-x^2} f\,(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- [ ] $\int_0^2 \left(\int_0^{4} \left(\int_0^{4-x^2} f\,(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

4. (2b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li:

$A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; x + y \leq 1,\; z \leq xy\}$

t4.u3d

- ☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{xy} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{x} \left(\int_0^{xy} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{xy} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$
- ☐ $\int_0^{xy} \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$

Titulní strana
Obsah
Strana 79 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

5. (2b.) Vypočtěte $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$ ______

6. (3b.) Je-li $\Omega \;\; 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3,\ 1 \le z \le 2$, pak

$$\iiint\limits_{\Omega} x y^2 z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$ ______

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

______

Konec testu

Správně zodpovězené otázky: ______

Získané body: ______

Procento úspěšnosti: ______

Výsledky

3.4. Transformace trojného integrálu

Transformace trojného integrálu je velmi podobná transformaci dvojného integrálu. Rozdíl je pouze v prostoru, v němž transformace probíhají.

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená množina. Buďte $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$, $z = k(u, v, w)$ funkce definované na A, které zde mají spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť F je zobrazení, které každému bodu $u, v, w \in A$ přiřadí bod $g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w \in F(A)$.

Je-li F spojitě diferencovatelné zobrazení, pak se determinant

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} g_u(u, v, w) & g_v(u, v, w) & g_w(u, v, w) \\ h_u(u, v, w) & h_v(u, v, w) & h_w(u, v, w) \\ k_u(u, v, w) & k_v(u, v, w) & k_w(u, v, w) \end{vmatrix}$$

nazývá jakobián zobrazení F. Připomeňme, že zobrazení F se nazývá regulární právě tehdy, když je jakobián různý od nuly.

Uveďme nyní větu o transformaci trojného integrálu, kterou budeme používat při řešení konkrétních úloh.

Věta 3.2. Buď $M_1 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3$, kde M_1 je otevřená množina, M je měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_3(M \smallsetminus M_1) = 0$.

Nechť F je spojitě diferencovatelné zobrazení M do $\mathbb{R}^3$, které je regulární a prosté v M_1. Označme $\Omega = F(M)$, $\Omega_1 = F(M_1)$. Dále nechť je množina Ω měřitelná a platí $\mathrm{m}_3(\Omega \smallsetminus \Omega_1) = 0$.

Nechť je funkce f ohraničená na množině Ω a spojitá na Ω_1. Dále nechť je funkce $f\left[g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)\right] |J(u, v, w)|$ ohraničená na množině M. Pak platí

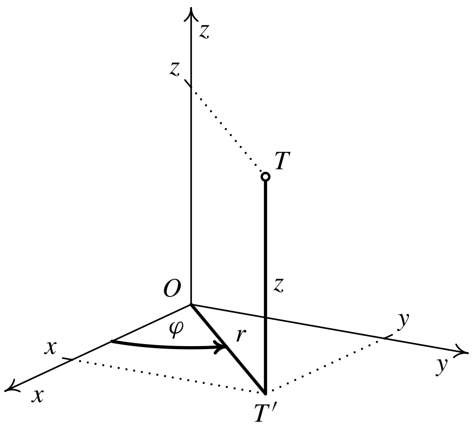
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{M} f\left[g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)\right] |J(u, v, w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \tag{3.3}$$

Titulní strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Transformace do válcových souřadnic

Uvažujme bod T v prostoru s kartézskými souřadnicemi x, y, z a jeho kolmý průmět T' do roviny xy s kartézskými souřadnicemi $x, y, 0$. Jak již víme, v rovině lze provést transformaci kartézských souřadnic x, y bodu T' do polárních souřadnic r, φ. Nyní využijeme tohoto vyjádření prvních dvou souřadnic bodu T v polárních souřadnicích k zavedení nové transformace kartézských souřadnic x, y, z bodu T do tzv. válcových (cylindrických) souřadnic r, φ, z.



Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y, z bodu T a válcovými souřadnicemi r, φ, z je dán rovnicemi:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi,\\
y &= r\sin\varphi,\\
z &= z.
\end{aligned}
$$

Přitom $r \geq 0$ a φ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi)$ nebo z jiného intervalu délky 2π. Spočtěme jakobián uvedené transformace.

$$
J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial z}(r\cos\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial z}(r\sin\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}z & \frac{\partial}{\partial \varphi}z & \frac{\partial}{\partial z}z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r
$$

$$
|J| = r
$$

Vzhledem k tomu, že z-ová souřadnice zůstává po transformaci stále stejná, posuzujeme vhodnost použití této transformace pouze podle tvaru množiny, která je průmětem integračního oboru Ω do roviny xy. Jinými slovy, množina Ω musí být elementární oblastí vzhledem k xy tvaru

$$
\Omega = \left\{ x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x, y \in A,\; g(x, y) \leq z \; \leq f(x, y) \right\},
$$

kde A je množina vhodná pro transformaci do polárních souřadnic.

Typové řešené příklady:

- Vypočítejte objem tělesa. Příklad 3.4
- Vypočítejte míru množiny. Příklad 3.5

Příklad 3.4. Vypočítejte objem tělesa Ω. Přitom

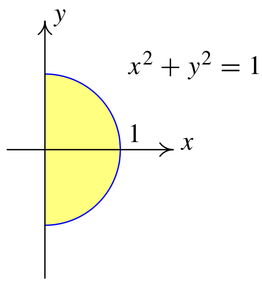
$$\Omega = \left\{ \left[x, y, z\right] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq x \right\}.$$

Řešení: Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určuje kruhovou válcovou plochu. Rovnice $z = 0$, $z = x$ jsou roviny, které z válcové plochy vytnou množinu Ω — viz obr. 3.7. Použijeme transformaci do válcových souřadnic.

- Určíme průmět prostorové množiny Ω do roviny xy. Průmětem je množina A — viz obr. 3.8.

o4.u3d

obr. 3.7 Množina Ω



obr. 3.8 Množina A

- Popíšeme množinu A v polárních souřadnicích:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\\
0 \le r \le 1.
\end{aligned}
$$

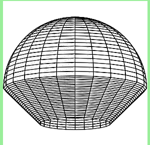
- Určíme omezení pro z. Dosadíme tedy transformační rovnice do rovnic zadaných ploch, které množinu Ω ohraničují shora a zdola.

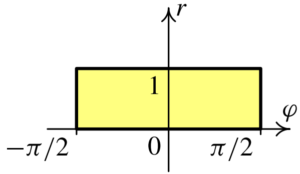
$$
\begin{array}{llll}
\text{shora} & z = x & \Rightarrow & z = r\cos\varphi,\\
\text{zdola} & z = 0 & \Rightarrow & z = 0.
\end{array}
$$

  Celkem tedy $0 \le z \le r\cos\varphi$.

- Transformací do válcových souřadnic přejde množina Ω v množinu M — viz obr. 3.9. Na obrázku je osa φ označena písmenem p. Množinu M popíšeme takto:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\\
0 \le r \le 1,\\
0 \le z \le r\cos\varphi.
\end{aligned}
$$





obr. 3.9 Množina M

obr. 3.10 Průmět M do roviny φr

$$
\mathrm{m}_3(\Omega) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{0}^{r\cos\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} r\, [z]_0^{r\cos\varphi} \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =
$$

$$
= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi =
$$

$$
= \frac{1}{3} \left[\sin\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}(1 - (-1)) = \frac{2}{3}.
$$

Příklad 3.5. Vypočítejte míru množiny Ω, kde

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 - 3z^2 \le 0 \wedge z \le 2 - x^2 - y^2 \right\}.$$

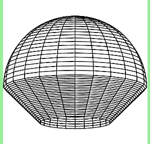
Řešení: Rovnice $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ určuje kužel s osou v souřadnicové ose z a vrcholem v počátku. Rovnici $z = 2 - x^2 - y^2$ upravíme na $z = -(x^2 + y^2) + 2$. Vidíme, že se jedná o rotační paraboloid s osou v souřadnicové ose z otočený dolů a posunutý o 2 nahoru.

Těleso Ω je tedy shora ohraničeno rotačním paraboloidem a zdola kuželem — viz obr. 3.11. Použijeme transformaci do válcových souřadnic.

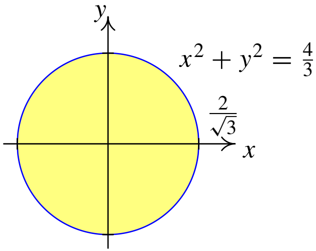
- Určíme průmět prostorové množiny Ω do roviny xy. K určení průmětu do roviny xy potřebujeme znát křivku, v níž se kužel a paraboloid protínají. Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 3z^2 &= 0 \\ -(x^2 + y^2) + 2 - z &= 0. \end{aligned}$$

  Sečtením získáme $-3z^2 - z + 2 = 0$. Tato rovnice má dvě řešení $z_1 = -1$, $z_2 = 2/3$. Vzhledem ke tvaru tělesa Ω vyhovuje pouze řešení $z_2 = 2/3$. Dosazením do některé z rovnic dostáváme $x^2 + y^2 = 4/3$. Kužel a paraboloid se tedy protínají v kružnici se středem v bodě $0, 0, 2/3$ a poloměrem $2/\sqrt{3}$ ležící v rovině rovnoběžné s rovinou xy. Průmětem tělesa Ω do roviny xy je tedy kruh A — viz obr. 3.12.



o5.u3d



obr. 3.11 Množina Ω

obr. 3.12 Množina A

- Popíšeme množinu A v polárních souřadnicích:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$
$$0 \leq r \leq 2/\sqrt{3}.$$

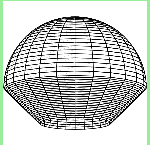
- Určíme omezení pro z. Dosadíme tedy transformační rovnice do rovnic zadaných ploch, které množinu Ω ohraničují shora a zdola.

shora $\quad z = 2 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad z = 2 - (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \quad \Rightarrow \quad z = 2 - r^2,$

zdola $\quad x^2 + y^2 - 3z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi - 3z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{r}{\sqrt{3}}.$

Vyhovuje pouze $\quad z = \frac{r}{\sqrt{3}}.$

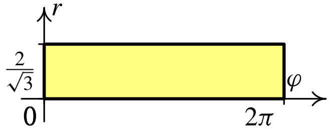
Celkem tedy $\frac{r}{\sqrt{3}} \leq z \leq 2 - r^2.$



- Transformací do válcových souřadnic přejde množina Ω v množinu M — viz obr. 3.13, kterou popíšeme takto:

$$\begin{aligned} 0 \le \varphi &\le 2\pi, \\ 0 \le r &\le 2/\sqrt{3}, \\ r/\sqrt{3} \le z &\le 2 - r^2. \end{aligned}$$

obr. 3.13 Množina M

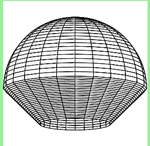


obr. 3.14 Průmět M do roviny φr

$$m_3(\Omega) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2-r^2} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r z_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(2r - r^3 - \frac{r^2}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3\sqrt{3}}\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{36}{27} - \frac{12}{27} - \frac{8}{27}\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{16}{27}\mathrm{d}\varphi = \frac{16}{27}\,[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{32}{27}\pi.$$



U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

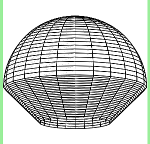
Zacatek testu **Trojný integrál – transformace do válcových souřadnic**

1. (2b.) Vztah mezi kartézskými a válcovými souřadnicemi při použití r, φ, z je dán rovnicemi:

- ☐ $x = r\sin\varphi,\ y = r\cos\varphi,\ z = \varphi$
- ☐ $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = \varphi$
- ☐ $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
- ☐ $x = r\sin\varphi,\ y = r\cos\varphi,\ z = z$

2. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do válcových souřadnic při použití r, φ, z je:

- ☐ r^2
- ☐ r
- ☐ $r\sin\vartheta$
- ☐ $r\cos\vartheta$



3. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\right\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

test6.u3d

☐ $\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{1}\left(\int\limits_0^{2} r \,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{3}\left(\int\limits_0^{2} r \,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\int\limits_0^{3}\left(\int\limits_0^{3}\left(\int\limits_0^{2} r \,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\int\limits_0^{3}\left(\int\limits_0^{2}\left(\int\limits_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r$

4. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 3, x \le 0, y \ge 0\right\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

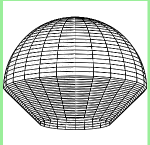
test8.u3d

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^2\left(\int_0^3 r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^3\left(\int_1^4 r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{4}\left(\int_0^3\left(\int_0^\pi r\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r$

☐ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_1^2\left(\int_0^3 r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$



Titulní strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 93 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

5. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 3 - y\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

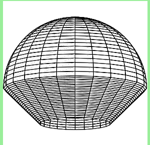
test5.u3d

☐ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3-y} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

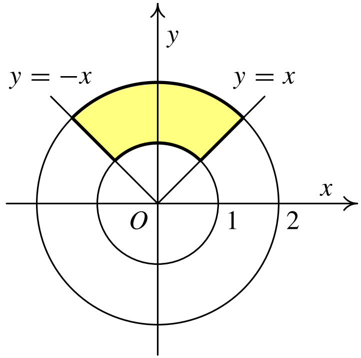
☐ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3-y} r^2 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{2} \left(\int_0^{3-r\sin\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{3-r\sin\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$



6. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4, y \geq |x|\right\}$. Průmět množiny A do roviny xy je zobrazen na obrázku.

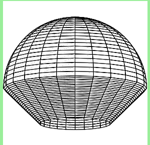


☐ $$\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^2 r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z$$

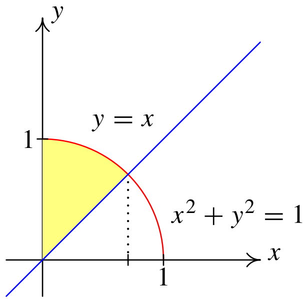
☐ $$\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_0^4 r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$$

☐ $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_1^2 \left(\int_0^4 r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$$

☐ $$\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z$$



7. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad x^2 + y^2 \le 1, 1 \le z \le 3, y \ge x, x \ge 0\right\}$. Průmět množiny A do roviny xy je zobrazen na obrázku.

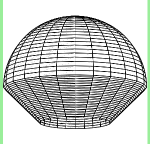


☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^3 \left(\int_0^1 r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^1 r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^3 r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z$



8. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 - y \leq 0, x^2 + y^2 \geq z \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

test10.u3d

☐ $\displaystyle\int_0^{x^2+y^2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sin\varphi} \left(\int_0^{r^2} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{r^2} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{r} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z$

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

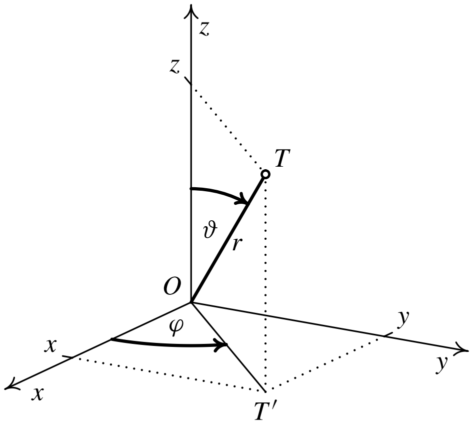
Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Transformace do sférických souřadnic

Uvažujme bod T v prostoru s kartézskými souřadnicemi x, y, z a jeho kolmý průmět T' do roviny xy s kartézskými souřadnicemi $x, y, 0$. Označme r vzdálenost bodu T od počátku O kartézské soustavy souřadnic a φ úhel, který svírá polopřímka OT' s kladnou částí osy x. Dále označme ϑ úhel, který svírá polopřímka OT s kladnou částí osy z. Polohu bodu T v prostoru pak určíme trojicí čísel r, φ, ϑ, kterou nazveme sférické souřadnice bodu T.



Z obrázku vidíme, že pro první dvě souřadnice bodu T platí $x = |OT'|\cos\varphi$, $y = |OT'|\sin\varphi$. Z pravoúhlého trojúhelníku $OT'T$ dostaneme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{z}{r} \quad\Rightarrow\quad \cos\vartheta = \frac{z}{r} \quad\Rightarrow\quad z = r\cos\vartheta.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{|OT'|}{r} \quad\Rightarrow\quad \sin\vartheta = \frac{|OT'|}{r} \quad\Rightarrow\quad |OT'| = r\sin\vartheta.$$

Dosadíme-li nyní vyjádření $|OT'|$ do vztahů pro x a y, dostáváme vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y, z bodu T a sférickými souřadnicemi r, φ, ϑ:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta,\\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta,\\ z &= r\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Přitom $r \geq 0$, úhel φ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi)$ nebo z jiného intervalu délky 2π a úhel ϑ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Spočtěme ještě jakobián této transformace:

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix}
\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\cos\varphi\sin\vartheta) \\
\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\varphi\sin\vartheta) \\
\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\cos\vartheta)
\end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix}
\cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\
\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\
\cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta
\end{vmatrix} = \\
&= -r^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos^2\vartheta - r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos^2\vartheta - \\
&\quad r^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta = \\
&= -r^2\left(\sin^3\vartheta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right) + \sin\vartheta\cos^2\vartheta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\right) = \\
&= -r^2\sin\vartheta\left(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta\right) = -r^2\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

Absolutní hodnota jakobiánu je:

$$|J| = r^2\sin\vartheta$$

Typové řešené příklady:

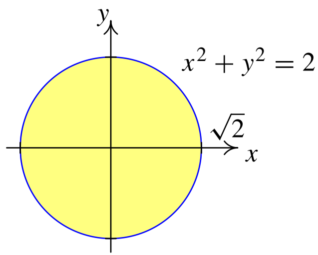
- Vypočítejte integrál $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Příklad 3.6
- Vypočítejte míru množiny. Příklad 3.7

Příklad 3.6. Vypočtěte $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde množina Ω je určená nerovnostmi $z^2 \geq x^2+y^2$, $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, přičemž $z \geq 0$.

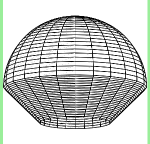
Řešení: Rovnice $z^2 = x^2+y^2$ určuje rotační kuželovou plochu s osou v souřadnicové ose z. První nerovnost tedy zadává její vnitřek. Vzhledem k nerovnosti $z \geq 0$ budeme uvažovat pouze horní část. Podmínka $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$ říká, že množina Ω je dále omezena dvěma soustřednými kulovými plochami o poloměrech 1 a 2. Výsledek je znázorněn na obrázku 3.15. Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

test3.u3d

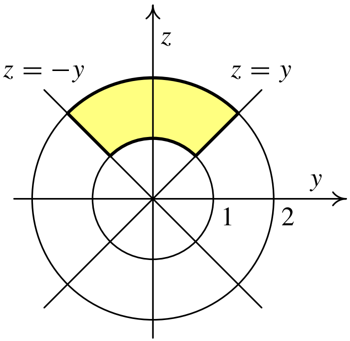
obr. 3.15 Množina Ω



obr. 3.16 Množina A

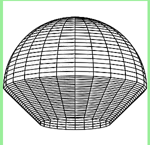


- Určíme průmět tělesa Ω do roviny xy a tím úhel φ. Průmětem A je zřejmě kruh se středem v počátku, jehož hraniční kružnice je průmětem kružnice, kterou dostaneme jako průnik kuželové plochy a větší kulové plochy. Vyloučením proměnné z z rovnic $z^2 = x^2 + y^2$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dostaneme, že $x^2 + y^2 = 2$, tj. poloměr kruhu A je $\sqrt{2}$. Tento údaj ale není důležitý, určili jsme jej jen pro úplnost, podstatné je, že pro úhel φ platí $0 \le \varphi \le 2\pi$.
- Určíme řez tělesa Ω libovolnou rovinou procházející osou z. Protože toto těleso je rotační s osou rotace z, bude řez libovolnou rovinou procházející osou z stejný. Na obr. 3.17 je znázorněn řez rovinou yz. Z něho určíme rozmezí pro úhel ϑ. Protože přímka $y = z$ je osou prvního kvadrantu, svírá s osou z úhel $\frac{\pi}{4}$. Tedy $0 \le \vartheta \le \pi/4$.



obr. 3.17 Řez rovinou yz

- Určíme meze pro r. Pro proměnnou r zřejmě platí $1 \le r \le 2$.



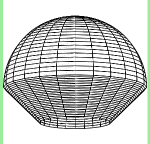
- Transformací do sférických souřadnic přejde množina Ω v množinu M — viz obr. 3.18 (písmeno „p“ značí osu φ, písmeno „t“ značí osu ϑ), kterou popíšeme takto:

$$M \quad \begin{aligned} 1 &\le r \le 2, \\ 0 &\le \varphi \le 2\pi, \\ 0 &\le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

sf1.u3d

obr. 3.18 Množina M

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_M r\cdot r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \\ &= \int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{15}{4}\cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \frac{15\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}\,. \end{aligned}$$



Titulní strana
Obsah
Strana 103 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Příklad 3.7. Vypočítejte míru množiny T dané nerovnostmi

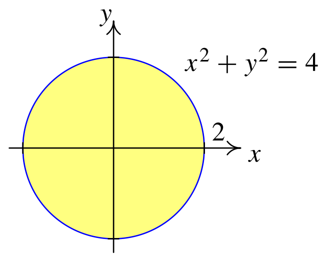
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - z^2 \leq 0.$$

Řešení:

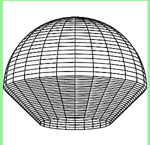
První rovnici $x^2+y^2+z^2-4z = 0$ lze upravit na tvar $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$. Vidíme, že se jedná se o kulovou plochu. První nerovnost tedy zadává vnitřek kulové plochy. Rovnice $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ určuje rotační kuželovou plochu s osou v souřadnicové ose z. Druhá nerovnost tedy zadává vnitřek kuželové plochy. Množina Ω je tedy omezena shora kulovou plochou se středem v bodě $0, 0, 2$ a poloměrem 2 a zdola kuželovou plochou. Výsledek je znázorněn na obrázku 3.19. Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

o3.u3d

obr. 3.19 Množina Ω



obr. 3.20 Množina A

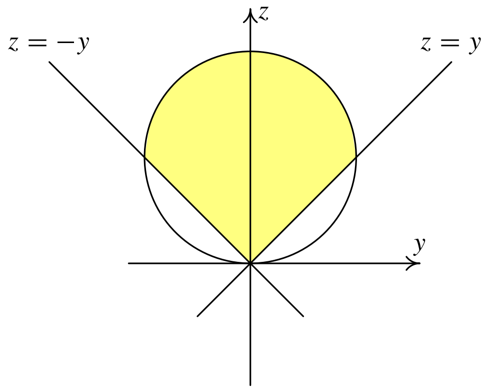


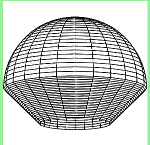
- Určíme průmět prostorové množiny Ω do roviny xy a tím úhel φ. K určení průmětu do roviny xy potřebujeme znát křivku, v níž se kužel a koule protínají. Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + (z-2)^2 &= 4 \\
x^2 + y^2 - z^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

  Odečtením získáme $(z-2)^2 + z^2 = 4$. Tato rovnice má dvě řešení $z_1 = 0$, $z_2 = 2$. Zajímá nás pouze řešení $z_2 = 2$. Dosazením do některé z rovnic dostáváme $x^2 + y^2 = 4$. Kužel a koule se protínají v kružnici se středem v bodě $0, 0, 2$ a poloměrem 2, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou xy. Průmětem tělesa Ω do roviny xy je tedy kruh A — viz obr. 3.20. Pro úhel φ tedy platí $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

- Určíme řez tělesa Ω libovolnou rovinou procházející osou z. Protože toto těleso je rotační s osou rotace z, bude řez libovolnou rovinou procházející osou z stejný. Na obr. 3.21 je znázorněn řez rovinou yz. Z něho určíme rozmezí pro úhel ϑ. Protože přímka $y = z$ je osou prvního kvadrantu, svírá s osou z úhel $\frac{\pi}{4}$. Tedy $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$.





Titulní strana
Obsah
Strana 105 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

obr. 3.21 Řez rovinou yz

- Určíme meze pro r. Omezení pro r dostaneme dosazením transformačních rovnic do rovnice kulové plochy, tj.

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\vartheta - 4r\cos\vartheta = 0 \quad\Rightarrow$$

$$r^2\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\vartheta - 4r\cos\vartheta = 0 \quad\Rightarrow\quad r = 4\cos\vartheta.$$

  Celkem tedy pro proměnnou r platí $0 \le r \le 4\cos\vartheta$.

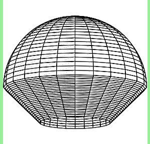
- Transformací do sférických souřadnic přejde množina Ω v množinu M — viz obr. 3.22, kterou popíšeme takto:

$$M \quad \begin{aligned} 1 &\le r \le 4\cos\vartheta, \\ 0 &\le \varphi \le 2\pi, \\ 0 &\le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

$$\mathrm{m}(\Omega) = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_M r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{4\cos\vartheta} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{16\cdot 8}{3}\pi\int_0^{\pi/4} 4\cos^3\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \cos\vartheta = t \\ \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 1 \\ \text{změna pořadí horní a dolní meze} \Rightarrow \\ \text{změna znaménka před integrálem} \end{array}\right| = \frac{16\cdot 8}{3}\pi\int_{\sqrt{2}/2}^{1} t^3\,\mathrm{d}t = \frac{32}{3}\pi\left[t^4\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = 8\pi.$$



sf2.u3d

obr. 3.22

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

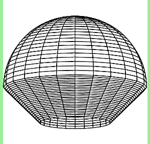
Zacatek testu **Trojný integrál — transformace do sférických souřadnic**

1. (2b.) Vztah mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi je při použití r, φ a ϑ dán rovnicemi:

- [ ] $x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta$
- [ ] $x = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ y = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta$
- [ ] $x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r\sin\varphi$
- [ ] $x = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ y = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ z = r\sin\varphi$

2. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do sférických souřadnic při použití r, φ a ϑ je:

- ☐ $r^2 \sin \vartheta^2$
- ☐ $r \cos \vartheta^2$
- ☐ $r \sin \vartheta$
- ☐ $r^2 \sin \vartheta$



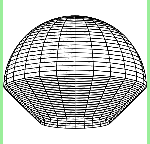
3. (4b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A f\,(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li: $A = \left\{[x, y, z] \;\; z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\right\}$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} f\,(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} f\,(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} f\,(r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} f\,(r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$

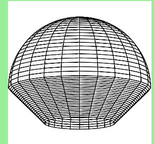


4. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \sqrt{x^2 + y^2} \le z^2\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf1.u3d

$\square$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$ $\square$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$

$\square$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$ $\square$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$



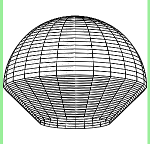
5. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf2.u3d

- [ ] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- [ ] $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- [ ] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- [ ] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$

6. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li: $A = \left\{[x,y,z]\;\; x^2+y^2+z^2 \le 4,\, x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4,\, x \ge 0\right\}$. Množina A je zobrazena na obrázku na další straně.

- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{1} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{4\cos\vartheta} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\cos\vartheta} r^2\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\cos\vartheta} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$



tsf4.u3d

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Kapitola 4

Souhrnné testy

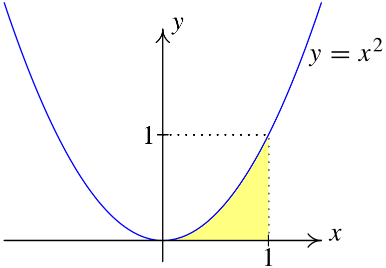
Rozcestník kapitoly: Test 1 Test 2 Test 3 Test 4

V této kapitole jsou zařazeny čtyři souhrnné testy, které by měly posloužit k procvičení problematiky dvojných a trojných integrálů. Začínáme otázkami k procvičení dvojných integrálů, dále následují otázky na rozpoznávání prostorových množin a nakonec jsou zařazeny testové otázky k trojnému integrálu. Při vyplňování testu platí stejná pravidla jako v testech zařazených k daným tématům: U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod. Z každého testu lze získat 100 bodů.

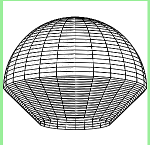
Kromě testových otázek, kdy pouze vybíráme odpověď z předem daných možností, jsou na konci testů zařazeny i otázky s tvořenými odpověďmi. Jedná se o jednoduché výpočty integrálů, které lze provést zpaměti nebo velmi jednoduchým rozepsáním. Další složitější úlohy k procvičení počítání jsou zařazeny v následující kapitole.

Zacatek testu **Souhrnný test 1**

1. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^{-1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$



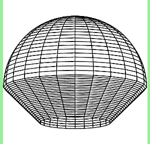
2. (8b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u integrálu: $\displaystyle\int_0^2\left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$,

- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{1-y^2}+1}^{-\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}-1}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{\sqrt{1-y^2}-1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$



3. (10b.) Transformujte integrál $\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω $x^2+y^2 \le 1$, $x+y \ge 1$ do polárních souřadnic.

- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1} r f(r\sin\varphi, \cos\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1} r f(r\sin\varphi, \cos\varphi)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

Titulní strana
Obsah
Strana 118 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

4. (9b.)

(a) (b)

(c) (d)

Kvadrika s rovnicí $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ je na obrázku

☐ (a) ☐ (b)

☐ (c) ☐ (d)

5. (9b.)

(a) (b)

(c) (d)

Nechť $a, b > 0$. Kvadrika s rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ je na obrázku

- ☐ (a)
- ☐ (b)
- ☐ (c)
- ☐ (d)

6. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

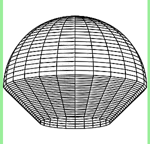
test10.u3d

☐ $x^2 + y^2 - y = 0$, $x^2 + y^2 = z$, $z = 0$,

☐ $x^2 - y^2 = z$, $x^2 + y^2 = z$, $z = 0$,

☐ $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z$,$z = 0$,

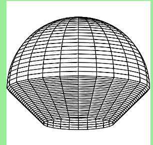
☐ $x^2 + y^2 - y = 0$, $x^2 - y^2 = z$



7. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

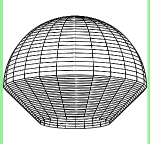
test7.u3d

- $\square\ M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\right\}$
- $\square\ M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 3, x \geq 0, y \geq 0\right\}$
- $\square\ M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; z \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\right\}$
- $\square\ M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\right\}$



8. (10b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li:
$A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; y \leq 4 - 2x,\; z \leq 6 - x^2\}$

- ☐ $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{6-x^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$
- ☐ $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} \left(\int_0^{6-x^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{6-x^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{4} \left(\int_0^{6-x^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$



9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad x^2 + y^2 \le 9, 0 \le y, 0 \le z \le y\right\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

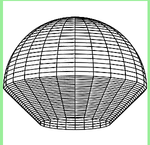
tv1.u3d

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{3}\left(\int_0^{y} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_0^{3}\left(\int_0^{r\sin\varphi} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_0^{3}\left(\int_0^{r\cos\varphi} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_0^{3}\left(\int_0^{y}\left(\int_{-\pi}^{\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r$



10. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\, y - 3 \leq z \leq 3 - y,\, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv6.u3d

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_{y-3}^{3-y} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

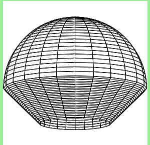
☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_1^3 \left(\int_{y-3}^{3-y} r^2 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^3 \left(\int_{r\sin\varphi-3}^{3-r\sin\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

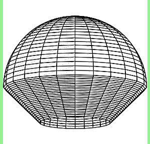
☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^9 \left(\int_{3-r\sin\varphi}^{3-r\cos\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

11. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad x^2+y^2+z^2-z \geq 0,\, x^2+y^2+z^2-2z \leq 0,\, \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$. Množina A je zobrazena na obrázku na další straně.

- [ ] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- [ ] $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- [ ] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\cos\vartheta}^{2\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- [ ] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{2} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$



Titulní strana
Obsah
Strana 126 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec



Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

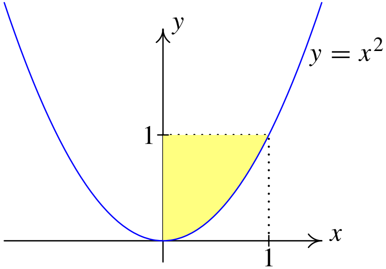
Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

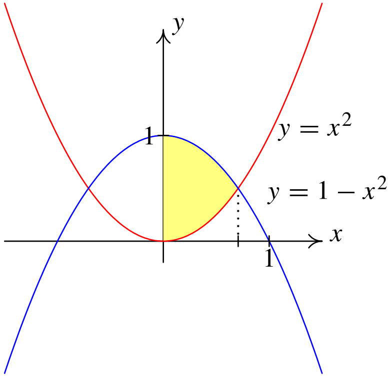
Zacatek testu **Souhrnný test 2**

1. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



- ☐ $\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_0^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_{x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1}\left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

2. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{0}^{1} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{1-x^2}^{x^2} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

3. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic, je-li

$$\Omega = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \;\; x^2 + y^2 \le y, y \ge x, x \ge 0\right\}.$$

- ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sin\varphi} r f(r \sin\varphi, \cos\varphi)\, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin\varphi} r f(r \sin\varphi, \cos\varphi)\, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin\varphi} r f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)\, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$
- ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sin\varphi} r f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)\, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

4. (9b.)

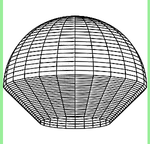
(a) (b)

(c) (d)

Nechť $a, b, c > 0$. Kvadrika s rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ je na obrázku

☐ (a) ☐ (b)

☐ (c) ☐ (d)



Titulní strana

Obsah

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strana 131 z 171

Zpět

Vpřed

Zavřít

Konec

5. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

test11.u3d

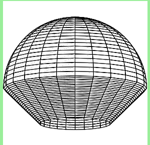
- ☐ $x^2 + y^2 - x = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- ☐ $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- ☐ $x^2 + y^2 - x = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = 1$
- ☐ $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Titulní strana
Obsah
Strana 132 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

6. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test3.u3d

- ☐ $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 - z^2 \leq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$
- ☐ $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 - z^2 \leq 1,\ 1 \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 4,\ z \geq 0\}$
- ☐ $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 - z^2 \leq -1,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$
- ☐ $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 \leq 1,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \geq 4,\ z \geq 0\}$



7. (10b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li:
$A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x^2 + y^2\}$

- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

8. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 \leq 4,\, y - 2 \leq z \leq 2 - y\right\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

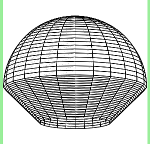
tv3.u3d

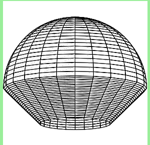
□ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-2}^2 r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

□ $\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^4 \left(\int\limits_{r\cos\varphi}^{r\sin\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

□ $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{2-r}^{2+r} \left(\int\limits_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r$

□ $\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{r\sin\varphi-2}^{2-r\sin\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

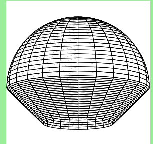




9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, -2 \le z \le 2, x \le 0\right\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv7.u3d

- [ ] $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2}\left(\int_{-2}^{2} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$
- [ ] $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^{2}\left(\int_{-2}^{2} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$
- [ ] $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{2}\left(\int_{0}^{r\cos\varphi} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$
- [ ] $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_1^{2}\left(\int_{-2}^{2} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$



10. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, y \ge 0, z \ge 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf3.u3d

- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^4 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$

11. (5b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \boxed{}$$

12. (6b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \boxed{}$$

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Zacatek testu **Souhrnný test 3**

1. (6b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.

Titulní strana

Obsah

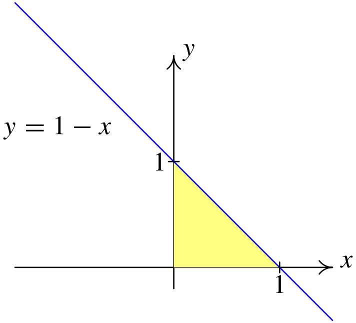
Strana 138 z 171

Zpět

Vpřed

Zavřít

Konec



$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

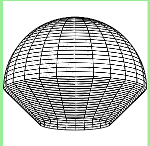
$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{-y} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

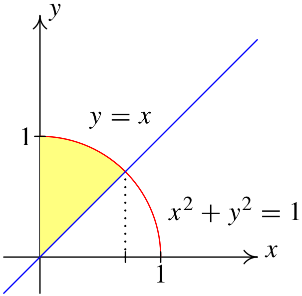
$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

$\square\ \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

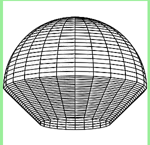


2. (8b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



☐ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ ☐ $\int_0^{1}\left(\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

☐ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ ☐ $\int_0^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$



3. (8b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u integrálu:

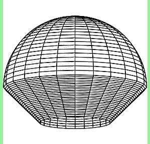
$$\int_0^1 \left(\int_{e^y}^{e} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

- ☐ $\int_0^e \left(\int_1^{\ln x} f(x, y)\, dx \right) dy$
- ☐ $\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} f(x, y)\, dx \right) dy$
- ☐ $\int_1^e \left(\int_1^{-\ln x} f(x, y)\, dx \right) dy$
- ☐ $\int_0^e \left(\int_e^{\ln x} f(x, y)\, dx \right) dy$

Titulní strana
Obsah
Strana 141 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

4. (9b.)K množině na obrázku přiřaďte odpovídající rovnici.

- [ ] $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
- [ ] $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$
- [ ] $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
- [ ] $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



5. (9b.)

(a) (b)

(c) (d)

Nechť $a, b > 0$. Kvadrika s rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ je na obrázku

☐ (a) ☐ (b)

☐ (c) ☐ (d)

6. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

- [ ] $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- [ ] $x^2 + y^2 = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- [ ] $x^2 + y^2 - x = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- [ ] $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

7. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test4.u3d

- ☐ $M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\right\}$
- ☐ $M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3\right\}$
- ☐ $M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 - z^2 \geq 3\right\}$
- ☐ $M = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad z \geq x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\right\}$

8. (10b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li:
$A = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \;\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; x + y + z \leq 1\}$

☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$

☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{1} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$

9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \left\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2, x \geq 0\right\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

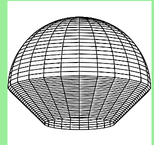
tv2.u3d

$\square$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \left(\int_{-2}^2 r\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

$\square$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{-2}^2 r\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$

$\square$ $\displaystyle\int_0^{2} \left(\int_{-2}^2 \left(\int_{0}^{\pi} r\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r$

$\square$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_{-2}^2 r\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$



10. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li

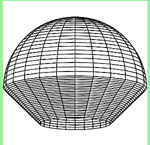
$$A = \left\{[x, y, z] \;\; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, R > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^R f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^R f(r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} f(r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$



Titulní strana
Obsah

Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

11. (6b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 \left(x^2 + y^3 \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

12. (6b.) Vypočtěte trojnásobný integrál

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

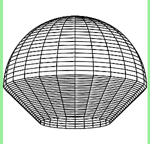
Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Zacatek testu **Souhrnný test 4**

1. (8b.) Převeďte dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



Titulní strana

Obsah

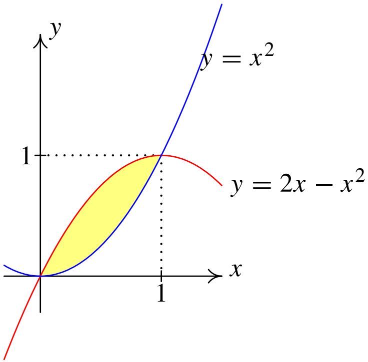
Strana 149 z 171

Zpět

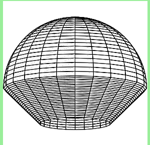
Vpřed

Zavřít

Konec



- [ ] $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f\,(x, y)\;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- [ ] $\int_0^1 \left(\int_0^{2x-x^2} f\,(x, y)\;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- [ ] $\int_0^1 \left(\int_{2x-x^2}^{x^2} f\,(x, y)\;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- [ ] $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x-x^2} f\,(x, y)\;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$



2. (8b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u integrálu: $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} f\,(x,\,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$,

- [ ] $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f\,(x,\,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- [ ] $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt[3]{y}} f\,(x,\,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- [ ] $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f\,(x,\,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$
- [ ] $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt[3]{y}} f\,(x,\,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

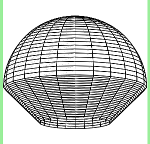
3. (9b.)

(a) (b)

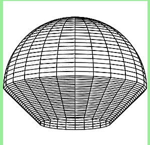
(c) (d)

Kvadrika s rovnicí $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$, kde $p, q > 0$, je na obrázku

- ☐ (a)
- ☐ (b)
- ☐ (c)
- ☐ (d)



4. (9b.) K množině na obrázku přiřaďte odpovídající rovnici. Přitom nechť $a, b, c, p, q > 0$



$\square$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

$\square$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

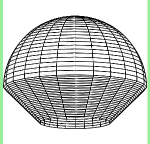
$\square$ $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$

$\square$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

5. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

test1.u3d

- ☐ $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1 - x^2 - y^2,\ z = 4$
- ☐ $x^2 - y^2 = 1,\ z = 1 - x^2 - y^2,\ z = 4$
- ☐ $x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 - y^2,\ z = 4$
- ☐ $x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z = 4$



Titulní strana

Obsah

Strana 154 z 171

Zpět

Vpřed

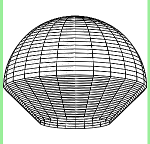
Zavřít

Konec

6. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test8.u3d

- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 3, x \le 0, y \ge 0\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad 1 \le x^2 - y^2 \le 4, 0 \le z \le 3, x \le 0, y \ge 0\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, 0 \le z \le 3, x \le 0, y \ge 0\}$
- [ ] $M = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \quad 1 \le x^2 + y^2 - z^2 \le 4, 0 \le z \le 3, x \le 0, y \ge 0\}$



7. (10b.) Převeďte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na trojnásobný, je-li těleso A ohraničené plochami: $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$, $-x + 3y + 3z = 3$.

- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{2}\left(\int_{0}^{\frac{1}{3}(x+3)}\left(\int_{0}^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{x+1}\left(\int_{0}^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

8. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\; x^2 + y^2 \leq 9,\, y - 3 \leq z \leq 3 - y,\, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

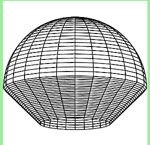
tv4.u3d

☐ $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_{y-3}^{3-y} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$$

☐ $$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{y-3}^{3-y} r^2 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$$

☐ $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_{r\sin\varphi-3}^{3-r\sin\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$$

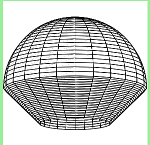
☐ $$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(\int_{3-r\sin\varphi}^{3-r\cos\varphi} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$$



9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic, je-li

$$A = \left\{[x, y, z] \;\; x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \le R^2, R > 0\right\}.$$

- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2R\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R\cos\vartheta} r^2 \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2R\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$



Titulní strana
Obsah
Strana 158 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

10. (9b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y \,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \boxed{}$$

11. (9b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_1^{4}\left(\int_{-2}^{3} x^2 y \,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \boxed{}$$

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Kapitola 5

Úlohy na procvičení

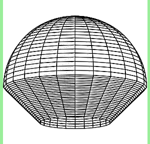
Zacatek testu **Úlohy k procvičení výpočtů**

1. (3b.) Nechť je množina Ω určena křivkami: $x+y=1$, $x+y=2$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$. Pak

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

2. (3b.) Nechť je množina Ω určena křivkami: $y=x^2$, $y=4-x^2$. Pak

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$



Titulní strana
Obsah
Strana 160 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

3. (3b.) Nechť je množina Ω určena křivkami: $y = x^2$, $y^2 = x$. Pak

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \boxed{}$$

4. (3b.) Nechť je množina Ω určena křivkami: $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$. Pak

$$\iint\limits_{\Omega} (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \boxed{}$$

Zobrazení správného výsledku (aktivní po kliknutí na tlačítko Výsledky):

5. (3b.) Nechť je množina Ω určena křivkami: $x = 2$, $x = 4$, $y = x$, $y = 2x$. Pak

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

6. (3b.) Nechť $\Omega = \{x, y \;\; 0 \leq x \leq 4, \;\; 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Pak

$$\iint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

7. (3b.) Nechť $\Omega = \left\{x, y \;\; 1 \leq x \leq 4, \;\; \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$. Pak

$$\iint_{\Omega} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

8. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic. Přitom $\Omega \;\; x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x \geq 0$.

$$\iint_{\Omega} 15x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

9. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic. Přitom $\Omega\ 0 \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \geq 3,\ x^2 + y^2 \leq 5.$

$$\iint_\Omega (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

10. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic: Přitom $\Omega\ x^2 + y^2 \geq 4,\ x^2 + y^2 \leq 16,\ x \leq 0,\ y \geq 0.$

$$\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

11. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic. Přitom $\Omega\ x^2 + y^2 \leq ax,\ y \geq 0,\ a > 0$

$$\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{}$$

12. (2b.) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{-\frac{1}{4}}^{-x}\left(\int_{-1}^{x^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \boxed{}$

Titulní strana

Obsah

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strana 163 z 171

Zpět

Vpřed

Zavřít

Konec

13. (2b.) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^{2-x-y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$

14. (2b.) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_x^{x+1} \left(\int_0^{xy} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$

15. (2b.) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(\int_0^{4-x-y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$

16. (3b.) Nechť Ω $y^2 \leq x \leq 2-y, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2-x-y$.

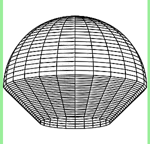
$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

17. (3b.) Nechť Ω $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

18. (3b.) Nechť Ω $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1-x-2y$.

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$



19. (2b.) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3y^2z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \boxed{}$

20. (2b.) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} x^2y\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \boxed{}$

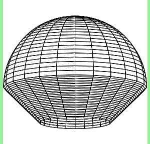
21. (2b.) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_0^2 (3x^2y+z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \boxed{}$

22. (3b.) Nechť Ω $0 \le x \le 2, 1 \le y \le 3, 1 \le z \le 2.$

$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{}$$

23. (3b.) Nechť Ω $0 \le x \le 1, 2 \le y \le 5, 2 \le z \le 4.$

newline $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{}$



24. (4b.) Nechť Ω $x^2+y^2 \le z \le 2-(x^2+y^2)$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_\Omega 3z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

25. (4b.) Nechť Ω $x^2+y^2 \le 9$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

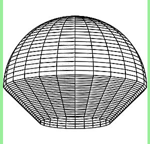
$$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

26. (4b.) Nechť Ω $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_\Omega z(x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

27. (4b.) Nechť Ω $x^2+y^2 \le 4z \le 16$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_\Omega \frac{xy}{(4+z)^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$



28. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_\Omega xyz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

29. (4b.) Nechť Ω $\dfrac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

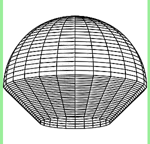
$$\iiint_\Omega (1 - 2x - y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

30. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq 2$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

31. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_\Omega (x + y + z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$



Titulní strana
Obsah
Strana 167 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

32. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ v prvním oktantu, $a > 0$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_\Omega z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{}$$

33. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, a > 0, z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

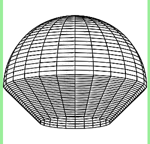
$$\iiint_\Omega 15\sqrt{2}yz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{}$$

34. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{}$$

35. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z^2 \geq x^2 + y^2$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \boxed{}$$



Titulní strana
Obsah
Strana 168 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

36. (4b.) Nechť Ω $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 4$, $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

37. (4b.) Nechť Ω $z^2 \ge x^2+y^2$, $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \ge 0$. Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

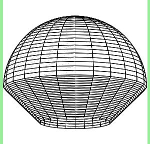
Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky



Titulní strana
Obsah
Strana 169 z 171
Zpět
Vpřed
Zavřít
Konec

Použitá literatura

[1] Grahn A.: *The `movie15` package*, 2008. Dostupné online na: http://ftp.cstug.cz/pub/tex/CTAN/macros/latex/contrib/movie15/doc/movie15.pdf.

[2] Hošková Š., Kuben J., Račková P.: *Integrální počet funkcí více proměnných*, skriptum Univerzita obrany, Brno, 2005.

[3] Jalová N.: *Testy z Integrálního počtu funkcí více proměnných*, bakalářská práce, MU Brno, 2008. Dostupná online na: http://www.math.muni.cz/~plch/diplomky/jalova.pdf.

[4] Mařík R., Tihlaříková M.: *Pojďte pane, budeme si hrát (... s PDF)*, In Proceedings of 7th International Conference APLIMAT 2008, Bratislava: Department of Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology, 2008, s. 63–73.

[5] Mařík R.: *Dvojný integrál*, září 2008. Dostupné online na: http://old.mendelu.cz/~marik/kvizy/dvojint-CZ.pdf.

[6] Musil V.: *Prezentace matematické grafiky (Integrální počet funkcí více proměnných) na webu s programem JavaView*, diplomová práce MU Brno, 2007.

[7] Plch R., Šarmanová P.: *Interaktivní prezentace matematické grafiky na webu a v PDF dokumentech.* Sborník semináře Technologie pro e-vzdělávání, Praha, 2007, s. 31–38.

[8] Plch R., Šarmanová P.: *Galerie interaktivní grafiky pro podporu výuky matematické analýzy.* Sborník příspěvků 3. konference Využití počítačů ve výuce matematiky. 1. vydání. České Budějovice, 2007, s. 193–198.

[9] Plch R., Šarmanová P.: *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech*, Zpravodaj CSTUG, CSTUG, **18**, č. 1–2, 2008, s. 76–92.

[10] Plch R., Šarmanová P.: *An Interactive Presentation of Maple 3D Graphics in PDF Documents*, Electronic Journal of Mathematics and Technology, Mathematics and Technology, LLC, Blacksburg, Volume 2, Number 3, 2008, s. 281–290.

[11] Plch R., Šarmanová P.: *Multimediální sbírka příkladů z Integrálního počtu funkcí více proměnných*, Sborník konference Setkání učitelů matematiky Srní 2008, Plzeň, 2008, s. 243–246.

[12] Stewart J.: *Calculus, fifth edition*, Thomson Learning, Brooks/Cole, 2003.

[13] Story D.: *AcroTEX*, http://www.acrotex.net/, 2008.

[14] Deep Exploration, http://www.righthemisphere.com/products/dexp/de_std.html, 2008.