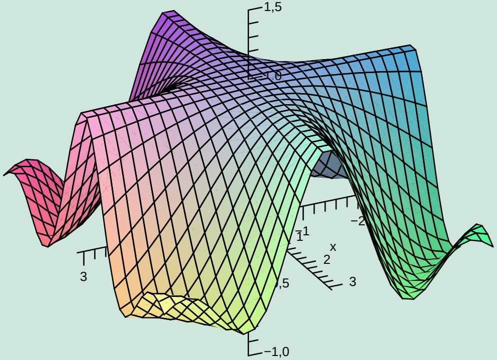
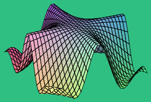
Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Silvie Kuráňová a Jan Vondra

Prosinec 2008

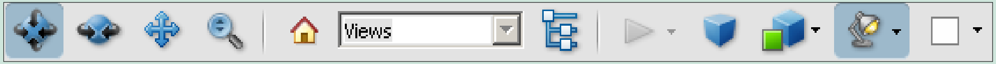




Instrukce k testům

Práce s 3D obrázky

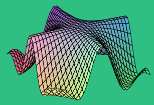
Všechny grafy funkcí dvou proměnných jsou zobrazeny jako 3D obrázky, které je možné ovládat, tj. libovolně natáčet, posunovat, zvětšovat, měnit osvětlení apod.
V řešených příkladech slouží k ovládání grafů funkcí panel, v testech pak pravé tlačítko myši. Panel zobrazíme či schováme kliknutím na modrý trojúhelníček v levém horním rohu obrázku, může vypadat například[1] takto:



Ovládání modelu naznačují jednotlivé ikony na panelu. Panel je rozdělen na tři části. První zleva obsahuje tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu. V druhé části panelu nás bude zajímat především tlačítko se symbolem domečku – umožňuje návrat k výchozímu pohledu. Dále je například možné zobrazit z jakých částí je graf složen, popřípadě některé části skrýt. V poslední části najdeme tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravoúhlým promítáním. Tlačítko pro režim vykreslení modelu, zde obzvláště doporučujeme vyzkoušet volby „Průhledné“ a „Drátový model“. Rovněž nabídka osvětlení je velmi bohatá, ale to již čtenář jistě prozkoumá sám. Poslední tlačítko umožňuje zvolit barvu pozadí, tedy například volbou žluté zvýšit kontrast při promítání ve výuce apod.

Všechny grafy funkcí v tomto textu mají cihlovou barvu, jsou opatřeny souřadnými osami a na každé z os je žlutě vyznačen jednotkový bod. Výjimečně je z technického hlediska volen jiný bod na ose z a čtenář je na tento fakt upozorněn. U složitějších modelů je vždy uveden popis modelu. Navíc všechny 3D modely (narozdíl od 2D grafiky) mají bílé pozadí.

[1] Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v češtině.



Práce s testy

Motto: „Cvičení dělá mistra.“

Ověřit si znalost dané látky je možné prostřednictvím interaktivních testů umístěných v závěru každé kapitoly.

Začátek testu je nutno zahájit stisknutím volby Start testu. Test nebude možno ukončit dokud nezodpovíte všechny otázky.

Start testu **Typy otázek v testech**

1. Výběr z možností, právě jedna správná odpověď.

(a) špatně (b) špatně (c) správně (d) špatně

2. Výběr z možností, více správných odpovědí.

☐ správně ☐ špatně ☐ správně ☐ špatně

3. Zápis vlastní odpovědi. *Do pole zapište výraz vlevo od rovnítka.*

$xy =$ ☐

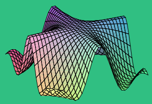
4. Zápis vlastní odpovědi do skupiny polí, tj. tlačítko Ans ovládá postupně jednotlivá políčka. *Do pole zapište výraz vlevo od rovnítka.*

$1 + \frac{1}{2} =$ ☐ $+$ ☐

Konec testu Výsledky Počet správných odpovědí: ☐

Správná odpověď: ☐

Test ukončíte kliknutím na Konec testu. Stisknutím volby Výsledky se zobrazí správné odpovědi a u pole pro zápis vlastní odpovědi se objeví tlačítko Ans (do té doby neviditelné).



Správné odpovědi

Pokud si práci s testem vyzkoušíte, zjistíte, že správné odpovědi jsou po skončení testu a po stisku tlačítka Výsledky vyznačeny symbolem ✔ a nesprávné symbolem ✘. V případě chybné odpovědi je správná varianta zvýrazněna symbolem ●.
Pokud bylo špatně zodpovězeno pole pro vlastní odpověď, objeví se kolem něj červený rámeček a správnou variantu si můžete prohlédnout v poli za textem „Správná odpověď:“ po stisknutí tlačítka Ans. Toto pole je v rámci testu „Typy otázek v testech“ umístěno na jeho konci a také v pravém panelu obrazovky (viz. str. 3). V testech na konci kapitol je toto pole zobrazováno pouze v pravém panelu obrazovky.

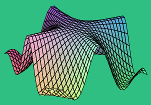
Bodové hodnocení

Získané body se zobrazí po ukončení testu červeně vedle každé otázky (případně podotázky). Standardní bodové ohodnocení je 1 bod za správnou odpověď (u otázek typu 1, 3 a 4) a záporné body za výběr chybné varianty u otázky druhého typu.

Zápis matematiky v testech

K zápisu odpovědí do matematického pole používáme následující notaci:

- Desetinná čísla: Desetinou čárku pište jako tečku, čili `1.2` místo `1,2`.
- Ludolfovo číslo π jako `pi`, Eulerovo číslo jako `e`.
- Znak dělení: Použijte lomítko `/`.
- Znak násobení: Symbol `*`, např. `4*x` pro $4x$.
- Mocnina: Symbol `^`, např. `4*x^3` pro $4x^3$, `12*x^(-6)` pro $12x^{-6}$.
- Odmocnina: $\sqrt{x}$ zapište jako `sqrt(x)` nebo `x^(1/2)`. Pozor! výraz `x^1/2` není $\sqrt{x}$.



- Závorky: Je možno použít kulaté ( ), hranaté [ ] či složené { }. Závorky je nutné! uvádět, vymezují argumenty funkcí, definují pořadí operací.
  Pište `sin(x)` raději než `sin x`, `4*x*(x^2+1)^3` pro $4x(x^2+1)^3$, `4^(2*x+1)` pro 4^{2x+1}.
  Nepište `sin^2(x)` pro $\sin^2(x)$, ale `(sin(x))^2`.
- Funkce, které můžete použít:
  - Trigonometrické: `sin`, `cos`, `tan`, `cot`, `sec`, `csc`.
  - Inverzní trigonometrické: `asin`, `acos`, `atan`.
  - Logaritmus: $\log$ či $\ln$ (přirozený logaritmus), př. `ln(x)`.
  - Exponenciála: e^x můžete zadat jako `exp(x)` nebo `e^x`.

Start testu **Vyzkoušejte si zápis matematiky!**

1. $1,5 =$

2. $\sin(2x)^3 =$ není totéž jako $\sin^3 2x =$

3. $(x^2-1)(x^2+1) =$

4. $\ln \frac{x}{2} =$

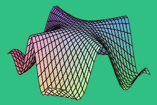
5. $\frac{y}{1+x^2y^2} =$

6. $\mathrm{e}^{x^2} + 3y =$

7. $-2x^4 + x^2y + y^2x + 1 =$

8. $(\log a)^2 =$

Konec testu Výsledky Počet správných odpovědí:



Titulní strana
Testy ke kapitole
Instrukce k testům
Strana 5 z 15
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

4. Diferenciál funkce

Příklad 4.1. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\sqrt{(0,98)^2 + (2,03)^3}$.

Řešení. K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ v bodě $[1,2]$ s diferencemi $\mathrm{d}x = -0,02$, $\mathrm{d}y = 0,03$. Platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y) &= \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^3}} + \frac{3}{2}\frac{y^2\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^3}}, \\ \mathrm{d}f(1,2) &= \frac{1}{3}\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Dosazením do $f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)$ dostáváme

$$\sqrt{(0,98)^2 + (2,03)^3} \doteq 3 + \frac{1}{3}\cdot(-0,02) + 2\cdot(0,03) = 3,05\overline{3}.$$

Na obrázku 1 je graf funkce s modře vyznačeným bodem $[1,2]$. V tomto bodě je sestrojena šedá tečná rovina. Z obrázku je patrno, že v okolí modrého bodu tečná rovina velmi dobře aproximuje průběh funkce. Náš výpočet diferenciálu odpovídá přírůstku na tečné rovině vzhledem k hodnotě funkce v modrém bodě.

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 6 z 15

Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ a její tečné roviny v bodě $[1, 2]$.

Příklad 4.2. Zjistěte, zda výraz $(2x\ln y+5y)\mathrm{d}x+(\frac{x^2}{y}+5x+3)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce, a pokud ano, najděte ji:

Řešení. Nejprve ověříme, zda je uvedený výraz opravdu diferenciálem. Označíme $P(x,y) = 2x\ln y + 5y$ a $Q(x,y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3$. Pro každé $[x,y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, na níž jsou funkce P a Q definovány, musí platit

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y), \text{ tj.}$$

$$P_y = \frac{2x}{y} + 5,\ Q_x = \frac{2x}{y} + 5.$$

Zadaný výraz je tedy totálním diferenciálem jisté kmenové funkce H. Dále platí

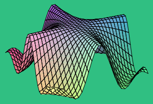
$$H(x,y) = \int (2x\ln y + 5y)\mathrm{d}x = x^2\ln y + 5xy + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ hraje roli integrační konstanty, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním podle y a dosazením do vztahu $H_y = Q$ dostáváme

$$H_y = \frac{x^2}{y} + 5x + \varphi'(y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3 = Q,$$

odkud $\varphi'(y) = 3$, tj. $\varphi(y) = 3y + c$. Vypočítali jsme, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$H(x,y) = x^2\ln y + 5xy + 3y + c,\ c \in \mathbb{R}.$$



Titulní strana
Testy ke kapitole
Instrukce k testům
Strana 8 z 15
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

Obrázek 2: 3D obrázek výsledné kmenové funkce $H(x, y)$ pro $c = 0$.

Start testu **Diferenciál – test 1**

1. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = \frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $A = [2, 2]$ pro $\mathrm{d}x = 0,03$ a $\mathrm{d}y = 0,01$.

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = \arctan \frac{x}{y}$ v bodě $A = [1, 3]$ pro $\mathrm{d}x = 0,01$ a $\mathrm{d}y = -0,05$.

3. Pomocí diferenciálu vypočtěte (s přesností na dvě desetinná místa):
$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \doteq$

4. Pomocí diferenciálu s přesností na dvě desetinná místa vypočtěte:
$\mathrm{e}^{0,05^3-0,02} \doteq$

5. Rozhodněte, zda platí následující věta:
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

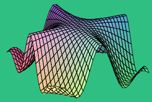
6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \ln(2x^3 - 8y^2)$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [2, 1, ?]$.

ϱ: $= 0$

7. Najděte přibližnou hodnotu funkce $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + \mathrm{e}^{2y}}$ v bodě $[2, 2; -0, 2]$ a to s přesností na jedno desetinné místo.

$\mathrm{d}f(2, 2; -0, 2) \doteq$

Diferenciální počet funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Diferenciál funkce

8. Nechť $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t. Předpokládejme, že pro $x = 4$ je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3$.

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ se pak rovná $\boxed{}$

9. Najděte rovnici tečné roviny ϱ k funkci $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[3, 4]$.

ϱ: $\boxed{} = 0$

10. Určete diferenciál funkce $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $[x_0, y_0] = [\sqrt{3}, 1]$.

$\mathrm{d}z = \boxed{}\,\mathrm{d}x + \boxed{}\,\mathrm{d}y$

11. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ v obecném bodě.

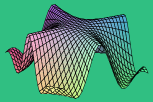
$\mathrm{d}z = \boxed{}\,\mathrm{d}x + \boxed{}\,\mathrm{d}y$

12. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = (x - y)^2$ v obecném bodě.

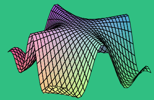
$\mathrm{d}z = \boxed{}\,\mathrm{d}x + \boxed{}\,\mathrm{d}y$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:



Titulní strana
Testy ke kapitole
Instrukce k testům
Strana 11 z 15
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Start testu **Diferenciál – test 2**

1. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [3, 4]$ pro $\mathrm{d}x = 0,1$ a $\mathrm{d}y = 0,2$. $\boxed{}$

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = \mathrm{e}^{xy}$ v bodě $A = [1, 2]$ pro $\mathrm{d}x = -0,1$ a $\mathrm{d}y = 0,1$. $\boxed{}$

3. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně:

$\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05} \doteq \boxed{}$

4. Rozhodněte, zda platí následující věta:

Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ právě tehdy, když je v tomto bodě diferencovatelná.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

5. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [1, -2, ?]$.

$\varrho\colon \boxed{} = 0$

6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [-2, 2, ?]$.

$\varrho\colon \boxed{} = 0$

7. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = 3x^2 - 2y^3$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}z = \boxed{}\,\mathrm{d}x + \boxed{}\,\mathrm{d}y$

8. Najděte přibližnou hodnotu funkce $f(x, y) = \sin(\pi xy + \ln y)$ v bodě $[0,01; 1,05]$ a to s přesností na čtyři desetinná místa.

$\mathrm{d}f(0,01; 1,05) \doteq$ ☐

9. Nechť $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t. Předpokládejme, že pro $x = 3$ je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3$.

Čemu se pak rovná $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$? ☐

10. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = x^y$ v obecném bodě.

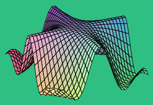
$\mathrm{d}z =$ ☐ $\mathrm{d}x +$ ☐ $\mathrm{d}y$

11. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = \arctan \frac{x-y}{x+y}$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}z =$ ☐ $\mathrm{d}x +$ ☐ $\mathrm{d}y$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: ☐



Start testu **Diferenciál – test 3**

1. Pomocí diferenciálu s přesností na dvě desetinná místa vypočtěte:

$\ln(0,97^2 + 0,05^2) \doteq$ $\boxed{}$

2. Pomocí diferenciálu s přesností na tři desetinná místa vypočtěte:

$\arctan \frac{1{,}02}{0{,}95} \doteq$ $\boxed{}$

3. Rozhodněte, zda platí následující věta:
Je-li funkce f spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

4. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [2, 1, ?]$.

ϱ: $\boxed{} = 0$

5. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x,y) = x\mathrm{e}^{3x+2y}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [-2, 3, ?]$.

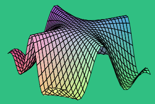
ϱ: $\boxed{} = 0$

6. Najděte přibližnou hodnotu (s přesností na jedno desetinné místo) funkce $f(x,y) = x^2y^3$ v bodě $[3, 1; 0, 9]$.

$\mathrm{d}f(3, 1; 0, 9) \doteq$ $\boxed{}$

7. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = y \ln 2x$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}z = \boxed{}\,\mathrm{d}x + \boxed{}\,\mathrm{d}y$



8. Určete hodnotu diferenciálu (s přesností na dvě desetinná místa) funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $T = [2,2]$ pro $\mathrm{d}x = 0,03, \mathrm{d}y = 0,01$.

$\mathrm{d}f(2,2) \doteq$

9. Nechť $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t. Předpokládejme, že pro $y = 8$ je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2$.

Čemu se pak rovná $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$?

10. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $u = \frac{xy}{z}$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}u = \quad \mathrm{d}x + \quad \mathrm{d}y + \quad \mathrm{d}z$

11. Určete diferenciál funkce $f(x,y) = \operatorname{arctan}(xy)$.

$\mathrm{d}f(x,y) = \quad \mathrm{d}x + \quad \mathrm{d}y.$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: