ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ:

1. (7 bodů) Vyřešete následující diferenciální rovnici

$$xy' + 2y + x^5 y^3 \,\mathrm{e}^x = 0.$$

2. (6 bodů) Vyřešete následující diferenciální rovnici

$$(2x \cos^2 y)\,\mathrm{d}x + (2y - x^2 \sin 2y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

3. (5 bodů) Pomocí diferenciálu funkce dvou porměnných určete přibližně hodnotu $\mathrm{e}^{0.05^3 - 0.02}$.

4. (9 bodů) Určete globální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$$

na množině $0 \le x \le y \le 4$.

5. (6 bodů) Spočítejte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = a,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

6. (7 bodů) Předpokládejme, že pro funkci f existují derivace dostatečně vysokých řádů. Ověřte platnost následující rovnosti

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz,$$

je-li $z = x^n f(\frac{y}{x})$.

- Zadání si můžete ponechat — spravné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M2100.
- Ústní část zkoušky začíná ve 15^{00} v učebně MS2 na ÚMS.

1) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$

$$y' + \frac{2y}{x} = -x^4 y^3 e^x$$

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = -x^4 e^x \qquad z = \frac{1}{y^2}$$

$$z' = -2 \cdot y^{-3} \cdot y' = -2\frac{y'}{y^3}$$

$$-\frac{1}{2}z' + \frac{2}{x}z = -x^4 e^x$$

$$z' - \frac{4}{x}z = 2x^4 e^x \quad \Big/ \cdot e^{-\int \frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

$$z' x^{-4} - 4x^{-5} z = 2e^x$$

$$\left(z x^{-4}\right)' = 2e^x$$

$$z x^{-4} = 2e^x + C$$

$$z = 2x^4 e^x + Cx^4$$

$$\underline{\underline{y^{-2} = x^4(2e^x + C),}} \quad C \in \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{y = 0}}$$

---

2) $(2x\cos^2 y)\,dx + (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = 0$

$$\underset{M}{\uparrow} \qquad\qquad \underset{N}{\uparrow}$$

$$M_y = 2 \cdot 2x \cdot \cos y \cdot (-\sin y) = -4x\cos y \cdot \sin y = -2x\sin 2y$$

$$N_x = 2x \cdot \sin 2y$$

$$F(x,y) = \int (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = y^2 + x^2 \cdot \frac{1}{2}\cos 2y + C(x) \xrightarrow{dx} + 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 2y + C'(x) = 2x\cos^2 y$$

M2100 III : 11.6.2009

-ii-

$$C'(x) = 2x\cos^2 y - x\cdot\cos 2y$$

$$C'(x) = x(2\cos^2 y - \cos 2y)$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2}(2\cos^2 y - \cos 2y) + C$$

$$F(x,y) = y^2 + \frac{x^2}{2}\cos 2y + x^2\cos^2 y - \frac{x^2}{2}\cos 2y + C$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{y^2 + x^2\cos^2 y = C\,,\quad C\in\mathbb{R}}}$$

---

3) $e^{0{,}05^3 - 0{,}02}$

e^{x^3-y}, $[x_0,y_0] = [0,0]$

$dx = 0{,}05$

$dy = 0{,}02$

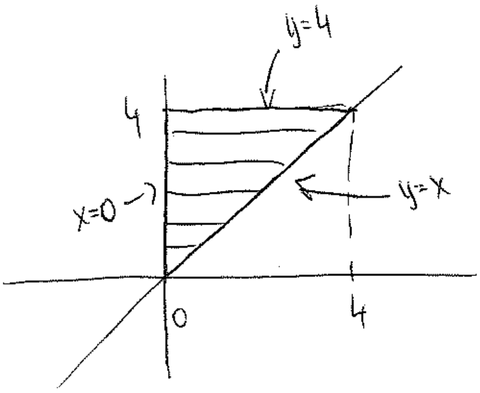
$$f(x_0,y_0) = 1$$

$$f_x(x_0,y_0) = e^{x^3-y}\cdot 3x^2\Big|_{[0,0]} = 0$$

$$f_y(x_0,y_0) = e^{x^3-y}(-1)\Big|_{[0,0]} = -1$$

$$e^{0{,}05^3-0{,}02} \approx 1 + 0\cdot 0{,}05 - 1\cdot 0{,}02 = \underline{\underline{0{,}98}}$$

4) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$



lok. extrém:

$f_x = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$

$f_y = -6y + 18 = 0 \Rightarrow y = 3$

$f(1/2, 3) = \frac{123}{4}$

I) $x = 0,\ 0 \le y \le 4$

$g(y) = -3y^2 + 18y + 4$

$g'(y) = -6y + 18 = 0 \Rightarrow y = 3$

$f(0,3) = 31$

II) $y = 4,\ 0 \le x \le 4$

$g(x) = x^2 - x + 28$

$g'(x) = 2x - 1 \Rightarrow x = +1/2$

$f(1/2, 4) = \frac{111}{4}$

III) $y = x,\ 0 \le x \le 4$

$g(x) = -2x^2 + 17x + 4$

$g'(x) = -4x + 17 \Rightarrow x = \frac{17}{4}$

$[\frac{17}{4}, \frac{17}{4}] \notin M$

$\boxed{f(0,0) = 4}$ MIN

$\boxed{f(4,4) = 40}$ MAX

$f(0,4) = 28$

Globální maximum $[4,4]$, $f_{MAX} = 40$

Globální minimum $[0,0]$, $f_{MIN} = 4$

VM2100 III: 11.6.2009
-iv-

5) $x \cdot \cos y + y \cdot \cos z + z \cdot \cos x = a$

$$\cos y - (y \cdot \sin z) \cdot z_x + z_x \cos x - z \cdot \sin x = 0$$

$$z_x \left(\cos x - y \sin z \right) = z \cdot \sin x - \cos y$$

$$\underline{\underline{z_x = \frac{z \cdot \sin x - \cos y}{\cos x - y \cdot \sin z}}}$$

$$-x \cdot \sin y + \cos z - (y \sin z) \cdot z_y + z_y \cdot \cos x = 0$$

$$z_y \left(\cos x - y \cdot \sin z \right) = x \cdot \sin y - \cos z$$

$$\underline{\underline{z_y = \frac{x \cdot \sin y - \cos z}{\cos x - y \cdot \sin z}}}$$

---

6) $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = n \cdot z$

$$z = x^n \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_x = n \cdot x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$z_y = x^n \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\underline{x \cdot z_x + y \cdot z_y} = n \cdot x^n f\left(\frac{y}{x}\right) - x^n \cdot \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \cdot \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= n \cdot x^n f\left(\frac{y}{x}\right) = \underline{\underline{n \cdot z}} \checkmark$$

o.k.