Jednoduchá lineární regrese I

Motivace: Cíl regresní analýzy - popsat závislost hodnot veličiny Y na hodnotách veličiny X.
Nutnost vyřešení dvou problémů:

a) jaký typ funkce se použije k popisu dané závislosti;
b) jak se stanoví konkrétní parametry daného typu funkce?

ad a) Při určení typu funkce je třeba provést teoretický rozbor zkoumané závislosti. Teoretická analýza může upozornit například na to, že s růstem hodnot veličiny X budou mít hodnoty veličiny Y tendenci monotónně růst či klesat, že tato tendence má charakter zrychlujícího se či zpomalujícího se růstu či poklesu, že jde o závislost, kdy s růstem hodnot veličiny X dochází zpočátku k růstu hodnot veličiny Y, který je po dosažení určitého maxima vystřídán poklesem apod. Můžeme např. zkoumat závislost ceny ojetého auta (veličina Y) na jeho stáří (veličina X). Je zřejmé, že s rostoucím stářím bude klesat cena, ale není jasné, zda lineárně, kvadraticky či dokonce exponenciálně.
Vždy se snažíme o to aby regresní model byl jednoduchý, tj. aby neobsahoval příliš mnoho parametrů. Připadá-li v úvahu více funkcí, posuzujeme jejich vhodnost pomocí různých kritérií – viz dále.
Často však nemáme dostatek informací k provedení teoretického rozboru. Pak se snažíme odhadnout typ funkce pomocí dvourozměrného tečkového diagramu.
Zde se omezíme na funkce, které závisejí lineárně na parametrech $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$.
Zvláštní pozornost budeme věnovat polynomiální funkci 1. stupně $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

ad b) Odhady $b_0,b_1,\ldots,b_p$ neznámých parametrů $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$ získáme na základě dvourozměrného datového souboru $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$ metodou nejmenších čtverců, tj. z podmínky, aby součet čtverců odchylek zjištěných a odhadnutých hodnot byl minimální.

Specifikace klasického modelu lineární regrese

$Y = m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)+\varepsilon$, kde
$m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$ - teoretická regresní funkce, která lineárně závisí na neznámých regresních parametrech $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$ a známých funkcích $f_1(x),\ldots,f_p(x)$, které již neobsahují neznámé parametry, tj. $m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)=\sum_{j=0}^{p}\beta_j f_j(x)$, přičemž $f_0(x)\equiv 1$.
Jde o deterministickou složku modelu.
Složka ε - náhodná složka modelu. Je to náhodná odchylka od deterministické závislosti Y na X. Popisuje závislost vysvětlované proměnné na neznámých ne-

bo nepozorovaných proměnných a popisuje i vliv náhody. Nelze ji funkčně vyjádřit.
Veličina Y - závisle proměnná (též vysvětlovaná) veličina.
Veličina X - nezávisle proměnná (též vysvětlující) veličina.
Pořídíme n dvojic pozorování $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$, tj. dvourozměrný datový soubor

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}.$$

Pro i = 1, ..., n platí: $y_i = m(x_i;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)+\varepsilon_i$.
O náhodných odchylkách $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ předpokládáme, že

a) $E(\varepsilon_i)=0$ (odchylky nejsou systematické)
b) $D(\varepsilon_i)=\sigma^2>0$ (všechna pozorování jsou prováděna s touž přesností)
c) $C(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$ pro $i\neq j$ (mezi náhodnými odchylkami neexistuje žádný lineární vztah)
d) $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$.

V tomto případě hovoříme o klasickém modelu lineární regrese.

Označení

$b_0, b_1,\ldots, b_p$ - odhady regresních parametrů $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$ (nejčastěji je získáme metodou nejmenších čtverců, tj. z podmínky, že výraz

$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=0}^{p}\beta_j f_j(x_i)\right)^2$ nabývá svého minima pro $\beta_j = b_j$, j = 0, 1, …, p)

$\hat{m}(x;b_0,\ldots,b_p)$ - empirická regresní funkce

$\hat{y}_i=\hat{m}(x_i;b_0,\ldots,b_p)=\sum_{j=0}^{p}b_j f_j(x_i)$ - regresní odhad i-té hodnoty veličiny Y (i-tá predikovaná hodnota veličiny Y)

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ - i-té reziduum

$S_E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ - reziduální součet čtverců

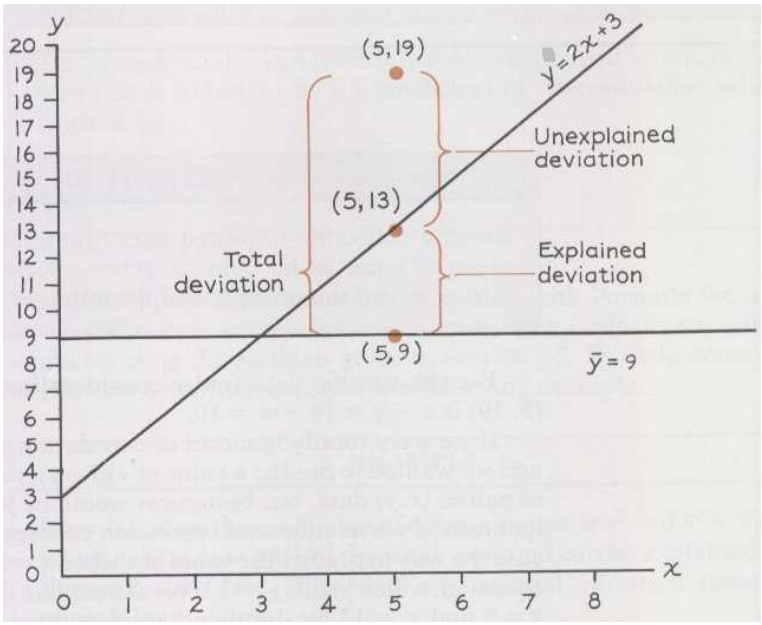
$s^2=\frac{S_E}{n-p-1}$ - odhad rozptylu σ^2

$S_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-m_2)^2$ - regresní součet čtverců $\left(m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$

$S_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-m_2)^2$ - celkový součet čtverců $(S_T=S_R+S_E)$

Význam jednotlivých typů součtů čtverců vysvětlíme na příkladě: Předpokládejme, že máme dvourozměrný datový soubor, v němž průměr hodnot závisle proměnné veličiny Y je 9 a závislost veličiny Y na veličině X je popsána regresní přímkou y = 2x + 3. Dvourozměrný tečkový diagram obsahuje bod o souřad-

nicích (5, 19), který pochází z datového souboru. Na regresní přímce leží bod o souřadnicích (5, 13).
Odchylka zjištěné hodnoty 19 od průměru 9 je v obrázku označena „Total deviation“ a po umocnění je to jedna ze složek celkového součtu čtverců S_T, tj. složka $y_i - m_2$.
Odchylka zjištěné hodnoty 19 od hodnoty 13 na regresní přímce je v obrázku označena „Unexplained deviation“ a po umocnění je to jedna ze složek reziduálního součtu čtverců S_E, tj. složka $y_i - \hat{y}_i$.
Odchylka hodnoty 13 na regresní přímce od průměru 9 je v obrázku označena „Explained deviation“ a po umocnění je to jedna ze složek regresního součtu čtverců S_R, tj. složka $\hat{y}_i - m_2$.



Maticový zápis klasického modelu lineární regrese

$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde

$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ - vektor pozorování závisle proměnné veličiny Y,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \ldots & f_p(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f_1(x_n) & \ldots & f_p(x_n) \end{pmatrix}$ - regresní matice

(předpokládáme, že h(**X**) = p+1 > n)

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$ - vektor regresních parametrů,

$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)'$ - vektor náhodných odchylek.

Podmínky (a) až (d) lze zkráceně zapsat ve tvaru $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

Maticově zapsaná metoda nejmenších čtverců vede na rovnice

$\mathbf{X'X\beta} = \mathbf{X'y}$ - systém normálních rovnic

$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1} \mathbf{X'y}$ – odhad vektoru $\boldsymbol{\beta}$ získaný metodou nejmenších čtverců

$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb}$ – vektor regresních odhadů (vektor predikce)
$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ - vektor reziduí
Vlastnosti odhadu **b**:
- odhad **b** je lineární, neboť je vytvořen lineární kombinací pozorování $y_1, \ldots, y_n$ s maticí vah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$;
- odhad **b** je nestranný, neboť $E(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}$;
- odhad **b** má varianční matici $\text{var}\,\mathbf{b} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$;
- odhad $\mathbf{b} \sim N_{p+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$ vzhledem k platnosti podmínky (d);
- pro odhad **b** platí Gaussova - Markovova věta: Odhad $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ je nejlepší nestranný lineární odhad vektoru **β**. (Nejlepší v tom smyslu, že rozdíl variančních matice libovolného jiného nestranného odhadu vektoru **β** a varianční matice odhadu **b** je matice pozitivně semidefinitní.)

Intervaly spolehlivosti pro regresní parametry

$s_{b_j} = s\sqrt{v_{jj}}$ - směrodatná chyba odhadu b_j, kde v_{jj} je j-tý diagonální prvek matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Pro j = 0, 1, ..., p statistika $T_j = \dfrac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \sim t(n-p-1)$, tedy 100(1- α)% interval spolehlivosti pro β_j má meze: $b_j \pm t_{1-\alpha/2}(n-p-1)s_{b_j}$.

(S intervaly spolehlivosti souvisí relativní chyby odhadů regresních parametrů. Získají se tak, že se vypočítá absolutní hodnota podílu poloviční šířky intervalu spolehlivosti a hodnoty odhadu. Relativní chyba odhadu by neměla přesáhnout 10%.)

Testování významnosti modelu jako celku (celkový F-test)

Na hladině významnosti α testujeme
H_0: $(\beta_1,\ldots,\beta_p)' = (0,\ldots,0)'$ proti H_1: $(\beta_1,\ldots,\beta_p)' \neq (0,\ldots,0)'$.
(Nulová hypotéza říká, že dostačující je model konstanty.)
Testová statistika: $F = \dfrac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)}$ má rozložení F(p, n-p-1), pokud H_0 platí.
Kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty)$.
$F \in W \Rightarrow H_0$ zamítáme na hladině významnosti α.
Výsledky F-testu zapisujeme do tabulky analýzy rozptylu:

zdroj variability	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	statistika F
model	S_R	p	S_R/p	$\dfrac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)}$
reziduální	S_E	n-p-1	$S_E/(n-p-1)$	-
celkový	S_T	n-1	-	-

Testování významnosti regresních parametrů (dílčí t-testy)

Na hladině významnosti α pro j = 0,1, ..., p testujeme hypotézu
H_0: $\beta_j = 0$ proti H_1: $\beta_j \neq 0$.

Testová statistika: $T_j = \frac{b_j}{s_{b_j}}$ má rozložení t(n-p-1), pokud H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle -\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-p-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-p-1), \infty)$.

$T_j \in W \Rightarrow H_0$ zamítáme na hladině významnosti α.

Kritéria pro posouzení vhodnosti zvolené regresní funkce

a) Index determinace

$ID^2 = \frac{S_R}{S_T} = 1 - \frac{S_E}{S_T}$ - index determinace $(0 \leq ID^2 \leq 1)$

- udává, jakou část variability závisle proměnné veličiny Y lze vysvětlit zvolenou regresní funkcí (často se udává v %);
- je zároveň mírou těsnosti závislosti proměnné Y na proměnné X;
- je to obecná míra, nezávislá na typu regresní funkce (lze použít i pro měření nelineární závislosti);
- je to míra, která nebere v úvahu počet parametrů regresní funkce. U regresních funkcí s více parametry vychází tedy obvykle vyšší než u regresních funkcí s méně parametry;
- tato míra není symetrická.

Za vhodnější se považuje ta regresní funkce, pro niž je index determinace vyšší. V případě, že porovnáváme několik modelů s rozdílným počtem parametrů, používáme adjustovaný index determinace:

$ID_{adj}^2 = ID^2 - \frac{(1-ID^2)p}{n-p-1}$ - adjustovaný index determinace

b) Testové kritérium F

Za vhodnější je považována ta regresní funkce, u níž je hodnota testové statistiky $F = \frac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)}$ pro test významnosti modelu jako celku vyšší.

c) Reziduální součet čtverců a reziduální rozptyl

Reziduální součet čtverců: $S_E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

Za vhodnější považujeme funkci, která má reziduální součet čtverců nižší. Reziduální součet čtverců lze použít pouze tehdy, když srovnáváme funkce se stejným počtem parametrů.

Reziduální rozptyl: $s^2 = \frac{S_E}{n-p-1}$

Za vhodnější považujeme tu funkci, která má reziduální rozptyl nižší. Reziduální rozptyl můžeme použít vždy, bez ohledu na to, kolik parametrů mají srovnávané regresní funkce.

d) Střední absolutní procentuální chyba predikce (MAPE)

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|$$

Za vhodnější považujeme tu funkci, která má MAPE nižší.

Příklad: U šesti obchodníků byla zjišťována poptávka po určitém druhu zboží loni (veličina X - v kusech) a letos (veličina Y - v kusech).

číslo. obchodníka	1	2	3	4	5	6
poptávka loni (X)	20	60	70	100	150	260
poptávka letos (Y)	50	60	60	120	230	320

a) Orientačně ověřte předpoklad, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení. Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

b) Předpokládejte, že závislost letošní poptávky na loňské lze vystihnout regresní přímkou. Sestavte regresní matici, vypočtěte odhady regresních parametrů a napište rovnici regresní přímky. Interpretujte parametry regresní přímky.

c) Najděte odhad rozptylu, vypočtěte index determinace a interpretujte ho.

d) Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry a zjistěte relativní chyby odhadů regresních parametrů.

e) Na hladině významnosti 0,05 proveďte celkový F-test.

f) Na hladině významnosti 0,05 proveďte dílčí t-testy.

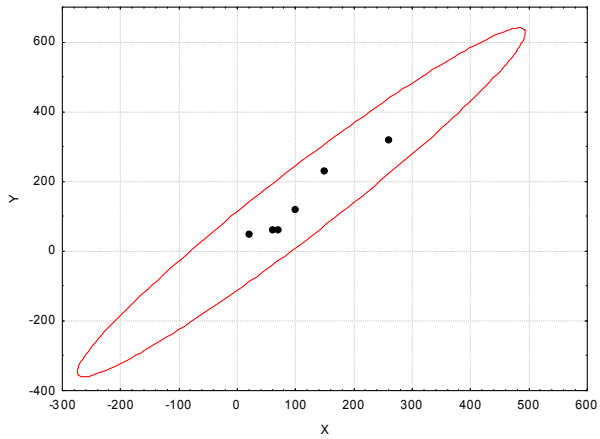
g) Vypočtěte regresní odhad letošní poptávky při loňské poptávce 110 kusů.

h) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram s proloženou regresní přímkou.

Řešení:

ad a) Orientačně ověřte předpoklad, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení.

Vytvoříme dvourozměrný tečkový diagram s proloženou 95% elipsou konstantní hustoty pravděpodobnosti:



Ze vzhledu diagramu je patrné, že předpoklad dvourozměrné normality je oprávněný a že mezi loňskou a letošní poptávkou existuje vcelku silná přímá lineární závislost.

Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

Výpočtem zjistíme: $r_{12} = 0{,}972$, tedy mezi poptávkou loni a letos existuje velmi silná přímá lineární závislost.

Realizace testové statistiky: $t = \dfrac{r_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{12}^{\,2}}} = \dfrac{0{,}972\sqrt{6-2}}{\sqrt{1-0{,}972^2}} = 8{,}2695$.

Kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-2), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0{,}975}(4)\right\rangle \cup \left\langle t_{0{,}975}(4), \infty\right) =$$

$$= \left(-\infty, -2{,}7764\right\rangle \cup \left\langle 2{,}7764, \infty\right)$$

Testová statistika se realizuje v kritickém oboru, hypotézu o nezávislosti veličin X a Y tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05.

ad b) Sestavíme regresní matici.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_p(x_n) \end{pmatrix}, \text{ tedy } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 60 \\ 1 & 70 \\ 1 & 100 \\ 1 & 150 \\ 1 & 260 \end{pmatrix}.$$

Podle vzorce $\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ získáme odhady regresních parametrů.

Nejprve vypočítáme matici

$$\mathbf{X'X} = \begin{pmatrix} 6 & 660 \\ 660 & 109000 \end{pmatrix}$$

a k ní inverzní matici

$$(\mathbf{X'X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}499084 & -0{,}003022 \\ -0{,}003022 & 0{,}000027 \end{pmatrix}.$$

Dále získáme součin

$$\mathbf{X'y} = \begin{pmatrix} 840 \\ 138500 \end{pmatrix}$$

a nakonec vektor odhadů regresních parametrů:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0{,}499084 & -0{,}003022 \\ -0{,}003022 & 0{,}000027 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 840 \\ 138500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6868 \\ 1{,}2665 \end{pmatrix}.$$

Regresní přímka má tedy rovnici

$$y = 0{,}6868 + 1{,}2665\ x.$$

Znamená to, že při nulové loňské poptávce by letošní poptávka činila 0,6868 kusů a při zvýšení loňské poptávky o 10 kusů by se letošní poptávka zvedla o 12,665 kusů.

ad c) Nyní vypočteme vektor regresních odhadů proměnné Y (vektor predikce):

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 60 \\ 1 & 70 \\ 1 & 100 \\ 1 & 150 \\ 1 & 260 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6868 \\ 1{,}2665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26{,}02 \\ 76{,}68 \\ 89{,}34 \\ 127{,}34 \\ 190{,}66 \\ 329{,}97 \end{pmatrix}.$$

Stanovíme vektor reziduí:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 60 \\ 120 \\ 230 \\ 320 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26{,}02 \\ 76{,}68 \\ 89{,}34 \\ 127{,}34 \\ 190{,}66 \\ 329{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23{,}98 \\ -16{,}68 \\ -29{,}34 \\ -7{,}34 \\ 39{,}34 \\ -9{,}97 \end{pmatrix}.$$

Pomocí vektoru reziduí vypočteme reziduální součet čtverců:

$$S_E = \mathbf{e'e} = (23{,}98\ \ -16{,}68\ \ -29{,}34\ \ -7{,}34\ \ 39{,}34\ \ -9{,}97). \begin{pmatrix} 23{,}98 \\ -16{,}68 \\ -29{,}34 \\ -7{,}34 \\ 39{,}34 \\ -9{,}97 \end{pmatrix} = 3451{,}11.$$

Odhad rozptylu: $s^2 = \dfrac{S_E}{n-p-1} = \dfrac{3415{,}11}{6-1-1} = 853{,}78$.

Dále potřebujeme celkový součet čtverců

$S_T = (\mathbf{y} - \mathbf{m}_2)'(\mathbf{y} - \mathbf{m}_2)$,

kde $\mathbf{m}_2$ je sloupcový vektor typu nx1 složený z průměru m_2 závisle proměnné veličiny Y. V našem případě je $m_2 = 140$. Po dosazení do vzorce pro celkový součet čtverců tedy dostaneme

$$S_T = (50\text{-}140,\ 60\text{-}140,\ 60\text{-}140,\ 120\text{-}140,\ 230\text{-}140,\ 320\text{-}140) \begin{pmatrix} 50-140 \\ 60-140 \\ 60-140 \\ 120-140 \\ 230-140 \\ 320-140 \end{pmatrix} = 61800.$$

(Celkový součet čtverců lze získat také tak, že výběrový rozptyl veličiny Y vynásobíme n-1: $S_T = 5.12360 = 61800$.) Regresní součet čtverců pak je:
$S_R = S_T - S_E = 61800 - 3451{,}11 = 58348{,}89$.

Index determinace: $ID^2 = \frac{S_R}{S_T} = \frac{58348{,}89}{61800} = 0{,}9442$.

Znamená to, že variabilita hodnot závisle proměnné veličiny je z 94,42% vysvětlena regresní přímkou.
(V případě regresní přímky platí $ID^2 = r_{12}^2$. V našem případě bylo zjištěno, že $r_{12} = 0{,}972$, tedy $ID^2 = 0{,}9447$.)

ad d) Vypočteme směrodatné chyby odhadů regresních parametrů b_0 a b_1 podle vzorce $s_{b_j} = s\sqrt{v_{jj}}$, j = 0, 1, kde v_{jj} je j-tý diagonální prvek matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}499084 & -0{,}003022 \\ -0{,}003022 & 0{,}000027 \end{pmatrix}$$

Přitom si uvědomíme, že $v_{00} = 0{,}499084$, $v_{11} = 0{,}000027$

$s_{b_0} = s\sqrt{v_{00}} = \sqrt{853{,}78} \cdot \sqrt{0{,}499084} = 20{,}6424$,

$s_{b_1} = s\sqrt{v_{11}} = \sqrt{853{,}78} \cdot \sqrt{0{,}000027} = 0{,}1532$.

Stanovíme meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry β_0 a β_1.
K tomu slouží vzorec $b_j \pm t_{1-\alpha/2}(n-p-1)s_{b_j}$, j = 0, 1.

95% interval spolehlivosti pro β_0:

$d = b_0 - t_{0{,}975}(4)s_{b_0} = 0{,}6868 - 2{,}7764 \cdot 20{,}6424 = -56{,}63$

$h = b_0 + t_{0{,}975}(4)s_{b_0} = 0{,}6868 + 2{,}7764 \cdot 20{,}6424 = 58$

Znamená to, že $-56{,}63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Relativní chyba odhadu β_0: $\left|\frac{(58 + 56{,}63)/2}{0{,}6868}\right| \cdot 100\% = 8342\%$

95% interval spolehlivosti pro β_1:

$d = b_1 - t_{0{,}975}(4)s_{b_1} = 1{,}2665 - 2{,}7764 \cdot 0{,}1532 = 0{,}841$

$h = b_1 + t_{0{,}975}(4)s_{b_1} = 1{,}2665 + 2{,}7764 \cdot 0{,}1532 = 1{,}692$

Znamená to, že $0{,}841 < \beta_1 < 1{,}692$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Relativní chyba odhadu β_1: $\left|\frac{(1{,}692-0{,}841)/2}{1{,}2665}\right|\cdot 100\% = 33{,}6\%$

ad e) Provedení celkového F-testu: na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujeme H_0: $\beta_1 = 0$ proti H_1: $\beta_1 \neq 0$.

Testová statistika $F = \frac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)} = \frac{58348{,}89/1}{3415{,}11/(6-1-1)} = 68{,}384$,

kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty) = \langle F_{0{,}95}(1,4), \infty) = \langle 7{,}7086, \infty)$.

Protože se testová statistika realizuje v kritickém oboru, hypotézu o nevýznamnosti regresního parametru β_1 (tj. směrnice regresní přímky) zamítáme na hladině významnosti 0,05. Výsledky testování významnosti modelu jako celku zapíšeme do tabulky ANOVA:

zdroj variab.	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	statistika F
model	$S_R = 58348{,}89$	$p = 1$	$S_R/p = 58348{,}89$	68,384
reziduální	$S_E = 3415{,}11$	$n-p-1 = 4$	$S_E/(n-p-1) = 853{,}78$	-
celkový	$S_T = 61800$	$n-1 = 5$	-	-

ad f) Provedení dílčích t-testů:

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujeme H_0: $\beta_0 = 0$ proti H_1: $\beta_0 \neq 0$.

Testová statistika: $t_0 = \frac{b_0}{s_{b_0}} = \frac{0{,}6868}{20{,}6424} = 0{,}3327$,

kritický obor:

$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-p-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-p-1), \infty) = (-\infty, -t_{0{,}975}(4)\rangle \cup \langle t_{0{,}975}(4), \infty) =$$
$$= (-\infty, -2{,}7764\rangle \cup \langle 2{,}7764, \infty)$$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, hypotézu o nevýznamnosti regresního parametru β_0 (tj. posunutí regresní přímky) nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Ke stejnému výsledku dospějeme, podíváme-li se na 95% interval spolehlivosti pro β_0. Vypočítali jsme, že $-56{,}63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval obsahuje 0, hypotézu H_0: $\beta_0 = 0$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujeme H_0: $\beta_1 = 0$ proti H_1: $\beta_1 \neq 0$.

Testová statistika: $t_1 = \frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{1{,}2665}{0{,}1532} = 8{,}27$,

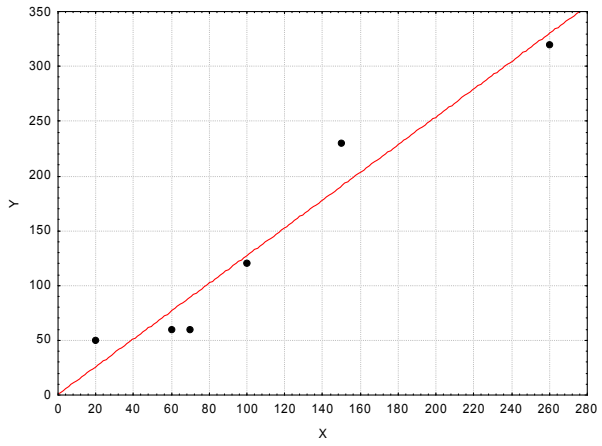
kritický obor:

$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-p-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-p-1), \infty) = (-\infty, -t_{0{,}975}(4)\rangle \cup \langle t_{0{,}975}(4), \infty) =$$
$$= (-\infty, -2{,}7764\rangle \cup \langle 2{,}7764, \infty)$$

Protože se testová statistika realizuje v kritickém oboru, hypotézu o nevýznamnosti regresního parametru β_1 (tj. směrnice regresní přímky) zamítáme na hladině významnosti 0,05.
Ke stejnému výsledku dospějeme, podíváme-li se na 95% interval spolehlivosti pro β_1. Vypočítali jsme, že $0{,}841 < \beta_1 < 1{,}692$ s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval neobsahuje 0, hypotézu H_0: $\beta_1 = 0$ zamítáme na hladině významnosti 0,05.
V případě modelu regresní přímky je dílčí t-test pro parametr β_1 ekvivalentní s celkovým F-testem.

ad g) Regresní odhad pro x = 110 dostaneme pouhým dosazením do rovnice regresní přímky: $\hat{y} = 0{,}6868 + 1{,}2665 \cdot 110 = 140$.

ad h)



ad i) MAPE se počítá podle vzorce $\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|$. V našem případě je vektor reziduí $y_i - \hat{y}_i = \begin{pmatrix} 23{,}98 \\ -16{,}68 \\ -29{,}34 \\ -7{,}34 \\ 39{,}34 \\ -9{,}97 \end{pmatrix}$ a vektor pozorování $\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 60 \\ 120 \\ 230 \\ 320 \end{pmatrix}$. Tedy dostáváme

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{6}\left(\left|\frac{23{,}98}{50}\right| + \left|\frac{-16{,}68}{60}\right| + \left|\frac{-29{,}34}{60}\right| + \left|\frac{-7{,}34}{120}\right| + \left|\frac{39{,}34}{230}\right| + \left|\frac{-9{,}97}{320}\right|\right) = 0{,}2517$$

Výpočet pomocí systému STATISTICA
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými X a Y a 6 případy:

	1 X	2 Y
1	20	50
2	60	60
3	70	60
4	100	120
5	150	230
6	260	320

a) Orientačně ověřte předpoklad, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení. Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

Zobrazíme dvourozměrný tečkový diagram s proloženou elipsou 95% konstantní hustoty pravděpodobnosti, s jehož pomocí posoudíme dvourozměrnou normalitu dat: Grafy – Bodové grafy – vypneme Typ proložení – Proměnné X, Y - OK . Na záložce Detaily vybereme Elipsa Normální – OK. Ve vzniklém dvourozměrném tečkovém diagramu změníme rozsah zobrazených hodnot na vodorovné a svislé ose, abychom viděli celou elipsu – viz obrázek výše.
Testování hypotézy o nezávislosti: Statistika – Základní statistiky /Tabulky - Korelační matice – OK – 2 seznamy proměnných X, Y, OK. Na záložce Možnosti zaškrtneme Zobrazit detailní tabulku výsledků – Souhrn.

Prom. X & prom. Y	Korelace (Tabulka1) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 (Celé případy vynechány u ChD) Průměr	Sm.Odch.	r(X,Y)	r2	t	p	N	Konst. záv.: Y	Směr. záv: Y	Konst. záv.: X	Směrnic záv.: X
X	110,0000	85,3229									
Y	140,0000	111,1755	0,971977	0,944739	8,269474	0,001167	6	0,686813	1,266484	5,566343	0,745955

Ve výstupní tabulce najdeme hodnotu výběrového korelačního koeficientu R_{12} (r = 0,971977, tzn. že mezi X a Y existuje velmi silná přímá lineární závislost), realizaci testové statistiky t = 8,269474 a p-hodnotu pro test hypotézy o nezávislosti (p = 0,001167, H_0 tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05).

b) Předpokládejte, že závislost letošní poptávky na loňské lze vystihnout regresní přímkou. Vypočtěte odhady regresních parametrů a napište rovnici regresní přímky. Interpretujte parametry regresní přímky.

Statistiky – Vícerozměrná regrese – Závisle proměnná Y, nezávisle proměnná X - OK – OK – Výpočet: Výsledky regrese.

N=6	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (Tabulka1) R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415 F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219					
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(4)	Úroveň p
Abs.člen			0,686813	20,64236	0,033272	0,975052
X	0,971977	0,117538	1,266484	0,15315	8,269474	0,001167

Ve výstupní tabulce najdeme koeficient b_0 ve sloupci B na řádku označeném Abs. člen, koeficient b_1 ve sloupci B na řádku označeném X. Rovnice regresní přímky:
$y = 0{,}686813 + 1{,}266484\ x$.
Znamená to, že při nulové loňské poptávce by letošní poptávka činila 0,6868 kusů a při zvýšení loňské poptávky o 10 kusů by se letošní poptávka zvedla o 12,665 kusů.

c) Najděte odhad rozptylu, vypočtěte index determinace a interpretujte ho.

Vrátíme se do Výsledky – vícenásobná regrese – Detailní výsledky – ANOVA.

Efekt	Analýza rozptylu (Tabulka1)				
	Součet čtverců	sv	Průměr čtverců	F	Úroveň p
Regres.	58384,89	1	58384,89	68,38420	0,001167
Rezid.	3415,11	4	853,78		
Celk.	61800,00				

Odhad rozptylu najdeme na řádku Rezid., ve sloupci Průměr čtverců, tedy $s^2 = 853{,}78$.
Index determinace je uveden v záhlaví původní výstupní tabulky pod označením R2. V našem případě $ID^2 = 0{,}9447$, tedy variabilita letošní poptávky je z 94,5% vysvětlena regresní přímkou.

d) Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry.

Ve výstupní tabulce výsledků regrese přidáme za proměnnou Úroveň p dvě nové proměnné dm (pro dolní meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry) a hm (pro horní meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry).
Do Dlouhého jména proměnné dm resp. hm napíšeme: =v3-v4*VStudent(0,975;4) resp. =v3+v4*VStudent(0,975;4)

N=6	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (Tabulka1) R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415 F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219							
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(4)	Úroveň p	dm =v3-v4*V	hm =v3+v4*
Abs.člen			0,686813	20,64236	0,033272	0,975052	-56,6256	57,99918
X	0,971977	0,117538	1,266484	0,15315	8,269474	0,001167	0,841266	1,691701

Vidíme, že $-56{,}63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95 a $0{,}841 < \beta_1 < 1{,}692$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

e) Na hladině významnosti 0,05 proveďte celkový F-test.

Testovou statistiku F-testu a odpovídající p-hodnotu najdeme v záhlaví výstupní tabulky regrese. Zde F = 68,384, p-hodnota < 0,00117, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti modelu jako celku. (Výsledky F-testu jsou rovněž uvedeny v tabulce ANOVA.)

f) Na hladině významnosti 0,05 proveďte dílčí t-testy a vypočtěte relativní chyby odhadů regresních parametrů.

Výsledky dílčích t-testů jsou uvedeny ve výstupní tabulce regrese. Testová statistika pro test hypotézy H_0: $\beta_0 = 0$ je 0,033272, p-hodnota je 0,975052. Hypotézu o nevýznamnosti úseku regresní přímky tedy nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Testová statistika pro test hypotézy H_0: $\beta_1 = 0$ je 8,269474, p-hodnota je 0,001167. Hypotézu o nevýznamnosti směrnice regresní přímky tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05.
K upravené výstupní tabulce s mezemi intervalů spolehlivosti přidáme proměnnou chyba. Do jejího Dlouhého jména napíšeme
=100*abs(0,5*(hm-dm)/v3)

N=6	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Prom2 (Tabulka1) R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415 F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219								
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(4)	Úroveň p	dm =v3-v4*V	hm =v3+v4*	chyba =100*abs
Abs.člen			0,686813	20,64236	0,033272	0,975052	-56,6256	57,99918	8344,681
Prom1	0,971977	0,117538	1,266484	0,15315	8,269474	0,001167	0,841266	1,691701	33,57463

g) Vypočtěte regresní odhad letošní poptávky při loňské poptávce 110 kusů.

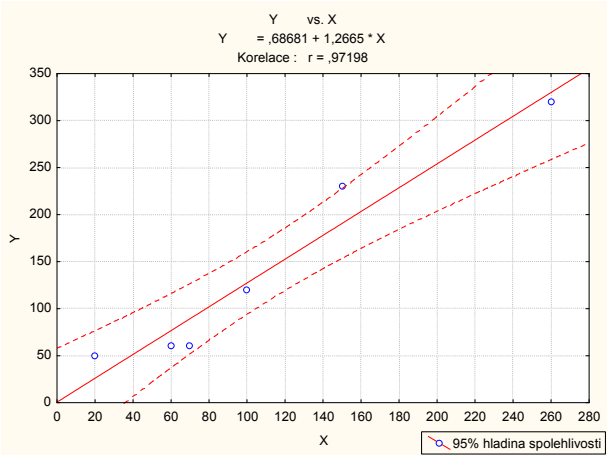
Pro výpočet predikované hodnoty zvolíme Rezidua/předpoklady/předpovědi Předpovědi závisle proměnné X: 110 OK. Ve výstupní tabulce je hledaná hodnota označena jako Předpověď.

Proměnná	Předpovězené hodnoty (Tabulka1 proměnné: Y		
	B-váž.	Hodnota	B-váž. * Hodnot
X	1,266484	110,0000	139,3132
Abs. člen			0,6868
Předpověď			140,0000
-95,0%LS			106,8803
+95,0%LS			173,1197

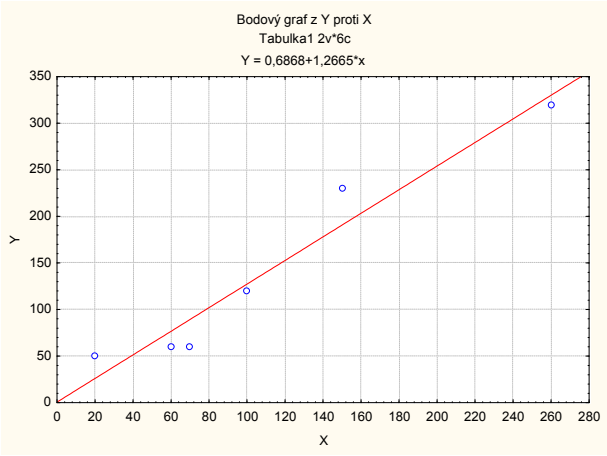
Při loňské poptávce 110 kusů je predikovaná hodnota letošní poptávky 140 kusů.

h) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram s proloženou regresní přímkou.

Nakreslení regresní přímky: Návrat do Výsledky: Vícenásobná regrese – Rezidua/předpoklady/předpovědi - Reziduální analýza – Bodové grafy – Korelace dvou proměnných – X, Y – OK.



Jiný způsob: Do dvourozměrného tečkového diagramu nakreslíme regresní přímku tak, že v tabulce 2D Bodové grafy zvolíme Typ proložení: Lineární, OK.



i) Vypočtěte střední absolutní procentuální chybu predikce (MAPE)

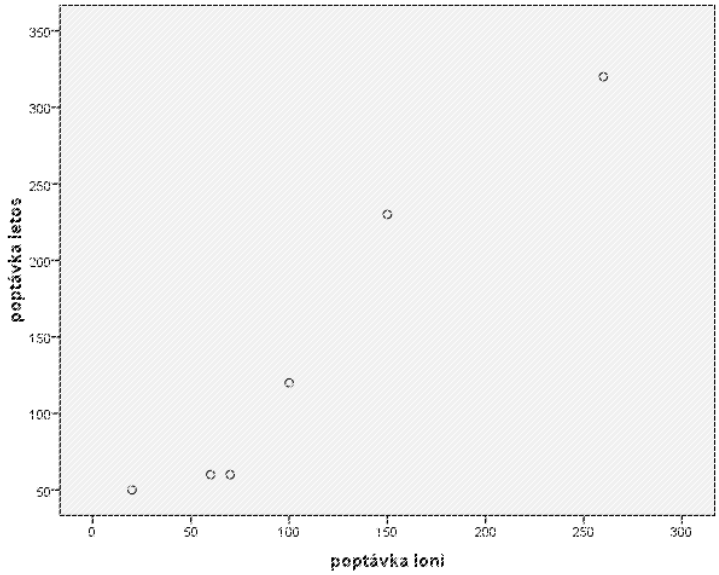
Ve výsledcích Vícenásobné regrese zvolíme záložku Rezidua / předpoklady / předpovědi – Reziduální analýza – Uložit – Uložit rezidua a předpovědi – Vybrat vše – OK. Ve vzniklé tabulce odstraníme proměnné 5 – 10, přidáme proměnnou chyby a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=100*abs(v4/v2)

Pak spočteme průměr této proměnné a zjistíme, že MAPE = 25,17%.

Výpočet pomocí systému SPSS

a) Zobrazte dvourozměrný tečkový diagram.Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

Graphs – Legacy Dialogs – Scatter/Dot – Define – Y Axis Y, X Axis X – OK



Testování hypotézy o nezávislosti: Analyze – Correlate – Bivariate – Variables X, Y – OK

Correlations

		poptávka loni	poptávka letos
poptávka loni	Pearson Correlation	1,000	,972**
	Sig. (2-tailed)		,001
	N	6	6
poptávka letos	Pearson Correlation	,972**	1,000
	Sig. (2-tailed)	,001	
	N	6	6

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Ve výstupní tabulce najdeme hodnotu výběrového korelačního koeficientu 0,972, tzn. že mezi X a Y existuje velmi silná přímá lineární závislost) a p-hodnotu pro test hypotézy o nezávislosti (p = 0,001, H_0 tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05).

b) Předpokládejte, že závislost letošní poptávky na loňské lze vystihnout regresní přímkou. Vypočtěte odhady regresních parametrů a napište rovnici regresní přímky. Interpretujte parametry regresní přímky.

Analyze – Regression – Linear – Dependent Y, Independent X – OK

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	,687	20,642		,033	,975
	poptávka loni	1,266	,153	,972	8,269	,001

a. Dependent Variable: poptávka letos

Rovnice regresní přímky: y = 0,687 + 1,266 x.
Znamená to, že při nulové loňské poptávce by letošní poptávka činila 0,687 kusů a při zvýšení loňské poptávky o 10 kusů by se letošní poptávka zvedla o 12,66 kusů.

c) Najděte odhad rozptylu, vypočtěte index determinace a interpretujte ho.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	58384,890	1	58384,890	68,384	,001[a]
	Residual	3415,110	4	853,777		
	Total	61800,000	5			

a. Predictors: (Constant), poptávka loni

b. Dependent Variable: poptávka letos

Odhad rozptylu najdeme na řádku Residual, ve sloupci Mean Square, tedy s^2 = 853,777.

Index determinace najdeme v tabulce Model Summary pod označením R Square:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,972[a]	,945	,931	29,219

a. Predictors: (Constant), poptávka loni

V našem případě ID^2 = 0,945, tedy variabilita letošní poptávky je z 94,5% vysvětlena regresní přímkou.

d) Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry.

V tabulce pro zadávání voleb pro lineární regresi zaškrtneme ve Statistics Confidence intervals.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	,687	20,642		,033	,975	-56,626	57,999
	poptávka loni	1,266	,153	,972	8,269	,001	,841	1,692

a. Dependent Variable: poptávka letos

Vidíme, že $-56{,}63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95 a $0{,}841 < \beta_1 < 1{,}692$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

e) Na hladině významnosti 0,05 proveďte celkový F-test.

Testovou statistiku F-testu a odpovídající p-hodnotu najdeme v tabulce ANOVA. Zde F = 68,384, p-hodnota < 0,001, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti modelu jako celku.

f) Na hladině významnosti 0,05 proveďte dílčí t-testy a vypočtěte relativní chyby odhadů regresních parametrů.

Výsledky dílčích t-testů jsou uvedeny v tabulce Coefficients.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	,687	20,642		,033	,975
	poptávka loni	1,266	,153	,972	8,269	,001

a. Dependent Variable: poptávka letos

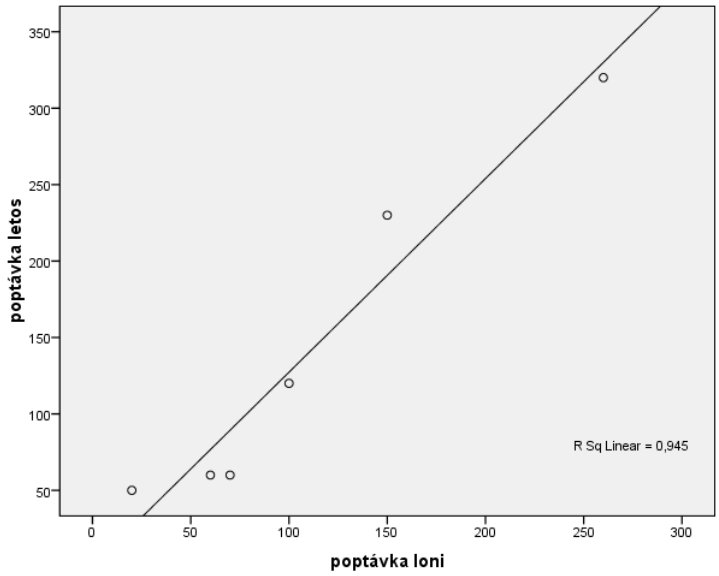
Testová statistika pro test hypotézy H_0: $\beta_0 = 0$ je 0,033, p-hodnota je 0,975. Hypotézu o nevýznamnosti úseku regresní přímky tedy nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Testová statistika pro test hypotézy H_0: $\beta_1 = 0$ je 8,269, p-hodnota je 0,001. Hypotézu o nevýznamnosti směrnice regresní přímky tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05.
Výpočet relativních chyb odhadů regresních parametrů:
Do nového datového souboru okopírujeme odhady parametrů regresní přímky (tuto proměnnou nazveme B) a meze intervalů spolehlivosti (příslušné sloupce nazveme DM a HM). K tomuto datovému souboru přidáme proměnnou chyba.
Transform – Compute Variable – Target Variable CHYBA =
100*ABS((0.5*(HM-DM)/B)
Zjistíme, že relativní chyby odhadu úseku je 8344,7% a směrnice 33,6%.

g) Vypočtěte regresní odhad letošní poptávky při loňské poptávce 110 kusů.

Pro výpočet predikované hodnoty použijeme SPSS jenom jako kalkulačku s využitím volby Transform. Zjistíme, ž při loňské poptávce 110 kusů je predikovaná hodnota letošní poptávky 140 kusů.

h) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram s proloženou regresní přímkou.

Nakreslení regresní přímky: Ve vytvořeném dvourozměrném tečkovém diagramu 2x klikneme na pozadí grafu a vstoupíme tak do Chart Editor. Zvolíme Elements – Fit Line at Total.



i) Vypočtěte střední absolutní procentuální chybu predikce (MAPE)

V tabulce Linear Regression vybereme Save, v Residuals zaškrtneme Unstandardized – Continue – OK. V datovém souboru s eobjeví proměnná RES_1 obsahující rezidua. Nyní k datovému souboru přidáme proměnnou CHYBY.
Transform – Compute Variable – Target Variable CHYBY = 100*abs(RES_1/Y).
Pak spočteme průměr této proměnné a zjistíme, že MAPE = 25,17%.