Vzorová písemná zkouška z předmětu Stochastické modely II

Příklad 1 .: (30 bodů) Systém je tvořen dvěma sériově zapojenými součástkami. Životnost první součástky se řídí rozložením Ex(λ), životnost druhé rozložením Ex(μ).

a) Jaká je pravděpodobnost, že systém přestane fungovat nejpozději v okamžiku $t > 0$?

b) Jaká je pravděpodobnost, že první součástka bude fungovat déle než druhá součástka?

Výsledky:

ad a) $P(\min(X, Y) \leq t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$ pro $t > 0$, $= 0$ jinak

ad b) $P(X > Y) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$

Příklad 2.: (40 bodů) Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, množinou stavů $J = \{1, 2\}$, vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1/2, 1/2)$ a maticí intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.

b) Najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností. Proveďte rovněž zkoušku správnosti výsledku.

Výsledky:

ad a) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$

ad b) $p_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t}, p_2(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t}$

Příklad 3.: (30 bodů) V dílně pracují tři opraváři. Do dílny přichází v průměru 24 zákazníků za 1 hodinu a průměrná doba opravy je 5 minut. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba opravy se řídí exponenciálním rozložením.

a) Zjistěte, zda se systém může stabilizovat.

b) Kolik procent přicházejících zákazníků bude muset čekat na opravu?

c) Jaký je průměrný počet volných opravářů?

d) Kolik minut bude v průměru čekat zákazník na opravu?

Výsledky:

ad a) Systém se může stabilizovat.

ad b) Asi 44,4% zákazníků bude muset čekat na obsluhu.

ad c) Průměrně je volný jeden opravář.

ad d) Zákazník bude čekat ve frontě průměrně 2 min 13 s.

Hodnocení:

(90, 100] … A, (80, 90] … B, (70, 80] … C, (60, 70] … D, (50, 60] … E, [0, 50] … F