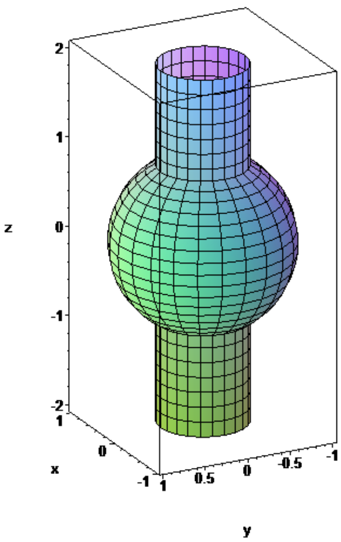
Trojný integrál

Transformace do válcových souřadnic

První příklad je ten, který vám dloužím ze cvičení, druhý berte jako takovou inspiraci na zápočtovku. (Hranaté závorky značí uzavřené intervaly)

Příklad 1. Vypočtěte objem tělesa M pro které platí: $x^2+y^2+z^2 \le 1$ a $x^2+y^2 \ge \frac{1}{4}$.



Vidíme, že se jedná o oblast, která je uvnitř koule se středem v počátku a s poloměrem $r_1 = 1$ a vně rotačního válce s osou z a poloměrem $r_2 = \frac{1}{2}$. Transformací do válcových souřadnic dostaneme $\phi = [0, 2\pi]$, $\rho = [\frac{1}{2}, 1]$ (těleso „jde“ od válce ke kouli, čili vzdálenost od osy z je minimálně $\frac{1}{2}$ a maximálně 1). Dosazením transformačních rovnic do rovnice koule dostaneme

$$\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi + z^2 \le 1$$

neboli po úpravě

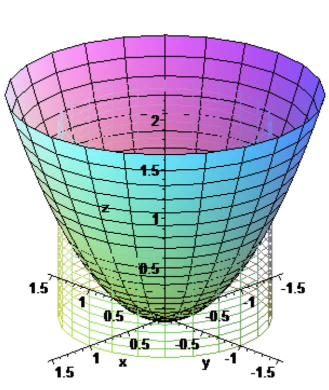
$$z \le \sqrt{1-\rho^2}.$$

$$\iiint_V 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi} [\rho z]_0^{\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} [\phi\rho\sqrt{1-\rho^2}]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi,$$

kde poslední integrál vypočteme pomocí substituce $t = 1-\rho^2$.

Příklad 2. Vypočtěte objem tělesa M pro které platí: $x^2+y^2 \ge z$, $x^2+y^2 \le 1$, $z \ge 0$.



Jedná se o válec, ze kterého je „vyříznut“ kousek rotačního paraboloidu. Opět pomocí transformace do válcových souřadnic dostaneme $\phi = [0, 2\pi]$ $\rho = [0, 1]$ (celé těleso je uvnitř daného válce), ve směru osy z je těleso omezené rovinou xy a daným paraboloidem, tedy $z = [0, x^2+y^2]$ neboli $z = [0, \rho^2]$ po dosazení válcových souřadnic.

$$\iiint_V 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\rho^2} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [\rho z]_0^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}[\frac{\rho^4}{4}]_0^1\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\pi$$