Zhodnocení přesnosti měření

1. Chyby měření

Měřením nemůžeme nikdy zjistit **skutečnou** (pravou) **hodnotu** x_s měřené veličiny. To je způsobeno nedokonalostí metod měření, měřicích přístrojů, lidských smyslů i proměnných podmínek při měření. Záleží na okolnostech měření, jak se ke skutečné hodnotě veličiny přiblížíme. Výsledkem měření je hodnota x, která se od skutečné hodnoty x_s liší a jejich rozdíl je **chyba měření** $\boldsymbol{\kappa_x}$

$$\kappa_x = x - x_s\,, \tag{1}$$

kterou nemůžeme nikdy přesně určit (vzhledem k neznalosti hodnoty x_s), pouze odhadnout. Chyba charakterizuje odchylku naměřené hodnoty veličiny od skutečné hodnoty a proto se nazývá *absolutní chyba* a je vyjádřena v jednotkách měřené veličiny. Přesnost naměřené hodnoty někdy však názorněji vyjadřuje *relativní chyba* definována vztahem

$$\kappa_{r,x} = \frac{\kappa_x}{x_s} \tag{2}$$

a je možno ji vyjádřit v procentech. ∗ *poznámka pod čarou*
Chyba má dvě složky – **systematickou a náhodnou**, které se liší svým původem.

∗ *Vzhledem k tomu, že skutečná (pravá) hodnota měřené veličiny je experimentálně nedosažitelná, je nutné provádět potřebné výpočty a odhady pomocí konvenčně skutečné hodnoty, což je hodnota, která je velice blízká skutečné hodnotě a jejíž přesnost určení je vyhovující pro daný účel. Je možné ji získat použitím tabulkové hodnoty stanovené jiným měřicím zařízením, jehož chyba měření je výrazně menší nebo hodnoty, která přísluší veličině realizované referenčním etalonem. Při odhadu relativní chyby podle* (2) *lze jako hodnotu* x_s *, použít právě měřenou hodnotu* x.

1.1. Chyby systematické

Systematické chyby zkreslují při opakovaném měření konaném za stejných podmínek správnou hodnotu měřené veličiny stále stejným způsobem. Teoreticky by bylo možné je vyloučit, prakticky by to znamenalo je alespoň částečně ohodnotit pomocí přesnějších přístrojů nebo zavést korekci na zpřesnění měřicí metody. V praxi a zvláště v laboratorním cvičení je tento požadavek těžko uskutečnitelný a proto často provádíme odhad systematických chyb tak, že určujeme **maximální chybu** $\boldsymbol{m_x}$**.** Její význam je takový, že chyba, které se při měření skutečně dopouštíme je vždy menší nebo nanejvýš rovna chybě m_x . Podle původu těchto chyb je třeba odlišit chyby způsobené nepřesností měřidel, chyby metody a chyby pozorovatele.

Systematické chyby způsobené omezenou přesností měřidel

Určení maximální chyby můžeme provést následujícím dvojím způsobem. Buď budeme vycházet z dokumentace výrobce a nejsou-li žádné podklady, rozhodneme podle možnosti odečítání hodnot na stupnici přístroje. To se týká zvláště jednoduchých měřidel. Pro některé sériově vyráběné přístroje výrobce udává **největší přípustnou (maximální) chybu** $\boldsymbol{m_x}$**.** Tím je zaručeno, že hodnota veličiny x naměřená přístrojem bude mít v celém jeho rozsahu chybu nanejvýš rovnou maximální chybě.

Maximální chyba je pro **elektrické analogové (ručkové) měřicí přístroje** výrobcem udávána pomocí třídy přesnosti T_p . Údaj o třídě přesnosti je obvykle uveden v pravém dolním rohu pod stupnicí přístroje. Podle platné normy je třída přesnosti číslo z řady 0,1; 0,2; 0.5; 1; 1.5; 2,5; 5 . Třída přesnosti vyjadřuje v procentech použitého rozsahu maximální chybu měřené hodnoty. Největší přípustnou chybu m_x lze pak stanovit podle vztahu

$$m_x = \frac{T_p}{100} x_m , \qquad (3)$$

kde x_m je největší možná naměřená hodnota určená rozsahem. V případě, že počátek stupnice představuje nulovou měřenou hodnotu, pak se údaj x_m nazývá jmenovitý rozsah přístroje. *Největší přípustná chyba je stejná*, *ať měříme v kterékoli části rozsahu*, zatímco poměr maximální chyby k naměřené hodnotě *x,* tedy relativní chyba měřené hodnoty (vyjadřovaná v procentech) $m_{r,x} = \frac{m_x}{x}$ je tím menší, čím větší je měřená hodnota vzhledem k maximální hodnotě použitého rozsahu. Proto při těchto měřeních docilujeme tím větší relativní přesnosti čím blíže je údaj přístroje ke konci stupnice.

Příklad. Měřicím přístrojem METRA PU 500 s jmenovitým rozsahem I_m = 10 mA byl změřen proud I = 8,3 mA. Podle technických údajů výrobce je třída přesnosti T_p= 2,5% a největší přípustná chyba měřeného proudu je podle vztahu (3) m_I = (2,5/100) . 10 mA = 0,25mA. Relativní chyba naměřené hodnoty proudu je pak $m_{r,I}$ = 0,25/ 8,3 = 0,030 = 3 %.

U **digitálních (číslicových) měřicích přístrojů** se skládá maximální chyba m_x výrobcem stanovená ze dvou složek : $m_{1,x}$ závislé na velikosti měřené hodnoty a vyjadřované v procentech měřené hodnoty a $m_{2,x}$ závislé buď na použitém rozsahu (v tom případě vyjádřené v procentech použitého rozsahu) nebo vyjádřené počtem jednotek (digitů) nejnižšího místa číslicového displeje na zvoleném rozsahu.

Příklad. Měřicím přístrojem METEX M4650 bylo naměřeno napětí U = 1,5136 V na jmenovitém rozsahu U_m = 2 V. V tomto rozsahu je mezní údaj číslicového displeje 1,9999V. Největší přípustná chyba je podle údaje výrobce dána hodnotou 0,05% z měřené hodnoty a dále 3-mi jednotkami (digity) nejnižšího místa číslicového displeje.
Údaj 0,05% z měřené hodnoty přestavuje chybu $m_{1,U}$ = (0,05/100).1,5136 V = 7,568.10^{-4} V a údaj 3 jednotky nejnižšího místa číslicového displeje znamená chybu $m_{2,U}$ = 0,0003 V = 3.10^{-4} V. Celková největší přípustná chyba je m_U = (7,568 + 3).10^{-4} V = 10,568.10^{-4} V a po zaokrouhlení na dvě platné číslice m_U = (1,1).10^{-3} V. Relativní chyba naměřené hodnoty je pak $m_{r,U}$ = (1,1).10^{-3} V /1,5136 V = 0,000727 = 0,07 %.

Jestliže výrobce neudává informace o přesnosti měřidla, musíme sami odhadnout maximální chybu m_x naměřené hodnoty. Obvykle lze chybu m_x odhadnout tak, že ji položíme rovnu části nejmenšího dílku na stupnici přístroje, kterou jsme schopni ještě rozlišit. Zpravidla to bývá 1/2 nejmenšího dílku nebo celý dílek. Tento způsob určení chyby souvisí s tím, že optimální hodnota nejmenšího dílku by měla být výrobcem stanovena tak, abychom mohli na stupnici odečítat hodnoty naměřené veličiny v souladu s přesností daného přístroje nebo měřidla. V následující tabulce (tab.1) jsou uvedeny hodnoty maximálních chyb pro nejčastěji používaná měřidla

Tab.1

Měřidlo	Maximální chyba
Měřítko pásové	(0,5 - 2) mm
Měřítko posuvné	(0,05 – 0,1) mm
Mikrometrické měřítko	(0,005 - 0,01) mm
Váhy analytické,	(0,001- 0,03) g
Váhy laboratorní (podle typu)	(0,01 – 0,3) g
7Stopky mechanické	(0,1- 0,3) s
Stopky elektronické	(0,001- 0,1) s
Teploměry	Závisí na dělení stupnice a velikosti jednoho dílku, až (1 - 2) násobek nejmenšího dílku

Je třeba si také uvědomit, že někdy použitá metoda způsobuje, že není využita uvedená přesnost měřicích přístrojů. Např. jestliže přesné elektronické stopky ovládá pozorovatel pomocí páčkového spínače, v tom případě není chyba měřeného času dána maximální chybou stopek, ale reakční dobou pozorovatele (cca 0,3 s).

Systematické chyby použité metody

Vznikají nedokonalostí použitého způsobu měření, zjednodušujícími podmínkami měřicí metody, přibližností vztahů použitých pro popis měřeného objektu za daných podmínek nebo nevhodností použitého způsobu měření. Při vážení to může být např. nerespektování různého vztlaku vzduchu na závaží a vážený předmět, když mají různé objemy. Opravu těchto chyb je možné provést zavedením korekce, která zpřesní výsledek měření, např. provedením přesnějšího výpočtu výsledku při zahrnutí vztlaku vzduchu atd. Pokud se oprava neprovede je nutno provést odhad na tuto chybu.

Systematické chyby pozorovatele

Tyto chyby vyplývají z nedokonalých pozorovacích možností člověka, vznikají špatnou smyslovou koordinací pozorovatele např. reakční dobou při měření časových údajů, omezenou rozlišovací schopností oka, úkosem (paralaxou) při čtení na stupnici, nepřesným odhadem částí dílků stupnice atd. Tyto chyby lze vyloučit tím, že subjektivní měření nahradíme objektivním pomocí přesného čidla spojeného s měřicím přístrojem.

1.2. Chyby náhodné

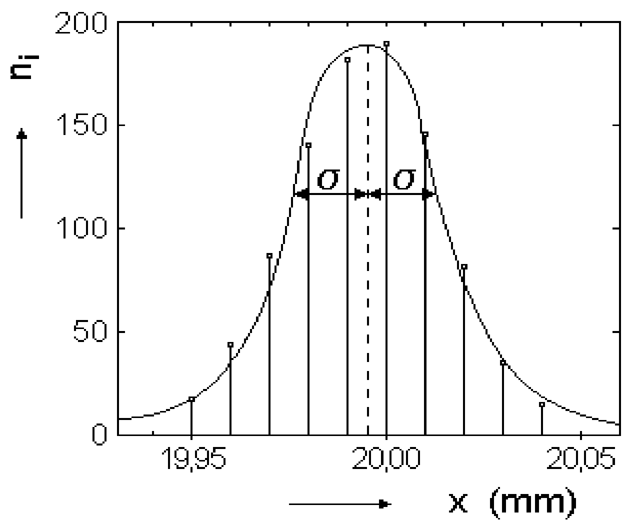
Předpokládejme, že vliv systematických chyb byl korigován. Budeme-li provádět opakovaná měření téže veličiny za stejných podmínek, zjistíme, že výsledky jednotlivých měření se poněkud liší. To je způsobeno velkou řadou vlivů jednotlivě nepostižitelných. Jsou to prostorové fluktuace veličin, které měření provázejí jako je tlak, teplota, vlhkost, magnetické pole nebo např. malé variace mechanických částí experimentálního zařízení (např. tření) apod. Náhodnou chybu si můžeme obecně představit složenou z velkého počtu velmi malých, ojediněle nepozorovatelných, elementárních chyb. Zdroje těchto elementárních chyb nejsou pod naší kontrolou (*vlivy nekontrolovatelné*) a mají za následek vznik chyb, které sice nelze vyloučit, které však při velkém počtu opakovaných měření vykazují statistické zákonitosti a tyto zákonitosti můžeme použít k odhadu vlivu náhodných chyb na přesnost měření.

Základní zákonitosti náhodných chyb u takovýchto souborů si přiblížíme následujícím **příkladem.**

V laboratoři bylo provedeno 1000 měření délky tyčky z tvrdé gumy. Všechna měření byla provedena stejným mikrometrem v místnosti, ve které teplota nepravidelně kolísala v rozmezí (20 ± 2) °C. Na mikrometrickém měřítku se daly spolehlivě odečítat hodnoty po 0,01mm. V souboru naměřených hodnot x_i (i =1,2…..1000) bylo celkem deset různých hodnot a to od 19,95 mm po 0,01 mm až do 20,04 mm. Číslo n_i vyjadřující počet, kolikrát se některá z těchto hodnot vyskytuje se nazývá *absolutní četnost* této hodnoty. Získané četnosti spolu s odpovídajícími naměřenými hodnotami jsou uvedeny v tabulce (tab.2**)** a také jsou graficky vyjádřeny na obr. 1 jako svislé úsečky v závislosti na hodnotě x_i .

Tab.2

naměřená hodnota x_i / mm	Abs.čet. n_i	relativ. četnost
19,95	17	0,017
19,96	48	0,048
19,97	95	0,095
19,98	150	0,150
19,99	190	0,190
20,00	198	0,198
20,01	154	0,154
20,02	87	0,087
20,03	43	0,043
20,04	18	0,018



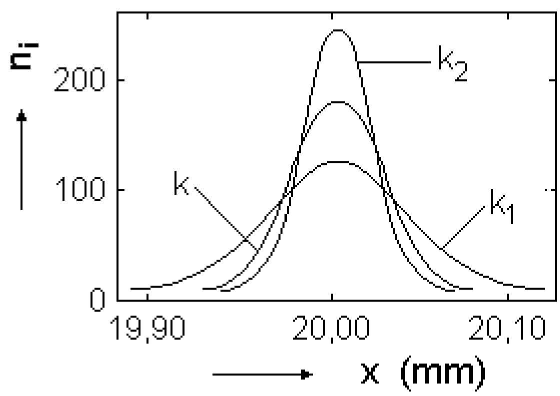
Obr.1 Normální Gaussovo rozdělení

Koncovými body úseček v grafu se dá proložit křivka. Při počtu měření $n \to \infty$ (základní soubor) by rozdělení naměřených hodnot bylo dokonale symetrické a znázorňovala by jej symetrická křivka zvonového tvaru (křivka v obr.1 - Gaussova křivka) vyjadřující **normální Gaussovo rozdělení veličiny.** Sklutečná hodnota měřené veličiny by odpovídala maximu křivky. U souboru konečného počtu měření (výběrový soubor) můžeme mluvit pouze o **nejpravděpodobnější hodnotě** měřené veličiny, která se skutečné hodnotě nejvíce blíží, a tou je **aritmetický průměr výběrového souboru** (často *pouze* aritmetický průměr)

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (4)$$

kde x_i jsou naměřené hodnoty a n počet měření.

Jestliže zvětšujeme počet měření, hodnota aritmetického průměru se více blíží skutečné hodnotě veličiny. Z tvaru křivky v grafu lze soudit na rozptyl naměřených



Obr.2 Normální rozdělení s různým rozptylem

hodnot x_i a tedy na přesnost měření. V obr. 2 jsou znázorněny křivky k, jejichž vrcholy odpovídají sice stejné hodnotě (u výběrového souboru stejnému aritmetickému průměru), ale různé přesnosti měření (nejštíhlejší křivce k_2 přísluší největší přesnost měření, křivce k_1 nejmenší přesnost). Mírou rozptylu je **směrodatná odchylka σ základního souboru**, odpovídající poloze inflexního bodu na Gaussově křivce. Rozptyl hodnot výběrového souboru charakterizuje **směrodatná odchylka výběrového souboru s_x** daná vztahem

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n-1}} \tag{5}$$

Protože opakovaná měření se vyhodnocují pomocí aritmetického průměru, používá se častěji **směrodatná odchylka aritmetického průměru výběrového souboru S_x** (často *pouze* nazývaná **směrodatná odchylka aritmetického průměru**), pro kterou platí

$$S_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n(n-1)}} \tag{6}$$

Ke zpracování opakovaných měření můžeme s výhodou použít statistického režimu odchylku podle vztahu (5), jejíž označení závisí na typu kalkulátoru. Tlačítko může být označeno symboly s nebo σ_{n-1} (příp. S_{n-1}), zatímco symboly σ nebo σ_n (příp S_n) označují tlačítko dávající směrodatnou odchylku σ základního souboru podle vztahu

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n}} \; . \tag{7}$$

Na základě směrodatné odchylky je možno spočítat chybu Δx vymezující kolem aritmetického průměru **interval spolehlivosti**. Skutečná střední hodnota měřené veličiny leží s pravděpodobností $P = 1 - \alpha$ v intervalu $\langle x - \Delta x, x + \Delta x \rangle$, kde

$$\Delta x = t_\alpha(f) S_x = t_\alpha(f) \frac{s_x}{\sqrt{n}} \; . \tag{8}$$

$t_\alpha(f)$	je koeficient Studentova rozdělení (Studentův koeficient - viz. tab. 3) ,
α	je zvolená hladina významnosti (riziko),
$f = n - 1$	je počet stupňů volnosti,
n	je počet měření.

Volíme-li α = 0,05, tedy $P = 0,95$, pak s pravděpodobností $P = 1-\alpha = 95\%$ leží skutečná hodnota měřené veličiny v intervalu ($x \pm \Delta x$). Pro biologické systémy je vhodné používat α = 0,05. Je-li počet měření $n = 10$, pak odečteme v tabulce koeficient $t_\alpha(f) = 2,262$. Výběr některých hodnot Studentových koeficientů je uveden v Tab.3.

Tab.3 Vybrané hodnoty Studentových koeficientů

α	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
n	5	10	20	31	41	61
f	4	9	19	30	40	60
$t_\alpha(f)$	2,776	2,262	2,093	2,042	2,021	2,000

Postup při zpracování opakovaných měření na kalkulačce nebo na počítači:

1) nastavení statistického programu na kalkulačce či počítači a vložení naměřených dat,
2) odečtení aritmetického průměru $\bar{x}$,
3) odečtení směrodatné odchylky s_x a výpočet směrodatné odchylky aritmetického průměru $s_{\bar{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$,
4) volba hladiny významnosti, zjištění hodnoty Studentova koeficientu pro dané $f = n - 1$ (viz tab.3) a výpočet absolutní chyby $\Delta x = t_\alpha(f) s_{\bar{x}}$,
5) vyjádření výsledku ve formě $x = (\bar{x} \pm \Delta x)$ s jednotkou měřené veličiny. Absolutní chybu zaokrouhlíme na jedno nebo dvě platná místa a výsledek zaokrouhlíme na stejný řád jako absolutní chybu,
4) příp. výpočet relativní chyby $\delta(x) = \Delta x / \bar{x}$ jako poměrného čísla nebo po vynásobení 100x vyjádřené v procentech.

2. Stanovení chyb při nepřímých metodách měření

Cílem přímé metody bylo zjistit hodnotu jediné veličiny, měření se provádělo buď jednou nebo opakovaně. V případě nepřímých metod, kdy se stanovuje veličina y na základě vztahu, ve kterém vystupuje jedna nebo více přímo měřených veličin $x_1 \ldots x_n$ a konstant $C_1 \ldots C_n \ldots$ tj. $y = f(x_1 \ldots x_n, C_1 \ldots C_n)$, platí pro výpočet chyby $\Delta(y)$ *zákon hromadění chyb* (někdy též zákon šíření chyb). Jestliže pro zjednodušení budeme předpokládat, že chyby konstant jsou zanedbatelné vzhledem ke známým chybám $\Delta(x_1) \ldots \Delta(x_n)$ měřených veličin $x_1 \ldots x_n$, má zákon hromadění chyb tvar

$$\Delta(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \Delta^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \Delta^2(x_2) + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \Delta^2(x_n)} \qquad (9)$$

Pro účely laboratorního cvičení používáme jednodušší formu tohoto zákona ve tvaru

$$\Delta(y) = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta(x_1)\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta(x_2)\right| + \ldots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta(x_n)\right| \qquad (10)$$

Obecný vzorec (0.9) lze ve speciálních případech funkčních závislostí nahradit jednodušším výrazem pro výpočet chyby nepřímo měřené veličiny.

1. V případě funkce vyjádřené jako *k-násobek* (k je číselná konstanta) měřené veličiny x
   $y = kx$ je chyba výsledné veličiny $\Delta y = k\Delta x$ (11)

tedy k-násobek chyby Δx měřené veličiny.V případě funkce vyjádřené jako *součet nebo rozdíl* měřených veličin x_1 a x_2

$$y = x_1 \pm x_2,$$

je chyba Δy výsledné veličiny $\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$ (12)

2. V případě funkce vyjádřené *jako n-tá mocnina* měřené veličiny

$y = kx^n$ (k je číselná konstanta)

je nejvhodnější vyjádřit *relativní chybu* $\delta(y) = \dfrac{\Delta(y)}{y}$ výsledné veličiny a platí vztah

$$\delta(y) = |n\delta(x)| \ . \qquad (13)$$

3. V případě funkce vyjádřené jako *součin mocnin* měřených veličin $y = kx_1^{\alpha}.x_2^{\beta}.x_3^{\gamma}\ldots$, kde k, α, β, γ... jsou reálné konstanty, je relativní chyba $\delta(y)$ výsledné veličiny určena relativními chybami jednotlivých měřených veličin $x_1,\ldots x_n$ podle vztahu

$$\delta(y) = |\alpha\delta(x_1)| + |\beta\delta(x_2)| + |\gamma\delta(x_3)| + \ldots \ . \qquad (14)$$

4. Podle (14) lze vyjádřit např. relativní chybu $\delta(y)$ funkce $y = kx_1 x_2^{\pm 1}$ (k je číselná konstanta) vztahem

$$\delta(y) = \delta(x_1) + \delta(x_2) \ . \qquad (15)$$

5. Pro relativní chybu $\delta(y)$ funkce $y = x_1 \pm x_2$, uvedené výše pod bodem 1 platí podle (12)

$$\delta(y) = \left|\frac{\Delta(x_1 \pm x_2)}{x_1 \pm x_2}\right| = \left|\frac{\Delta(x_1) + \Delta(x_2)}{x_1 \pm x_2}\right| \qquad (16)$$