MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
Přírodovědecká fakulta

DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ V OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOHÁCH

BRNO,květen 2005

Hana Prudilová

Děkuji touto cestou Prof. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc. za cenné rady a pečlivé vedení diplomové práce, rovněž za trpělivost a pochopení.

Prohlašuji, že jsem pracovala samostatně, a že jsem použila pouze uvedené literatury.

Hana Prudilová
27.5.2005

Obsah

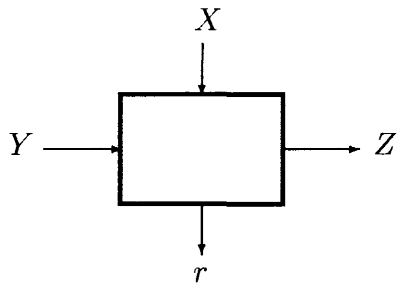
Úvod

Dynamické programování se používá k řešení komplexních optimalizačních problémů. Tato metoda byla rozpracována Richardem Bellmanem v 50. letech minulého století a základy této teorie jsou shrnuty v jeho monografii [1].
Cílem této diplomové práce je vysvětlit základní myšlenku této optimalizační metody a ukázat její použití na příkladech v případě konečně a nekonečněkrokového deterministického rozhodovacího procesu.
Práce je rozdělena do dvou kapitol. V první kapitole výkladu je specifikován obecný konečněkrokový rozhodovací proces a popis řešení. Ve druhé kapitole je rozebrán nekonečněkrokový rozhodovací proces, metody jeho řešení s použitím funkcionálních rovnic a na závěr obou kapitol je popsaná teorie aplikována na různé typy úloh.
Hlavním zdrojem při zpracování tématu byly práce R. Bellmana [1] a G.L. Nemhausera [3].
Předpokládá se, že čtenář je seznámen se základy matematické analýzy a matematického programování v rosahu, v jakém jsou tyto probírány v kurzech na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity.

Kapitola 1

Konečněkrokový deterministický rozhodovací proces

Při řešení nějakého komplexního rozhodovacího problému se často používá dekompozice, kdy je původní rozhodovací problém rozložen na řadu z jistého pohledu jednodušších problémů a výsledek získán kombinací a složením řešení těchto subproblémů. Tuto metodu nazýváme rozklad vícerozměrného problému.
Rozhodovací situace nastává, pokud existuje více než jedno přípustné řešení. Cílem rozhodování nebo optimalizačního problému bude určení jednoho řešení (rozhodnutí), které dává optimální výsledek.
Začneme s výkladem vlastností typické situace obecného vícekrokového rozhodovacího procesu. Je dána rozhodovací situace, kterou můžeme schématicky znázornit následujícím obrázkem



ve kterém je:

- *Vstupní veličina* Y, která se nazývá počáteční stav systému, představuje v něm popis počátečního stupně a obsahuje všechny relevantní vstupní informace.
- *Výstupní stavová veličina* Z, popisující systém v konečné úrovni, obsahuje všechny informace o výstupu.
- *Rozhodovací proměnná* X, která charakterizuje operace probíhající v průběhu jednotlivých kroků.

- *Účelová funkce* r představuje skalární proměnnou. Je to jednorozměrná funkce vstupu, rozhodování a výstupu, tzn.

$$r = r(Y, X, Z).$$

- *Transformační funkce* y, která vyjadřuje každou komponentu výstupní proměnné jako funkci vstupu a rozhodování,

$$Z = y(Y, X).$$

Pomocí transformační funkce y můžeme veličinu Z z účelové funkce vyeliminovat a dostáváme

$$r = r(Y, X, Z) = r(Y, X, y(Y, X)),$$

to znamená, že jednotlivé nezávislé proměnné, které ovlivňují výsledek, jsou Y a X. Jejich hodnoty jednoznačně určují hodnotu Z prostřednictvím transformační funkce y.
Účelovou funkci můžeme tedy uvažovat pouze jako funkci[1] vstupní a rozhodovací proměnné

$$r = r(Y, X).$$

Jednorozměrný optimalizační problém spočívá v nalezení maxima resp. minima účelové funkce jako funkce vstupní veličiny. Označme $f(Y)$ jako optimální výnos a $X^* = X(Y)$ jako optimální rozhodnutí. Potom obdržíme

$$f(Y) = r(Y, X^*) = r(Y, X(Y)) = \max_X r(Y, X) \geq r(Y, X).$$

V některých rozhodovacích situacích má být účelová funkce r, vyjadřující optimální výnos, určena jako funkce výstupu Z. Můžeme předpokládat Y jako jednoznačnou funkci Z a X, což dostaneme z inverze transformace

$$Z = y(Y, X).$$

Obdržíme tedy

$$Y = \overline{y}(Z, X).$$

Vyjádříme výnos pouze jako funkci rozhodnutí a výstupu:

$$r = r(\overline{y}(Z, X), X, Z) = r(Z, X).$$

Optimalizačním problémem je nalezení X jako funkci Z tak, aby r bylo maximální.
Buď $f(Z)$ optimální výnos a $X^* = X(Z)$ optimální rozhodnutí,

$$f(Z) = r(Z, X^*) = \max_X r(Z, X) = \max_{Y,X} r(Y, Z, X)$$

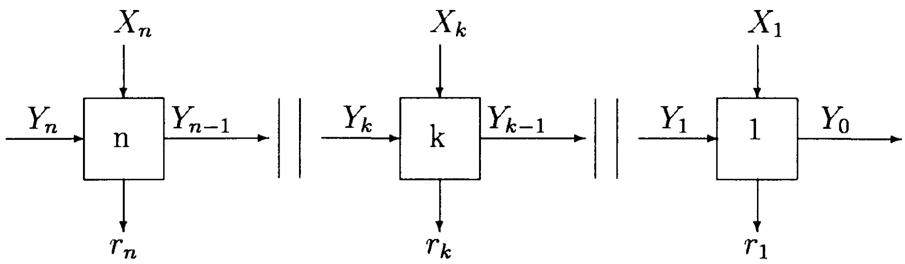
za podmínky $Z = y(Y, X)$ a je-li možné invertovat transformaci y, můžeme tedy provést maximalizaci přes Y a X.

Poznámka 1. Je lhostejné, zda uvažujeme optimalizační úlohu na maximum nebo na minimum, neboť maximalizovat funkci f je totéž, jako minimalizovat funkci $-f$.

[1] označme ji opět r

1.1 Obecné schéma rozhodovacího procesu

Obecný rozhodovací proces, popsaný v předchozím odstavci se ve většině případů sestává z řady rekurzivně provázaných rozhodnutí tak, že výstup jednoho kroku je zároveň vstupem dalšího kroku, což můžeme znázornit následujícím schématem



Z důvodu, který bude patrný z konkrétních příkladů, prvnímu rozhodovacímu kroku přiřadíme index n a poslednímu index 1, tj. rozhodovací kroky jsou očíslovány v sestupném pořadí.

Pro k-tý krok n-rozměrného systému je výstupní veličina Y_{k-1} zároveň vstupem $(k-1)$-kroku, tedy transformační rovnice $Y = y(Y, X)$ je tvaru

$$Y_{k-1} = y_k(Y_k, X_k), \qquad \text{pro každé } k = 1, 2, ..., n, \tag{1.1}$$

a výnos tohoto kroku je

$$r_k = r_k(Y_k, X_k).$$

Z transformace (1.1) plyne, že Y_k závisí na rozhodnutích, které předcházejí k-tému kroku, tedy na $X_{k+1}, \ldots, X_n$, a na Y_n:

$$\begin{aligned} Y_k &= y_{k+1}(Y_{k+1}, X_{k+1}) = y_{k+1}(y_{k+2}(Y_{k+2}, X_{k+2}), X_{k+1}) \\ &= y_{k+1}(Y_{k+2}, X_{k+2}, X_{k+1}) = y_{k+1}(y_{k+3}(Y_{k+3}, X_{k+3}), X_{k+1}, X_{k+2}) \\ &= \cdots = y_{k+1}(Y_n, X_n, X_{n-1} \ldots, X_k). \end{aligned}$$

Poznámka 2. Poslední zápis není zcela korektní, protože y_{k+1} je funkce dvou proměnných. Nebudeme však funkční závislost Y_k na $Y_n, X_n, X_{n-1} \ldots, X_k$ označovat novým symbolem. Podobné nepřesnosti se dopustíme i ve zbývající části tohoto odstavce.

Dosazením do účelové funkce

$$\begin{aligned} r_k &= r_k(Y_k, X_k) = r_k(y_{k+1}(Y_n, X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{k+1}), X_k) = \\ &= r_k(Y_n, X_n, X_{n-1}, \ldots, X_k), \end{aligned}$$

jinými slovy, X_k ovlivňuje jenom výnos prvního až k-tého kroku. Celkový výnos R_n z prvního až n-tého kroku je funkce

$$\begin{aligned} &R_n(Y_n, Y_{n-1}, \ldots, Y_1, X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1) \\ &= g\left[r_n(Y_n, X_n), r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}), \ldots, r_1(Y_1, X_1)\right], \end{aligned}$$

kde g je zatím nespecifikovaná funkce n proměnných vyjadřující, jak jednotlivé výnosy r_k, pro každé $k = 1, \dots, n$, příspívají k celkovému výnosu R_n.

Nyní z výrazu pro celkový výnos eliminujeme $(Y_{n-1}, \dots, Y_1)$. Z rovnice (1.1), dále pomocí výrazu pro r_k, tedy $r_k = r_k(Y_k, X_k)$ a z rovnice $r_k = r_k(Y_n, X_n, X_{n-1}, \dots, X_k)$ dostaneme rovnici

$$R_n = g(r_n, \dots, r_1) = g\left[r_n(Y_n, X_n), r_{n-1}(Y_n, X_n, X_{n-1}), \dots, r_1(Y_n, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)\right].$$

Máme tedy optimalizační problém: maximalizovat celkový zisk R_n při dílčích rozhodnutích $X_1, X_2, \dots, X_n$, jako funkci vkladu Y_n.

Položme funkci $f_n(Y_n)$ jako maximální výnos v n-tém kroku a $X_k{}^* = X_k(Y_n)$ jako optimální rozhodnutí v k-tém kroku

$$\begin{aligned} f_n(Y_n) &= g\left[r_n(Y_n, X_n^*), r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}^*), \dots, r_1(Y_1, X_1^*)\right] \\ &= \max_{X_1, \dots, X_n} g\left[r_n(Y_n, X_n), r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}), \dots, r_1(Y_1, X_1)\right], \end{aligned}$$

za podmínky $Y_{k-1} = y_k(Y_k, X_k)$, pro každé $k = 1, \dots, n$. Tedy

$$f_n(Y_n) = \max_{X_1, \dots, X_n} g\left[r_n(Y_n, X_n), r_{n-1}(Y_n, X_n, X_{n-1}), \dots, r_1(Y_n, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)\right].$$

1.2 Dekompozice

Cílem bude rozložit problém

$$f_n(Y_n) = \max_{X_1, \dots, X_n} g\left[r_n(Y_n, X_n), r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}), \dots, r_1(Y_1, X_1)\right],$$

za podmínky $Y_{k-1} = y_k(Y_k, X_k)$ na n jednodušších subproblémů. Předpokládejme, že celková účelová funkce je aditivní funkcí účelových funkcí v jednotlivých krocích, tj.

$$R_n = r_n(Y_n, X_n) + r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}) + \dots + r_1(Y_1, X_1),$$

potom

$$f_n(Y_n) = \max_{X_1, \dots, X_n} \{r_n(Y_n, X_n) + r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}) + \dots + r_1(Y_1, X_1)\},$$

za podmínky $Y_{k-1} = y_k(Y_k, X_k), \quad k = 1, \dots, n.$

Výnos n-tého kroku nezávisí na $X_{n-1}, \dots, X_1$, můžeme tedy předchozí rovnost přepsat ve tvaru

$$f_n(Y_n) = \max_{X_n}\{r_n(Y_n, X_n) + \max_{X_1, \dots, X_{n-1}} [r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}) + \dots + r_1(Y_1, X_1)]\}. \tag{1.2}$$

Z definice $f_n(Y_n)$ získáme

$$f_{n-1}(Y_{n-1}) = \max_{X_{n-1}, \dots, X_1} \{r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}) + \dots + r_1(Y_1, X_1)\}.$$

Použijeme-li tento vztah v rovnici (1.2), dostaneme

$$f_n(Y_n) = \max_{X_n}\{r_n(Y_n, X_n) + f_{n-1}(Y_{n-1})\},$$

a tedy

$$f_n(Y_n) = \max_{X_n}\{r_n(Y_n, X_n) + f_{n-1}(y_n(Y_n, X_n))\}.$$

Položme nyní

$$Q_n(Y_n, X_n) = r_n(Y_n, X_n) + f_{n-1}(y_n(Y_n, X_n)).$$

Potom je určení $f_n(Y_n)$ při dané funkci $f_{n-1}(Y_{n-1})$ jednoduchý jednorozměrný optimalizační problém se vstupní proměnnou Y_n, rozhodovací proměnnou X_n a výnosem Q_n. Tedy

$$f_n(Y_n) = \max_{X_n} Q_n(Y_n, X_n) = \max_{X_n}\{r_n(Y_n, X_n) + f_{n-1}(y_n(Y_n, X_n))\}.$$

Původní n-rozměrný problém máme tedy rozložený na dva subproblémy:

1. $(n-1)$ - rozměrný optimalizační problém

$$f_{n-1}(Y_{n-1}) = \max_{X_{n-1},\dots,X_1}\{r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}) + \cdots + r_1(Y_1, X_1)\},$$

   za podmínky $Y_{k-1} = y_k(Y_k, X_k), \quad k = 1, \dots, n-1;$

2. jednorozměrný optimalizační problém

$$\begin{aligned} f_n(Y_n) &= \max_{X_n} Q_n(Y_n, X_n) \\ &= \max_{X_n}\{r_n(Y_n, X_n) + f_{n-1}(t_n(Y_n, X_n))\}. \end{aligned}$$

Podobným postupem při určování $f_{n-1}, \dots, f_1$ dostaneme následující rekurzivní schéma

$$f_k(Y_k) = \max_{X_k}\ Q_k(Y_k, X_k), \qquad \text{pro } k = 1, \dots, n$$

$$Q_k(Y_k, X_k) = \begin{cases} r_1(Y_1, X_1), & \text{pro } k = 1, \\ r_k(Y_k, X_k) + f_{k-1}(y_n(Y_k, X_k)), & \text{pro } k = 2, \dots, n \end{cases}$$

Poznámka 3. *Optimalizace v koncovém kroku*
Speciálním případem rozhodovacího procesu, který lze zkoumat v rámci výše popsaného obecného schématu je maximalizace jisté funkce v koncové proměnné. Tento případ se nazývá optimalizace v koncovém produktu. Uvažujme optimalizační problém

$$f_n(Y_n) = \max_{X_n,\dots,X_1} g(Y_0)$$

za podmínky $Y_{k-1} = y_k(Y_k, X_k)$, $k = 1, \dots, n$. Předpokládejme, že pro výnosy ve 2.,3.,...,n-tém kroku platí

$$r_n(Y_n, X_n) = r_{n-1}(Y_{n-1}, X_{n-1}) = \cdots = r_2(Y_2, X_2) = 0$$

a pro výnos v 1. kroku

$$r_1(Y_1, X_1) = g\,[y_1(Y_1, X_1)] = g(Y_0).$$

Pak platí

$$r_n(Y_n, X_n) + \cdots + r_1(Y_1, X_1) = g(Y_0).$$

Odtud můžeme psát

$$f_n(Y_n) = \max_{X_n,\dots,X_1} [\, r_n(Y_n, X_n) + \cdots + r_1(Y_1, X_1)]\,.$$

Nechť platí

$$z_n = 0 \qquad \text{a} \qquad z_k = \sum_{t=k+1}^{n} r_t(Y_t, X_t), \qquad \text{pro } k = 0, \dots, n-1.$$

Položme pevně

$$z_0 = \sum_{k=1}^{n} r_k(Y_k, X_k) \qquad \text{a} \qquad z_{k-1} = z_k + r_k(Y_k, X_k), \qquad \text{pro } k = 1, \dots, n;$$

potom platí

$$f_n(Y_n) = \max_{X_1,\dots,X_{n-1}} \{z_0\}$$

za podmínky $Y_{k-1} = y_k(Y_k, X_k)$ a $z_{k-1} = z_k + r_k(Y_k, X_k)$, kde $k = 1, \dots, n$.

1.3 Příklady

Příklad 1.3.1. Řešte extrémální úlohu

$$\sum_{k=1}^{n} r(x_k) \;\rightarrow\; \min,\; x_1 + ... + x_n \geq \alpha,\; x_1, ..., x_n \geq 0,$$

kde r je konvexní a rostoucí funkce a $\alpha \in \mathbb{R}$.
Řešení:
Označme $y_n = x_1 + ... + x_n$, $y_{k-1} = y_k - x_k$, pro každé $k = 2, \ldots, n$ a $y_0 = y_1 - x_1 = 0$.
Z poslední rovnice máme $y_1 = x_1$. Použijeme rekurzívní schéma

$$f_k(y_k) = \min_{0<x_k\leq y_k} \{r(x_k) + f_{k-1}(y_{k-1})\}$$

S využitím vztahu $y_1 = x_1$ dostaneme pro $k = 1$:

$$f_1(y_1) = \min_{x_1=y_1} r(x_1) = r(y_1).$$

Nyní počítejme pro $k = 2$, použijeme vazebné podmínky $y_{k-1} = y_k - x_k$, tedy $y_1 = y_2 - x_2$ a odtud

$$f_2(y_2) = \min_{0\leq x_2\leq y_2} \{r(x_2) + f_1(y_1)\} = \min_{0\leq x_2\leq y_2} \{r(x_2) + r(y_2 - x_2)\},$$

hledáme tedy takové x_2, pro které bude výraz ve složených závorkách minimální. Derivaci podle x_2 položíme rovnu nule

$$r'(x_2) - r'(y_2 - x_2) = 0,$$

z podmínky pro funkci r (monotonie) obdržíme

$$x_2 = \frac{y_2}{2} \quad\Longrightarrow\quad f_2(y_2) = r\left(\frac{y_2}{2}\right) + r\left(\frac{y_2}{2}\right) = 2r\left(\frac{y_2}{2}\right).$$

Stejným způsobem spočítáme výraz pro $k = 3$:

$$f_3(y_3) = \min_{0\leq x_3\leq y_3} \{r(x_3) + f_2(y_2)\} = \min_{0\leq x_3\leq y_3} \left\{r(x_3) + 2r\left(\frac{y_3 - x_3}{2}\right)\right\},$$

opět derivujeme (podle x_3)

$$r'(x_3) - r'\left(\frac{y_3 - x_3}{2}\right) = 0 \quad\overset{\text{monotonie}}{\Longrightarrow}\quad x_3 = \frac{y_3 - x_3}{2} \quad\Longrightarrow\quad x_3 = \frac{y_3}{3},$$

dosadíme do $f_3(y_3)$ a dostáváme

$$f_3(y_3) = r(\frac{y_3}{3}) + 2r(\frac{y_3}{3}) = 3r(\frac{y_3}{3}).$$

Z předchozích výsledků odvodíme výraz pro k-tý člen:

$$f_k(y_k) = r(\frac{y_k}{k}) + (k-1)r(\frac{y_k}{k}) = kr(\frac{y_k}{k}), \quad \text{pro každé } k = 1, ..., n \ , \quad x_k = \frac{y_k}{k},$$

tento vzorec ověříme pro n-tý krok:

$$f_n(y_n) = \min_{0 \le x_n \le y_n} \{r(x_n) + f_{n-1}(y_{n-1})\} = \min_{0 \le x_n \le y_n} \left\{r(x_n) + (n-1)\, r\left(\frac{y_n - x_n}{n-1}\right)\right\} \implies$$

$$r'(x_n) - r'\left(\frac{y_n - x_n}{n-1}\right) = 0 \quad \overset{\text{monotonie}}{\Longrightarrow} \quad x_n = \frac{y_n - x_n}{n-1} \quad \Longrightarrow \quad x_n = \frac{y_n}{n}$$

Z transformačního vzorce $y_{n-1} = y_n - x_n$ a extrému v bodě $x_n = \dfrac{y_n}{n}$ dostaneme

$$y_{n-1} = y_n - x_n = y_n - \frac{y_n}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right) y_n \ .$$

Vypočítáme-li zpětně extrémy x_k, pro $k = n-1, \ldots, 1$, dostaneme

$$x_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) y_n = \frac{y_n}{n} \ , ..., \ x_1 = \frac{y_n}{n}$$

Nyní máme minimalizovat funkci $f_n(y_n) = r\left(\frac{y_n}{n}\right) + (n-1)\, r\left(\frac{y_n}{n}\right) = n\, r\left(\frac{y_n}{n}\right)$, za podmínky $y_n \ge \alpha$. Protože r je rostoucí funkce, pak výraz $r\left(\frac{y_n}{n}\right)$ bude nabývat nejmenší hodnoty při $y_n = \alpha$.
Dosazením do výrazů pro x získáme optimální hodnoty

$$x_n^* = \frac{\alpha}{n} = x_{n-1}^* = ... = x_1^*$$

a tedy $x_k^* = \frac{\alpha}{k}$, $k = 1, \ldots, n$. Výsledek tedy je

$$f_n(y_n) = \min\{r(x_1) + \cdots + r(x_n) \ | x_1 + \ldots x_n\} = n\, r\left(\frac{\alpha}{n}\right).$$

Příklad 1.3.2. Řešte extrémální úlohu

$$\sum_{k=1}^{n} r(x_k) \ \to \ \min, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k \ge \alpha, \quad x_k \ge 0,$$

kde r je konvexní a rostoucí funkce, a $\alpha \in \mathbb{R}$
Řešení:
Označme $y_n = \prod_{k=1}^{n} x_k$, $y_{k-1} = \frac{y_k}{x_k}$, pro každé $k = 2, \ldots, n$ a je zřejmé, že $y_1 = x_1$. Použijeme rekurzívní schéma

$$f_k(y_k) = \min_{0 \le x_k \le y_k} \{r(x_k) + f_{k-1}(y_{k-1})\}.$$

S využitím vztahu $y_1 = x_1$ dostaneme pro $k = 1$:

$$f_1(y_1) = \min_{x_1 = y_1} r(x_1) = r(y_1).$$

Nyní počítejme pro $k = 2$, použijeme $y_{k-1} = \frac{y_k}{x_k}$, tedy $y_1 = \frac{y_2}{x_2}$ a odtud

$$f_2(y_2) = \min_{0 \le x_2 \le y_2} \{r(x_2) + f_1(y_1)\} = \min_{0 \le x_2 \le y_2} \{ \underbrace{r(x_2) + r(\frac{y_2}{x_2})}_{\text{derivujeme podle } x_2} \}$$

$$r'(x_2) - \frac{y_2}{{x_2}^2} r'(\frac{y_2}{x_2}) = 0,$$

z podmínky pro funkci r (monotonie) dostaneme

$$\frac{y_2}{{x_2}^2} = 1 \implies \frac{y_2}{x_2} = x_2 \implies x_2 = \sqrt{y_2},$$

a tedy $f_2(y_2) = r\left(\sqrt{y_2}\right) + r\left(\frac{y_2}{\sqrt{y_2}}\right) = 2r\left(\sqrt{y_2}\right)$.
Stejným způsobem spočítáme výraz pro $k = 3$:

$$f_3(y_3) = \min_{0 \le x_3 \le y_3} \{r(x_3) + f_2(y_2)\} = \min_{0 \le x_3 \le y_3} \left\{r(x_3) + 2r\left(\sqrt{\frac{y_3}{x_3}}\right)\right\},$$

opět derivujeme (podle x_3)

$$r'(x_3) - 2r'\left(\sqrt{\frac{y_3}{x_3}}\right) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{y_3}}{{x_3}^{\frac{3}{2}}} \overset{\text{mon.}}{\Longrightarrow} \frac{\sqrt{y_3}}{x^{\frac{3}{2}}} = 1 \implies x_3 = (y_3)^{\frac{1}{3}},$$

dosadíme do $f_3(y_3)$ a dostáváme

$$f_3(y_3) = r((y_3)^{\frac{1}{3}}) + 2r\left(\sqrt{\frac{y_3}{(y_3)^{\frac{1}{3}}}}\right) = 3r\left((y_3)^{\frac{1}{3}}\right).$$

Z předchozích výsledků odvodíme výraz pro k-tý člen:

$$f_k(y_k) = r(\frac{y_k}{k}) + k\,r(\frac{y_k}{k}) = kr(\frac{y_k}{k}), \quad k = 1, ..., n \;, \quad x_k = \frac{y_k}{k}$$

a tento vzorec ověříme pro n-tý krok:

$$f_n(y_n) = \min_{0 \le x_n \le y_n} \{r(x_n) + f_{n-1}(y_{n-1})\} = \min_{0 \le x_n \le y_n} \left\{r(x_n) + (n-1)\,r\left(\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)\right\},$$

derivujeme:

$$r'(x_n) - r'\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{n-1}\left(\frac{y_n}{x_n^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \overset{\text{mon.}}{\Longrightarrow} \left(\frac{y_n}{x_n^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 1 \implies x_n = (y_n)^{\frac{1}{n}},$$

dosazením do výrazu pro $f_n(y_n)$ získáme

$$f_n(y_n) = r((y_n)^{\frac{1}{n}}) + (n-1)\, r\left(\left(\frac{y_n}{(y_n)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) = n\,(y_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Tento výraz chceme minimalizovat za podmínky $y_n \geq \alpha$. Nejmenší hodnoty bude nabývat při $y_n = \alpha$, a optimální hodnoty jsou:

$$y_n^* = \alpha\,,\; x_n^* = \alpha^{\frac{1}{n}}, \ldots, x_k^* = \alpha^{\frac{1}{n}}, \ldots, x_1^* = \alpha^{\frac{1}{n}}.$$

Výsledek je tedy

$$f_n(y_n) = \min\{r(x_1) + \cdots + r(x_n) \| x_1 \cdots x_n = y_n\} = n\,(\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

Příklad 1.3.3. Řešte extrémální úlohu

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \to \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \alpha, \quad x_k \geq 0,$$

Řešení:
Označme $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \alpha, y_{k-1} = y_k - x_k$, pro každé $k = 2, \ldots, n$ a $y_0 = y_1 - x_1 = 0$. Z poslední rovnice máme $y_1 = x_1$. Použijeme rekurzívní schéma

$$f_k(y_k) = \max_{0 \leq x_k \leq y_k} \{x_k \cdot f_{k-1}(y_{k-1})\}.$$

S využitím vztahu $y_1 = x_1$ dostaneme pro $k = 1$:

$$f_1(y_1) = \max_{y_1 = x_1} x_1 = y_1.$$

Nyní počítejme pro $k = 2$, použijeme vazebné podmínky $y_{k-1} = y_k - x_k$, tedy $y_1 = y_2 - x_2$, odtud

$$f_2(y_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq y_2} \{x_2 f_1(y_1)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq y_2} \{ \underbrace{x_2(y_2 - x_2)}_{\text{derivujeme podle } x_2} \} \implies x_2 = \frac{y_2}{2},$$

a tedy $f_2(y_2) = \dfrac{{y_2}^2}{4}$.

Počítáme výraz pro $k = 3$:

$$f_3(y_3) = \max_{0 \le x_3 \le y_3} \{x_3 f_2(y_2)\} = \max_{0 \le x_3 \le y_3} \{x_3 \frac{1}{4}(y_3 - x_3)^2\},$$

položením derivace podle x_2 rovno nule máme $x_3 = \frac{y_3}{3}$, dosadíme do $f_3(y_3)$:

$$f_3(y_3) = \frac{y_3}{3}\frac{1}{4}\left(y_3 - \frac{y_3}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}{y_3}^3.$$

Z předchozích výsledků odvodíme pro k-tý člen:

$$f_k(y_k) = \frac{{y_k}^k}{k^k} \quad \Longrightarrow \quad x_k = \frac{y_k}{k},$$

vzorec ověříme pro n-tý krok:

$$f_n(y_n) = \max_{0 \le x_n \le y_n} \{x_n f_{n-1}(y_{n-1})\} = \max_{0 \le x_n \le y_n} \left\{x_n \frac{1}{(n-1)^{n-1}}(y_n - x_n)^{n-1}\right\}.$$

Položíme-li parciální derivaci podle x_n rovnu nule, obdržíme:
$x_n = \frac{y_n}{n}$, dosazením do výrazu pro $f_n(y_n)$:

$$f_n(y_n) = \frac{y_n}{n}\frac{1}{(n-1)^{n-1}}\left(y_n - \frac{y_n}{n}\right)^{n-1} = \frac{y_n^n}{n^n}.$$

Má-li být $f_n(y_n)$ maximální za podmínky $y_n \le \alpha$, potom $y_n = \alpha$, a pro výrazy x_k, pro $k = 1, \ldots, n$ potom platí:

$$\begin{aligned}
x_n^* &= \frac{y_n}{n} = \frac{\alpha}{n}, \\
x_{n-1}^* &= \frac{y_{n-1}}{n-1}, \quad y_{n-1} = y_n - x_n^* = y_n - \frac{y_n}{n} = \frac{n-1}{n}y_n \\
x_{n-1}^* &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}y_n = \frac{y_n}{n} = \frac{\alpha}{n} \\
&\vdots \\
x_{n-1}^* &= \frac{y_n}{n} = \frac{\alpha}{n}
\end{aligned}$$

Obdrželi jsme výsledek

$$f_n(y_n) = \max\{x_1 \cdots x_n |\ x_1 + \cdots + x_n = y_n\} = \frac{\alpha^n}{n^n}.$$

Příklad 1.3.4. Řešte extrémální úlohu Ch. Huygense[2]

$$\frac{x_1x_2\dots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\dots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}\to\max,$$

za podmínky $a\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n\le b$.

Interpretace: do intervalu (a,b) se mají rozmístit čísla $x_1\dots x_n$ tak, aby uvedená veličina byla maximální.

Řešení: Označme

$$F_n(a,b)=\max_{a\le x_1\le\dots\le x_n\le b}\frac{x_1x_2\dots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\dots(x_n+b)}.$$

Nyní rozepíšeme $F_n(a,b)$ jako

$$F_n(a,b)=\max_{a\le x_n\le b}\frac{x_n}{x_n+b}\cdot\max_{a\le x_1\le\dots\le x_n}\frac{x_1\dots x_{n-1}}{(a+x_1)\dots(x_{n-1}+x_n)}.$$

Počítejme

$$F_1(a,x_2)=\max_{a\le x_1\le x_2}\frac{x_1}{(a+x_1)(x_1+x_2)}$$

Hledáme takové x_1, pro které bude výraz maximální. Budeme derivovat podle x_1

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{x_1}{(a+x_1)(x_1+x_2)}\right]&=\frac{(a+x_1)(x_1+x_2)-x_1(a+x_1+x_1+x_2)}{(a+x_1)^2(x_1+x_2)^2}=\\&=\frac{-x_1^2+ax_2}{(a+x_1)^2(x_1+x_2)^2},\end{aligned}$$

derivaci položíme rovnu nule a vyjádříme x_1

$$x_1=\sqrt{ax_2}.$$

Dosadíme zpět do funkce $F_1(a,x_2)$

$$\begin{aligned}F_1(a,x_2)&=\frac{\sqrt{ax_2}}{(a+\sqrt{ax_2})(\sqrt{ax_2}+x_2)}=\frac{\sqrt{ax_2}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_2}(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})}=\\&=\frac{\sqrt{ax_2}}{\sqrt{ax_2}(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^2}=\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^2}.\end{aligned}$$

Pro $x_1=a$ nebo $x_1=x_2$ (krajní body intervalu maximalizace) dostáváme hodnotu $\frac{1}{2(a+x_2)}$, která je menší než $\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^2}$, tedy maxima je opravdu nabyto ve stacionárním bodě $x_1=\sqrt{ax_2}$.

Dále využijeme rekurzivního schématu

$$\begin{aligned}F_k(a,x_{k+1})&=\max_{a\le x_k\le x_{k+1}}\frac{x_k}{x_k+x_{k+1}}\cdot\max_{a\le x_k\le x_{k+1}}\frac{x_1\dots x_{k-1}}{(a+x_1)\dots(x_{k-1}+x_k)}=\\&=\max_{a\le x_k\le x_{k+1}}\frac{x_k}{x_k+x_{k+1}}F_{k-1}(a,x_k)\end{aligned}$$

[2]Christian Huygens (1629-1695), nizozemský matematik a fyzik.

Tohoto schématu využijeme pro výpočet $F_2(a,x_3)$

$$F_2(a,x_3) = \max_{a\le x_2\le x_3} \frac{x_2}{x_2+x_3} F_1(a,x_2) = \max_{a\le x_2\le x_3} \left\{ \frac{x_2}{x_2+x_3} \cdot \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^2} \right\}.$$

Výraz ve složených závorkách opět budeme derivovat podle x_2, derivaci položíme rovnu nule, abychom získali takové x_2, pro které bude výraz maximální (podobně jako v předchozím kroku lze ukázat, že maxima je vskutku nabyto ve stacionárním bodě a nikoliv v jednom z krajních bodů $x_2 = a$, $x_2 = x_3$):

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{x_2}{x_2+x_3}\cdot\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^2}\right] = \frac{x_2+x_3-x_2}{(x_2+x_3)^2}\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^2} + \frac{x_2}{x_2+x_3}\frac{-2\frac{1}{2\sqrt{x_2}}}{(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^3} =$$
$$= \frac{1}{(x_2+x_3)(\sqrt{a}+\sqrt{x_2})^2}\left[\frac{x_3}{x_2+x_3} - \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{a}+\sqrt{x_2}}\right] = 0.$$

Vypočítáme a získáme x_2

$$\sqrt{a}x_3 + x_3\sqrt{x_2} - x_2\sqrt{x_2} - x_3\sqrt{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = (\sqrt{a}x_3)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{ax_3^2}.$$

Máme tedy x_2, pro které je funkce $F_2(a,x_3)$ maximální, dosadíme a máme

$$F_2(a,x_3) = \frac{\sqrt[3]{ax_3^2}}{\sqrt[3]{ax_3^2}+x_3}\cdot\frac{1}{[\sqrt{a}+(\sqrt{a}x_3)^{\frac{1}{3}}]^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{2}{3}}}{x_3^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x_3})[a^{\frac{1}{6}}(a^{\frac{1}{3}}+x_3^{\frac{1}{3}})]^2} =$$
$$= \frac{1}{(a^{\frac{1}{3}}+x_3^{\frac{1}{3}})^3}.$$

Z výsledků výpočtů funkcí $F_1(a,x_2)$, $F_2(a,x_3)$ můžeme předpokládat $k-$tý člen ve tvaru

$$F_k(a,x_{k+1}) = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{k+1}} + x_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}}$$

a

$$x_k = \sqrt[k+1]{ax_{k+1}^k}.$$

Toto ověříme pro $n-$tý člen:

$$F_n(a,b) = \max_{a\le x_n\le b}\left\{\frac{x_n}{x_n+b}\cdot F_{n-1}(a,x_n)\right\} = \max_{a\le x_n\le b}\left\{\frac{x_n}{x_n+b}\cdot\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}}+x_n^{\frac{1}{n}}\right)^n}\right\},$$

opět vypočteme x_n:

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{x_n}{x_n+b}\cdot\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}}+x_n^{\frac{1}{n}}\right)^n}\right] = \frac{x_n+b-x_n}{(x_n+b)^2}\cdot\frac{1}{(a^{\frac{1}{n}}+x_n^{\frac{1}{n}})^n} + \frac{x_n}{x_n+b}\cdot\frac{-n\frac{1}{n}x_n^{\frac{1}{n}}-1}{(a^{\frac{1}{n}}+x_n^{\frac{1}{n}})^{n+1}} =$$
$$= \frac{1}{(x_n+b)^2(a^{\frac{1}{n}}+x_n^{\frac{1}{n}})^{n+1}}\left[b(a^{\frac{1}{n}}+x_n^{\frac{1}{n}}) - x_n^{\frac{1}{n}}(x_n+b)\right].$$

Derivaci položíme rovnu nule a vypočteme x_n:

$$ba^{\frac{1}{n}} = x_n^{\frac{n+1}{n}} \implies x_n = (ab^n)^{\frac{1}{n+1}} = a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}},$$

dosadíme do $F_n(a,b)$:

$$\begin{aligned}
F_n(a,b) &= \frac{a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}}}{(a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}} + b)} \cdot \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n(n+1)}} b^{\frac{1}{n+1}}\right)^n} = \\
&= \frac{a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}}}{b^{\frac{n}{n+1}} (b^{1-\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{1}{n+1}}) \left[a^{\frac{1}{n(n+1)}} \left(a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}} + b^{\frac{1}{n+1}}\right)\right]^n} = \\
&= \frac{1}{(a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}})(a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}})^n} = \\
&= \frac{1}{(a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}})^{n+1}},
\end{aligned}$$

což je v souladu s předchozím výpočtem pro k−tý krok.
Veličina

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \dots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}$$

bude maximální při hodnotách

$$x_k = \sqrt[k+1]{a x_{k+1}^k}, \; k = 1, \dots, n$$

a tato veličina bude nabývat hodnoty

$$F_n(a,b) = \frac{1}{(a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}})^{n+1}}.$$

Kapitola 2

Nekonečněkrokový deterministický rozhodovací proces

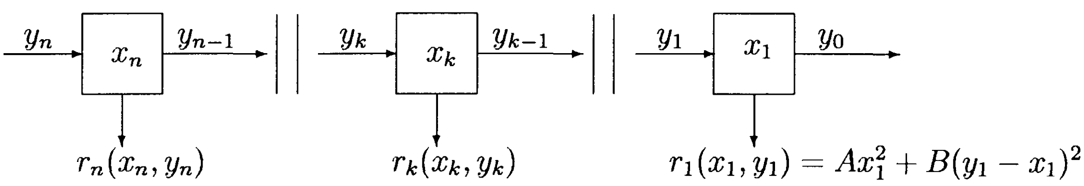
Předpokládejme nyní rozhodovací proces s velkým počtem rozhodovacích stupňů n. Jako model uvažujeme následující úlohu:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[Ax_k^2 + B(y_k - x_k)^2\right] \;\rightarrow\; \min, \tag{2.1}$$

kde

$$y_{k-1} = b(y_k - x_k),\; 0 < b < 1,\; 0 \leq x_k \leq y_k,\; A, B > 0.$$

Použijeme postup, jaký známe z první kapitoly a příklad znázorníme schématicky:



kde $r_n(x_n, y_n)$ v našem konkrétním příkladě je $Ax_n^2 + B(y_n - x_n)^2$ a $y_{k-1} = b(y_k - x_k)$. V prvním kroku minimalizujeme $Ax_1^2 + B(y_1 - x_1)^2$. Tedy

$$f_1(y_1) = \min_{0 \leq x_1 \leq y_1} \left[Ax_1^2 + B(y_1 - x_1)^2\right].$$

Hledáme takové x_1, aby $f_1(y_1)$ bylo nejmenší. Derivaci minimalizované funkce podle x_1 položíme rovnu nule a vyjádříme x_1:

$$2Ax_1 - 2B(y_1 - x_1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{B}{A+B} y_1$$

a dosadíme do $f_1(y_1)$ (všimněme si, že minimalizovaná funkce f je konvexní, proto stacionární bod je bodem absolutního minima):

$$f_1(y_1) = \left(\frac{AB}{A+B}\right) y_1^2$$

Stejným postupem získáme $f_2(y_2)$:

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \min_{0 \le x_2 \le y_2} \left[A x_2^2 + B(y_2 - x_2)^2 + \frac{ABb^2}{A+B}(y_2 - x_2)^2 \right] \\ &= \frac{AB(A+B) + ABb^2}{(A+B)^2 + ABb^2}\, y_2^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili skutečnosti, že

$$x_2 = \frac{B(A+B) + ABb^2}{(A+B) + ABb^2}\, y_2$$

je stacionárním bodem minimalizované funkce.

Pokračováním ve schématu dostáváme stále komplikovanější výrazy, zejména pro n jdoucí k nekonečnu. Všimněme si však, že f_k, resp. x_k, $k = 1, 2$, závisí na y_k kvadraticky, resp. lineárně. Předpokládejme tedy, že

$$f_{k-1}(y_{k-1}) = \alpha_{k-1}\, y_{k-1}^2 = \alpha_{k-1}\, b^2\, (y_k - x_k)^2.$$

Vyjádříme-li tedy $f_k(y_k)$, dostáváme:

$$f_k(y_k) = \min_{0 \le x_k \le y_k} \left[A x_k^2 + B(y_k - x_k)^2 + \alpha_{k-1} b^2 (y_k - x_k)^2 \right].$$

Derivováním zjistíme x_k a dosazením také $f_k(y_k)$:

$$\begin{aligned} f_k(y_k) &= \left[\frac{AB + A\alpha_{k-1}\, b^2}{A + B + \alpha_{k-1}\, b^2} \right] y_k^2, \\ x_k &= \frac{B + \alpha_{k-1}\, b^2}{A + B + \alpha_{k-1}\, b^2}\, y_k, \end{aligned}$$

tedy i f_k závisí na y_k kvadraticky a x_k lineárně.
Máme obecnou rovnici schématu:

$$f_k(y_k) = \min_{0 \le x_k \le y_k} \left[A x_k^2 + B(y_k - x_k)^2 + f_{k-1}(b(y_k - x_k)) \right], \; k = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Formálním limitním přechodem pro $k \to \infty$ (předpokládáme, že existují limity posloupností x_k, y_k a funkcí f_k - vysvětlení viz konec tohoto odstavce), můžeme uvažovat následující rovnici:

$$f(y) = \min_{0 \le x \le y} \left[A x^2 + B(y - x)^2 + f(b(y - x)) \right]. \tag{2.3}$$

Na úvodním příkladě (2.1) si ukážeme, jak dobře řešení této jedné rovnice aproximuje n-stupňový proces pro $n \to \infty$. Na základě výsledku pro $n = 1, 2$ hledáme řešení ve tvaru $f(y) = \alpha\, y^2$, s neznámou konstantou α. Dostáváme tedy rovnici:

$$\alpha\, y^2 = \min_{0 \le x \le y} \left[Ax^2 + B(y-x)^2 + \alpha\, b^2 (y-x)^2 \right].$$

Již známým způsobem najdeme takové x, pro které je výraz v hranatých závorkách minimální, tedy

$$2Ax - 2B(y-x) - 2\alpha\, b^2\,(y-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{B + \alpha\, b^2}{A + B + \alpha\, b^2}.$$

A po dosazení řešíme rovnici pro α:

$$\alpha\, y^2 = \frac{A(B + \alpha\, b^2)}{A + B + \alpha\, b^2} y^2 \quad \Rightarrow \quad b^2\, \alpha^2 + (A + B - Ab^2)\, \alpha - AB = 0$$

a tedy

$$\alpha = \frac{1}{2b^2} \left[Ab^2 - A - B \pm \sqrt{(A + B - Ab^2)^2 + 4b^2\, AB}\, \right].$$

Jako příklad vezměme hodnoty $A = 3$, $B = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dosazením do výrazu pro α vyjde $\alpha = 1$[1]. Nalezli jsme řešení funkcionální rovnice $f(y) = \alpha\, y^2$, s výsledkem

$$f(y) = y^2, x = \frac{y}{3}.$$

Poznámka 4. Srovnáme-li tyto hodnoty se skutečnými optimálními hodnotami z jednotlivých kroků pro $n = 1, 2$, kde

$$x_1 = \frac{B}{A + B} y_1 = \frac{1}{4} y_1$$
$$x_2 = \frac{B(A + B) + ABb^2}{(A + B)^2 + ABb^2} y_2 \doteq 0{,}314\, y_2$$

A tyto hodnoty poměrně rychle konvergují k $\frac{y}{3}$, tedy $x_n \to \frac{y}{3}$.

Když budeme mít rozhodovací proces s n-kroky ($n \gg 1$), ukazuje se jako výhodné n-krokový proces (tedy *konečně krokový* rozhodovací proces) nahradit *nekonečně stupňovým*, který popisuje jistá funkcionální rovnice.

Nyní uvažujme rekurzivní formuli n-krokového procesu:

$$f_n(y_n) = \min_{0 \le x_n \le y_n} \left[r_n(x_n, y_n) + f_{n-1}(g_{n-1}(x_n, y_n)) \right]^{2}$$

V tomto vztahu proveďme (formálně) limitní přechod pro $n \to \infty$. Slovo "formálně" znamená, že předpokládáme, že všechny veličiny s indexem n mají limity pro $n \to \infty$. Tímto postupem dostaneme *základní funkcionální rovnici dynamického programování*:

$$f(y) = \min_{0 \le x \le y} \left[r(x, y) + f(g(x, y)) \right]. \tag{2.4}$$

[1] v předchozím vzorci pro α bereme znaménko plus, neboť hledáme $\alpha > 0$.

[2] v předchozím motivačním příkladu bylo $r_n(x_n, y_n)$ rovno $Ax_n^2 + B(y_n - x_n)^2$ a $g(x_n, y_n)$ bylo rovno $b(y_n - x_n)$

2.1 Metody řešení funkcionální rovnice dynamického programování

Uvažujme rovnici

$$f(y) = \min_{0 \le x \le y} [r(x, y) + f(g(x, y))], \tag{2.5}$$

tedy funkcionální rovnici, kde předpokládáme, že celkový zisk je součtem zisků z jednotlivých stupňů rozhodovacího procesu a f je neznámá funkce, kterou chceme spočítat. Nyní uvedeme dvě základní metody, jak lze tuto rovnici řešit.

2.1.1 Metoda postupných aproximací

Zvolíme počáteční aproximaci neznámé funkce $f(y)$ a tu označíme $f_0(y)$. Většinou bereme $f_0(y) \equiv 0$. Definujeme posloupnost funkcí $f_n(y)$ rekurentním předpisem

$$f_k(y) = \min_{0 \le x \le y} [r(x, y) + f_{k-1}(g(x, y))], \ k = 1, 2, \dots, n,$$

což je vlastně zpětné nahrazení nekonečně-stupňového procesu konečně-stupňovou analogií. Chceme, aby $f_n(y)$ konvergovalo k $f(y)$, pro $n \to \infty$.

2.1.2 Metoda aproximace na množině optimálních rozhodnutí

V rovnici (2.5) je extrému nabyto v bodě $x = x(y)$[3], tj. závisí na hodnotě y. Učiníme počáteční aproximaci této neznámé funkce $x = x(y)$, a to $x = x_0(y)$, což je počáteční aproximace závislosti bodu extrému na y. Po dosazení do (2.5) máme

$$f(y) = r(x_0(y), y) + f(g(x_0(y), y)). \tag{2.6}$$

Tato rovnice má tu výhodu, že neobsahuje operaci maxima, je to tedy funkcionální rovnice v obvyklém smyslu. Formální definice pojmu funkcionální rovnice je značně komplikovaná, lze ji najít např. v [4], [5].

Nechť $f_0(y)$ je řešení této funkcionální rovnice. Následující aproximaci $x = x_1(y)$ optimálního rozhodnutí $x(y)$ najdeme jako řešení extrémální úlohy :

$$[r(x, y) + f_0(g(x, y))] \to \min, \ x \in [0, y].$$

Pak pro $f_1(y)$ dostáváme obyčejnou funkcionální rovnici (tj. rovnici bez operace minima)

$$f_1(y) = r(x_1(y), y) + f_1(g(x_1(y), y)).$$

Nyní známe řešení $f_1(y)$ a pomocí tohoto řešení najdeme $x_2(y)$ jako optimální řešení úlohy

$$[r(x, y) + f_1(g(x, y))] \to \min, \ x \in [0, y],$$

[3] funkci $x = x(y)$ neznáme

a $f_2(y)$ jako řešení funkcionální rovnice

$$f_2(y) = r(x_2(y), y) + f_2(g(x_2(y), y)),$$

takto postupujeme dále.

Příklad 2.1.1. Nyní ilustrujeme tyto dvě metody na úvodním příkladě

$$r(x,y) = Ax^2 + B(y-x)^2, \quad g(x,y) = b(y-x), 0 < b < 1.$$

Metodou postupných aproximací f_0, f_1, ... jsme řešení již naznačili, ukážeme tedy postup metodou aproximace na množině optimálních rozhodnutí. Jako počáteční aproximaci vezměme $x_0(y) = \frac{B}{A+B}\,y$, což odpovídá počáteční aproximaci $f_0(y) \equiv 0$. Funkci $x_0(y)$ jsme našli jako řešení úlohy

$$\min_{0 \le x \le y} \left[Ax^2 + B\,(y-x)^2\right].$$

Nyní pomocí $x_0(y)$ hledáme $f_0(y)$ (využijeme vztahu (2.6)):

$$f_0(y) = Ax^2 + B(y-x)^2 + f_0\left(b(y - \frac{B}{A+B}y)\right) = \frac{AB}{A+B}y^2 + f_0\left(\frac{bA}{A+B}y\right). \quad (2.7)$$

Při řešení této rovnice využijeme skutečnosti, že řešení by mělo záviset na y kvadraticky, tedy $f_0(y) = \alpha_0\, y^2$. Dosazením do rovnice (2.7) obdržíme:

$$\alpha_0 = \frac{AB(A+B)}{(A+B)^2 - b^2 A^2} \;\Rightarrow\; f_0(y) = \frac{AB(A+B)}{(A+B)^2 - b^2A^2}\,y^2.$$

Funkci $x_1(y)$ určíme jako řešení extrémální úlohy

$$\min_{0 \le x \le y} \left[Ax^2 + B(y-x)^2 + f_0(b(y-x))\right].$$

Na základě toho, že $f_0(y) = \alpha_0\, y^2$, předchozí extrémální úlohu můžeme psát ve tvaru

$$\min_{0 \le x \le y} \left[Ax^2 + B(y-x)^2 + \alpha_0 b^2 (y-x)^2\right].$$

Minimalizací dostáváme

$$x_1(y) = \frac{B + \alpha_0 b^2}{A + B + \alpha_0 b^2}\,y\,,$$

dosadíme do $f(y)$ a obdržíme:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \frac{A(B+\alpha_0 b^2)^2}{(A+B+\alpha_0 b^2)^2}\,y^2 + B\left(y - \frac{B+\alpha_0 b^2}{A+B+\alpha_0 b^2}\,y\right)^2 + f_1\left[b\left(y - \frac{B+\alpha_0 b^2}{A+B+\alpha_0 b^2}\,y\right)\right] \\ &= \frac{A(B+\alpha_0 b^2)^2 + A^2 B}{(A+B+\alpha_0 b^2)^2}\,y^2 + f_1\left[\frac{A\,b\,y}{A+B+\alpha_0 b^2}\right] \end{aligned}$$

a v této rovnici opět využijeme toho, že $f_1(y)$ závisí na y kvadraticky, tedy $f_1(y) = \alpha_1\, y^2$ a vyjádříme α_1 a zpětným dosazením $f_1(y)$:

$$\alpha_1 = \frac{A(B+\alpha_0 b^2)^2 + A^2 B}{(A+B+\alpha_0 b^2)^2 - A^2\, b^2} \quad \text{a} \quad f_1(y) = \frac{A(B+\alpha_0 b^2)^2 + A^2 B}{(A+B+\alpha_0 b^2)^2 - A^2\, b^2}\, y^2.$$

Pro x_2 řešíme tuto úlohu:

$$\min_{0 \le x \le y} \left[Ax^2 + B\,(y-x)^2 + f_1(b(y-x)) \right],$$

což je

$$\min_{0 \le x \le y} \left[Ax^2 + B\,(y-x)^2 + \alpha_1 b^2 (y-x)^2 \right].$$

Minimalizací získáme x_2:

$$x_2(y) = \frac{B+\alpha_1 b^2}{A+B+\alpha_1 b^2}\, y,$$

Dosazením do $f(y)$ obdržíme výraz pro $f_2(y)$:

$$f_2(y) = \frac{A(B+\alpha_1 b^2)^2 + A^2 B}{(A+B+\alpha_1 b^2)^2}\, y^2 + f_2 \left[\frac{A\, b\, y}{A+B+\alpha_1 b^2} \right].$$

Opět s využitím poznatku, že $f_2(y) = \alpha_2\, y^2$ vypočteme z předchozí rovnice α_2 dosazením:

$$\alpha_2 = \frac{A(B+\alpha_1 b^2)^2 + A^2 B}{(A+B+\alpha_1 b^2)^2 - A^2\, b^2}.$$

Funkce $f_2(y)$ bude po dosazení

$$f_2(y) = \frac{A(B+\alpha_1 b^2)^2 + A^2 B}{(A+B+\alpha_1 b^2)^2 - A^2\, b^2}\, y^2.$$

Vezmeme-li opět hodnoty $A = 3$, $B = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, z následující tabulky je vidět, že výsledky metody aproximace optimálních rozhodnutí (v tabulce jako MAOR) konvergují rychleji, než s použitím metody postupných aproximací (MPA) funkce f.

	MPA		MAOR	
$k=0$	$f_0 = 0$	$x_0 = 0$	$f_0 = 1.043y^2$	$x_0 = 0.25y$
$k=1$	$f_1 = 0.75y^2$	$x_1 = 0.25y$	$f_1 = 1.00y^2$	$x_1 = 0.32y$
$k=2$	$f_2 = 0.945y^2$	$x_2 = 0.314y$	$f_2 = 1.00y^2$	$x_2 = 0.333y$
$k=3$	$f_3 = 0.987y^2$	$x_3 = 0.37y$	–	–
$k=4$	$f_4 = 0.995y^2$	$x_4 = 0.332y$	–	–

2.2 Základní funkcionální rovnice dynamického programování

Jako speciální případ funkcionální rovnice (2.5) uvažujme tento případ: y vstupních prostředků máme rozdělit do nákupu dvou zařízení (strojů). Do prvního stroje investujeme x $(0 \leq x \leq y)$, do druhého $y-x$, přičemž zisky z používání těchto strojů jsou $g(x)$ a $h(y-x)$. To vede k řešení úlohy:

$$g(x) + h(y-x) \to \max, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Nyní předpokládejme dvoukrokový proces: po určité době obě výrobní zařízení prodáme a obdržíme za ně částku ax resp. $b(y-x)$, $a, b \in [0,1)$ (předpokládáme amortizaci, tj. sníží se hodnota, proto uvažujeme $a, b < 1$). Ve druhém kroku máme k dispozici na rozdělení už jen $ax + b(y-x)$ prostředků, které označíme y_1. To vede na úlohu

$$\max_{0 \leq x \leq y} [g(x) + h(y-x) + g(x_1) + h(y_1 - x_1)],$$

při vazebné podmínce $y_1 = ax + b(y-x)$.

Stejnou úvahou jako v obecném schématu se dostáváme k rekurentní formuli

$$f_n(y) = \max_{0 \leq x \leq y} [g(x) + h(y-x) + f_{n-1}(ax + b(y-x))]$$

a pro formální limitní proces $n \to \infty$ obdržíme funkcionální rovnici

$$f(y) = \max_{0 \leq x \leq y} [g(x) + h(y-x) + f(ax + b(y-x))]. \tag{2.8}$$

Nyní se budeme zabývat problematikou řešení této rovnice, tedy existencí, jednoznačností a způsoby řešení ve speciálních případech.

Věta 2.1. (O existenci a jednoznačnosti řešení). Nechť funkce $g(y)$, $h(y)$ jsou spojité na intervalu $[0, \infty)$, $g(0) = 0 = h(0)$. Dále nechť

$$m(y) = \max_{0 \leq x \leq y} \{\max\{\, |g(x)|, |h(x)|\, \}\},$$

$c = \max\{a, b\}$, kde $a, b \in [0,1)$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} m(c^k y) < \infty$ pro $y \geq 0$, pak existuje jediné řešení rovnice (2.8), splňující podmínky spojitosti funkce f v bodě $y = 0$ a $f(0) = 0$. Toto řešení je spojité pro všechna $y \in [0, \infty]$, pro něž jsou splněny podmínky věty.

Důkaz. Větu dokážeme na dílčím případě, kdy obě funkce g i h nabývají pouze nezáporných hodnot. Tehdy je při libovolném y posloupnost funkcí $\{f_n(y)\}$, získaná ze vztahu

$$f_k(y) = \max_{0 \leq x \leq y} [g(x) + h(y-x) + f_{k-1}(ax + b(y-x))], \; k = 1, \ldots, n,$$

monotónně rostoucí, a jak bude ukázáno dále, také ohraničená v důsledku podmínky $\sum_{k=1}^{\infty} m(c^k y) < \infty$. Proto pro všechny $y > 0$ posloupnost funkcí $f_n(y)$ konverguje k funkci $f(y)$ pro $n \to \infty$.

Ukážeme, že tato funkce vyhovuje rovnici

$$f(y) = \sup_{0 \le x \le y} [g(x) + h(y-x) + f(ax + b(y-x))]. \tag{2.9}$$

Pro zjednodušení zápisu definujeme zobrazení $T : C[0,\infty) \times \mathbb{R} \to C[0,\infty)$ předpisem

$$T(f,x) = g(x) + h(y-x) + f(ax + b(y-x)).$$

Pak základní rekurentní vztah zapíšeme ve formě

$$f_{k+1}(y) = \max_{0 \le x \le y} T(f_k, x). \tag{2.10}$$

Odtud a z monotónnosti pro všechna $k \in \mathbb{N}$ dostaneme, že

$$f(y) \ge \max_{0 \le x \le y} T(f_k, x),$$

ale toto značí, že pro libovolné $x \in [0,y]$ platí nerovnice

$$f(y) \ge T(f_k, x),$$

a tato nerovnice zůstává zachována i pro $k \to \infty$, tj.

$$f(y) \ge T(f,x)$$

pro všechna $x \in [0,y]$, odkud ve skutečnosti vyplývá, že

$$f(y) \ge \sup_{0 \le x \le y} T(f,x). \tag{2.11}$$

Poznamenejme, že zde nemůžeme použít operace maxima, protože (zatím) není zaručena spojitost limitní funkce $f(y)$. Na druhé straně z (2.10) dostaneme vztah

$$f_{k+1}(y) \le \sup_{0 \le x \le y} T(f,x)$$

pro každé $k = 0, \ldots, \infty$ a odtud také

$$f(y) \le \sup_{0 \le x \le y} T(f,x). \tag{2.12}$$

Spojení (2.11) a (2.12) nám dá vztah (2.9), tedy

$$f(y) = \sup_{0 \le x \le y} \{g(x) + h(y-x) + f(ax + b(y-x))\}.$$

K dokončení důkazu je nyní třeba ukázat, že funkce f je spojitá, a tedy operaci suprema v (2.9) lze nahradit operací maxima. Tato část důkazu je technicky poměrně náročná, proto ji neuvádíme. Poznamenejme, že tento důkaz je založen na konstrukci posloupnosti postupných aproximací. Podrobnosti je možno nalézt v [1]. □

Nyní se budeme zabývat konvergencí druhé základní metody vyšetřování funkcionální rovnice dynamického programování, metody aproximace na množině optimálních řešení. Zde ukážeme, že v případě, kdy počáteční aproximaci $f_0(y)$ bereme jako výsledek (řešení) funkcionální rovnice, kde je dosazena počáteční aproximace $x_0 = x_0(y)$ v prostoru optimálních rozhodnutí, pak je konvergence posloupnosti postupných aproximací monotonní.

Věta 2.2. Nechť $x_0 = x_0(y)$ je libovolná spojitá funkce splňující nerovnost $0 \leq x_0(y) \leq y$ a nechť f_0 je řešením funkcionální rovnice

$$f_0(y) = g(x_0(y)) + h(y - x_0(y)) + f(a\, x_0(y) + b(y - x_0(y))).$$

Pak posloupnost definovaná rekurentně

$$f_k(y) = \max_{0 \leq x \leq y} \{g(x) + h(y - x) + f_{k-1}(a\, x + b(y - x))\}$$

je monotonní a její konvergence je stejnoměrná.

Důkaz. Neprovádíme, je podobný důkazu předchozí věty. □

2.3 Vlastnosti řešení funkcionální rovnice dynamického programování

Věta 2.3. Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady Věty 2.1 o existenci a jednoznačnosti řešení a nechť navíc funkce g a h jsou konvexní na intervalu $[0, \infty)$. Pak funkce f, která je řešením rovnice (2.8), tedy rovnice

$$f(y) = \max_{0 \leq x \leq y} [g(x) + h(y - x) + f(ax + b(y - x))],$$

je také konvexní a pro libovolné y je optimální rozhodnutí $x(y) = 0$ nebo $x(y) = y$, tj. maxima je dosaženo v jednom z krajních bodů intervalu $[0, y]$ a rovnice (2.8) se zjednodušší na tvar

$$f(y) = \max\{h(y) + f(b\, y),\ g(y) + f(a\, y)\}.$$

Zejména, je-li $a = b$, předchozí rovnice se dále zjednodušují na

$$f(y) = \max\{h(y),\ g(y)\} + f(a\, y)$$

a označíme-li $F(y) = \max\{h(y), g(y)\}$, lze řešení funkcionální rovnice vyjádřit ve tvaru

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} F(a^k\, y).$$

Důkaz. Pro $f \equiv 0$ je

$$f_1(y) = \max_{0 \le x \le y} \{g(x) + h(y-x)\}$$

a $g(x) + h(y-x)$ je konvexní v proměnné x. Konvexní funkce nabývá na daném intervalu maxima v krajním bodě tohoto intervalu, tj.

$$f_1(y) = \max\{g(0) + h(y), g(y) + h(0)\} = \max\{h(y), g(y)\}$$

je konvexní, neboť je maximem konvexních funkcí. Dále funkce

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \max_{0 \le x \le y} \{g(x) + h(y-x) + f_1(ax + b(y-x))\} \\ &= \max\{g(0) + h(y) + f_1(by), g(y) + h(0) + f_1(ay)\} \\ &= \max\{h(y) + f_1(by), g(y) + f_1(ay)\} \end{aligned}$$

je ze stejného důvodu také konvexní. Indukcí bychom dostali, že každá z funkcí f_k je konvexní. Konvexnost funkce f pak plyne z faktu, že stejnoměrná limita konvexních funkcí je konvexní funkce.
Protože tedy i f je konvexní,

$$\begin{aligned} f(y) &= \max_{0 \le x \le y} \{g(x) + h(y-x) + f(ax + b(y-x))\} \\ &= \max\{g(0) + h(y) + f(by), g(y) + h(0) + f(ay)\} \\ &= \max\{h(y) + f(by), g(y) + f(ay)\}. \end{aligned}$$

Nyní dokážeme druhou část věty pro speciální případ $a = b$. Zapíšeme funkci $f(y)$ pomocí uvedeného značení:

$$f(y) = F(y) + f(ay).$$

Nyní rozepíšeme výraz pro $f(ay)$:

$$f(ay) = F(ay) + f(a^2 y).$$

Pro $f(y)$ potom dostáváme výraz

$$\begin{aligned} f(y) &= F(y) + F(ay) + f(a^2 y) = F(y) + F(ay) + F(a^2 y) + f(a^3 y) = \\ &= \cdots = \sum_{k=0}^{n} F\left(a^k y\right) + f\left(a^{n+1} y\right). \end{aligned}$$

Pro $a \in [0,1]$ posloupnost $f(a^n y)$ konverguje k nule. Získali jsme tedy dokazovanou formuli

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} F(a^k y).$$

□

Věta 2.4. Nechť opět platí předpoklady Věty 2.1 o existenci a jednoznačnosti a předpokládejme navíc, že h a g jsou rostoucí a konkávní. Pak i řešení f je ostře konkávní funkce a optimální řešení rovnice (2.8) je jediné.

Důkaz. Je v podstatě stejný jako důkaz předchozí věty, proto jej neuvádíme. $\square$

Věta 2.5. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 2.1 a funkce f, g jsou ostře konkávní, rostoucí a spojitě diferencovatelné. Dále předpokládejme, že

$$1 > b > a > 0, \quad \frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b}, \quad h'(0) > g'(\infty). \tag{2.13}$$

Pak existuje číslo $\bar{y} \in (0, \infty)$, které je určeno jako řešení rovnice

$$h'(0) = g'(y) - \sum_{k=0}^{\infty} (b-a) a^k g'(a^{k+1} y)$$

s následující vlastností

a) Pro $y \leq \bar{y}$ je maxima v rovnici (2.8) nabyto v pravém krajním bodě $x(y) = y$ a v tomto případě je řešením úlohy 2.8 funkce

$$f(y) = g(y) + \sum_{k=1}^{\infty} g\left(a^k y\right).$$

b) Pro $y > \bar{y}$ je maxima v rovnici (2.8) nabyto ve stacionárním bodě, který je řešením rovnice

$$g'(x) - h'(y-x) + (a-b) f'(ax + b(y-x)) = 0.$$

Důkaz. Nechť $f_0 \equiv 0$, potom

$$f_1 = \max_{0 \leq x \leq y} \{g(x) + h(y-x)\}.$$

Protože $g'(0) > h'(0)$ (to plyne z (2.13), neboť $b > a > 0$) a g', h' jsou spojité, existuje $y > 0$ takové, že

$$\inf_{x \in [0,y]} g'(x) > \max_{t \in [0,y]} h'(t),$$

pak pro $x \in [0, y]$ je $g'(x) > h'(y-x)$, což znamená že $[g(x) + h(y-x)]' > 0$ a tedy

$$\max_{0 \leq x \leq y} [g(x) + h(y-x)] = g(y).$$

Dále z konkávnosti funkcí g, h a z toho, že $g'(\infty) < h'(0)$ plyne existence jediného řešení rovnice $g'(y) = h'(0)$. Označíme-li $\tilde{y}$ toto řešení, pak pro $y > \tilde{y}$ leží řešení rovnice

$$g'(x) - h'(y-x) = 0$$

uvnitř intervalu $[0, y]$, což plyne z toho, že pro $y = \tilde{y}$ je řešením rovnice $g'(x) - h'(\tilde{y} - x) = 0$ právě $x = \tilde{y}$. Označme toto řešení $x_1 = x_1(y)$ (tj. $x_1(\tilde{y}) = \tilde{y}$). Funkce $f_1(y)$ je tvaru

$$f_1(y) = \begin{cases} g(y), & 0 \leq y \leq \tilde{y}, \\ g(x_1) + h(y - x_1), & y \geq \tilde{y}, \end{cases}$$

a po derivaci

$$f_1'(y) = \begin{cases} g'(y), & 0 \leq y \leq \tilde{y}, \\ h'(y - x_1), & y \geq \tilde{y}, \end{cases}$$

kde $h'(y - x_1)$ máme z výpočtu

$$\frac{d}{dy}[g(x_1) + h(y - x_1)] = \underbrace{[g'(x_1) - h'(y - x_1)]}_{=0} \frac{dx_1}{dy} + h'(y - x_1) = h'(y - x_1)$$

Všimněme si, že f_1' je spojitá funkce, neboť

$$f_1'(\tilde{y}-) = g'(\tilde{y}), \quad f_1'(\tilde{y}+) = h'(0) = g'(\tilde{y}).$$

Z konkávnosti funkcí g, h plyne konkávnost funkce $f_1(y)$ - viz důkaz předchozí věty. Pro další iteraci označme:

$$D(x) = g'(x) - h'(y-x) + f_1'(ax + b(y-x))(b-a) = \frac{\partial}{\partial x}[g(x) + h(y-x) + f_1(ax + b(y-x))(b-a)],$$

přičemž pro $x = y = 0$ platí

$$g'(0) - h'(0) + f_1'(0)(b-a) = g'(0) - h'(0) + g'(0)(b-a) =$$
$$= g'(0)(1 + b - a) - h'(0) > h'(0)\left[\frac{(1 + b - a)(1 - a)}{1 - b} - 1\right] > 0$$

Odtud plyne, že existuje $y > 0$ takové, že

$$\min_{x \in [0,y]}[g'(x) + f_1'(ax + b(y - x))] \geq \max_{t \in [0,y]} h(t),$$

a tedy $D(x) > 0$ pro $x \in 0, y$. To znamená, že pro malá $y > 0$ je maxima v definici $f_2(y)$:

$$f_2(y) = \max_{0 \leq x \leq y}\{g(x) + h(y - x) + f_1(ax + b(y - x))\}$$

dosaženo v pravém krajním bodě $x = y$. S rostoucím y bude existovat nejmenší hodnota, označme ji $\bar{y}$, pro níž $D(x) = 0$, toto $\bar{y}$ je řešením

$$g'(x) = h'(0) + (b - a)f_1'(ax).$$

Vezmeme-li v úvahu, že $\tilde{y}$ je řešením rovnice $g'(x) = h'(0)$, dostáváme $0 < \bar{y} < \tilde{y}$.
Pro $y > \bar{y}$ leží řešení rovnice $D(x) = 0$ uvnitř intervalu $[0, y]$, označme toto řešení $x_2 = x_2(y)$. S využitím těchto informací dostáváme

$$f_2(y) = \begin{cases} g(y) + f_1(ay), & 0 \leq y \leq \bar{y} \\ g(x_2(y)) + h(y - x_2(y)) + f_1(ax_2(y) + b(y - x_2(y))), & y \geq \bar{y}, \end{cases}$$

to je

$$f_2'(y) = \begin{cases} g'(y) + ag'(ay), & 0 \le y \le \bar{y} \\ h'(y - x_2(y)) + bf_1'(ax_2(y) + b(y - x_2(y))), & y \ge \bar{y}. \end{cases}$$

Všimněme si opět spojitosti funkce $f_2(y)$:

$$\begin{aligned} f_2'(\bar{y}-) &= g'(\bar{y}) + ag'(a\bar{y}) = g'(\bar{y}) + af_1'(a\bar{y}), \\ f_2'(\bar{y}+) &= h'(0) + bf_1'(a\bar{y}). \end{aligned}$$

Nyní pomocí rozdílu

$$f_2'(\bar{y}-) - f_2'(\bar{y}+) = g'(\bar{y}) - h'(0) + (a-b)f_1'(a\bar{y}) = 0,$$

neboť na pravé straně je právě rovnice definující $\bar{y}$.
Nyní přeznačme proměnné y_1, y_2 následujícím způsobem: $y_1 := \tilde{y}, y_2 := \bar{y}$ a pokračujme dále

$$f_{n+1}(y) = \max_{0 \le x \le y} \{g(x) + h(y-x) + f_n(ax + b(y-x))\}.$$

Chceme ukázat existenci y_{n+1} s vlastností $0 < y_{n+1} < y_n < \dots < y_2 < y_1$ takové, že pro $y \le y_{n+1}$ je maximum realizováno v pravém krajním bodě $x = y_{n+1}$ a pro $y > y_{n+1}$ ve stacionárním bodě uvnitř intervalu. Existenci y_{n+1} dokážeme obdobně jako v předchozí části, je to řešení rovnice

$$g'(x) - h'(0) + (a-b)f_n'(ax) = 0$$

K důkazu nerovnosti $y_{n+1} < y_n$ musíme ukázat, že $f_n'(y) > f_{n-1}'(y)$, neboť y_n je řešením $g'(x) - h'(0) + (a-b)f_{n-1}'(ax) = 0$. Ukážeme, že $f_2'(y) > f_1'(y)$, pro další n se postupuje indukcí. Pro $y > y_1$ je

$$\begin{aligned} f_2'(y) &= h'(y - x_2(y)) + bf_1'(ax_2(y) + b(y - x_2(y))), \\ f_1'(y) &= h'(y - x_1(y)), \end{aligned}$$

kde $x_1(y), x_2(y)$ jsou stacionární body v definicích funkcí $f_1(y), f_2(y)$, tedy $x_1(y)$ získáme z rovnice $g'(x) - h'(y-x) = 0$ a $x_2(y)$ z rovnice $g'(x) - h'(y-x) + (a-b)f_1'(ax + b(y-x)) = 0$. Dosazením do vztahů pro $f_1'(y), f_2'(y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} f_1'(y) &= \underbrace{h'(y - x_1(y))}_{g'(x_1(y))} = \frac{1}{b-a}[b \underbrace{g'(x_1(y))}_{h'(y-x_1(y))} - ah'(y - x_1(y))] = \\ &= \frac{bg(x_1(y)) - ah'(y - x_1(y))}{b-a}. \end{aligned}$$

Z rovnice pro $x_2(y)$:

$$\begin{aligned} bg'(x_2(y)) - ah'(y - x_2(y)) &= bh'(y - x_2(y)) - ah'(y - x_2(y)) - b(a-b)f_1'(ax_2(y) + \\ &+ b(y - x_2(y))) = (b-a)[h'(y - x_2(y)) + bf_1'(ax_2(y) + b(y - x_2(y)))] = (b-a)f_2'(y), \end{aligned}$$

a tedy

$$f_2'(y) = \frac{bg(x_2(y)) - ah'(y - x_2(y))}{b - a}.$$

Funkce $(b-a)^{-1}[bg(x(y)) - ah'(y - x(y))]$ je klesající na intervalu $[0, y]$. Odtud, a z faktu, že $x_2(y) < x_1(y)$ (viz rovnice, které je určují) dostáváme $f_2'(y) > f_1'(y)$. Podobně dostaneme tyto nerovnosti i pro $y \in [y_2, y_1]$ a $y \in [0, y_2]$.
Ještě naznačíme, jak by se určilo y_3:

$$f_3(y) = \max_{0 \leq x \leq y} \{g(x) + h(y - x) + f_2(ax + b(y - x))\},$$

potom y_3 bude nejmenší kořen rovnice

$$0 = g'(x) - h'(0) + (a - b)f_2'(ax) = g'(x) - h'(0) + (a - b)\left(g'(ax) + ag'(a^2x)\right)$$

a obecně y_n bude řešením rovnice

$$g'(x) - h'(0) + (a - b)[g'(ax) + ag'(a^2x) + \cdots + a^{n-2}g'(a^{n-1}x)] = 0.$$

Výsledkem celé konstrukce je posloupnost $y_1 > y_2 > \cdots > y_n > \ldots$, posloupnost derivací funkcí $f_1'(y) \geq f_2'(y) \geq \ldots$, a posloupnost optimálních řešení $x_1(y) > x_2(y) > \ldots$.
Protože posloupnosti jsou monotonní, existují jejich limity a tím dostáváme tvrzení věty.
□

Na závěr uveďme ještě dvě tvrzení týkající se řešitelnosti rovnice (2.8) v případě, kdy funkce g, h jsou mocninné, resp. kvadratické funkce.

Věta 2.6. Spojité řešení rovnice

$$f(y) = \max[cy^d + f(ay), ey^g + f(by)], \quad f(0) = 0, \tag{2.14}$$

pro jejíž parametry platí

$$a)\, a, b \in (0, 1);\ c, d, e, g > 0, \tag{2.15}$$
$$b)\, 0 < d < g \tag{2.16}$$

je tvaru

$$f(y) = \begin{cases} \frac{cy^d}{1-a^d}, & 0 \leq y \leq \bar{y}, \\ ey^g + f(by), & y \geq \bar{y}, \end{cases} \tag{2.17}$$

kde

$$\bar{y} = \left[\frac{c(1 - a^d)^{-1}}{e(1 - b^d)^{-1}}\right]^{\frac{1}{g-d}}. \tag{2.18}$$

Zejména, funkci $f(y)$ lze vyjádřit v explicitním tvaru na každém intervalu

$$\left[\frac{\bar{y}}{b^n}, \frac{\bar{y}}{b^{n+1}}\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Důkaz. Označme A, resp. B skutečnost, že v rovnici (2.14) nastane maximum pro funkce $cy^d + f(ay)$, resp. $ey^g + f(by)$ (dále budeme mluvit o strategiích A a B). Pak řešení S, odpovídající optimálnímu výběru maxima v rovnici (2.14) (při řešení této rovnice metodou postupných aproximací) je možno symbolicky zapsat jako

$$S = A^{a_1} B^{b_1} A^{a_2} B^{b_2} \dots,$$

kde a_i a b_i jsou celá čísla, přičemž A^{a_i} označuje, že maximum v rovnici (2.14) bylo nabyto prvním výrazem a_i-krát v řadě, B^{b_i} má stejný význam. Předpokládejme, že řešení má uvedený tvar (2.17) a ukážeme, jak je možné získat hodnotu $\bar{y}$. V bodě $\bar{y}$ je A i B současně maximem v rovnici (2.14), přičemž pro $y < \bar{y}$ je maximum nabyto pro první výraz A (to plyne z předpokladu (2.15)). Tedy, pro ($y = \bar{y}$) můžeme situaci popsat formálně rovností

$$BA^\infty = A^\infty.$$

Pro situaci formálně popsanou výrazem A^∞ platí

$$f(y) = cy^d + f(ay) = cy^d + c(ay)^d + c(a^2y)^d + \dots = \frac{cy^d}{1 - a^d}. \tag{2.19}$$

Analogicky, pro situaci popsanou výrazem BA^∞ platí

$$f(y) = ey^g + \frac{cb^d y^d}{1 - a^d}. \tag{2.20}$$

Porovnáním výrazů (2.19) a (2.20) dostáváme rovnici (2.18) pro $\bar{y}$.
Zbývá dokázat, že řešení dané rovnice má tvar (2.17). Nejprve ukážeme, že pro malé hodnoty y maximum nastane vždy pro výraz A. K tomu stačí ukázat, že $f(y) = cy^d/(1 - a^d)$ je pro tato y řešením. Toto nastane, pokud pro malá y platí

$$\frac{cy^d}{1 - a^d} = \max \left[\frac{cy^d}{1 - a^d}, ey^g + \frac{cb^d y^d}{1 - a^d} \right],$$

což však plyne z nerovností $g > d > 0$ a $0 < b < 1$.
Dále postupujeme indukcí. Nechť z označuje nejmenší hodnotu y, pro kterou maximum nastane pro výraz B. Pak pro toto y platí $BA^\infty = A^\infty$. To znamená, že $z = \bar{y}$. Uvažujme nyní interval $y > \bar{y}$ a definujme bod p jako bod, v němž $AB = BA$. Nechť platí (při již zavedeném značení)

$$\begin{aligned} f_{AB}(y) &= cy^d + ea^g y^g + f(aby), \\ f_{BA}(y) &= ey^g + cb^d y^d + f(aby). \end{aligned}$$

Odtud pro hledaný bod p dostáváme rovnost

$$p = \left[\frac{c(1 - b^d)}{e(1 - a^d)} \right]^{\frac{1}{g-d}},$$

a protože $g > d$, platí $p < \bar{y}$.

Z toho, že $f_{AB}(y) < f_{BA}(y)$ pro $y > p$ plyne, že pro $y > \bar{y}$ optimální strategie AB následovaná optimálními rozhodnutími v dalších krocích je horší, než strategie BA následovaná optimálními rozhodnutími. Odtud je vidět, že strategie A nemůže být vybrána pro $y > \bar{y}$, s výjimkou případu, kdy je následována strategií A^{∞}, což však také není možné, jak jsme ukázali v předchozí části důkazu. Tím je důkaz věty dokončen. □

V následující větě se budeme zabývat situací, kdy funkce g, h jsou kvadratické.

Věta 2.7. Nechť $c, d > 0$, $0 < b \leq a < 1$ a

$$f(y) = \max_{0 \leq x \leq y} [cx - x^2 + d(y-x) - (y-x)^2 + f(ax + b(y-x))], \quad f(0) = 0. \tag{2.21}$$

Pak v intervalu $0 \leq y \leq \min(c/2, d/2)$ [4] je řešení $f(y)$ následujícího tvaru, který závisí na znaménku rozdílu $c/(1-a) - d/(1-b)$.
Řešení rozdělíme na několik případů:

(i) Případ $c/(1-a) = d/(1-b)$.

$$f(y) = \frac{(c-d)\alpha + d}{1 - b + (b-a)\alpha} y - \frac{\alpha^2 + (1-\alpha)^2}{1 - [(a-b)\alpha + b]^2} y^2,$$

kde

$$\alpha = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{1 - ab} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a^2 - b^2}{1 - ab} \right)^2} \right\}^{-1}.$$

(ii) Případ $c/(1-a) < d/(1-b)$.

$$f(y) = \left(\frac{d}{1-b} \right) y - \left(\frac{1}{1-b^2} \right) y^2$$

pro $0 \leq y \leq \min\{\lambda, c/2, d/2\}$, kde

$$\lambda = \frac{(1+b)[d(1-a) - c(1-b)]}{2(1-ab)}.$$

(iii) Případ $c/(1-a) > d/(1-b)$.

$$f(y) = \left(\frac{c}{1-a} \right) y - \left(\frac{1}{1-a^2} \right) y^2$$

pro $0 \leq y \leq \min\{\mu, c/2, d/2\}$, kde

$$\mu = \frac{(1+a)[c(a-b) - d(1-a)]}{2(1-ab)}.$$

[4] To je nejdelší interval, na kterém jsou obě funkce f, g rostoucí.

2.4 Příklady

Příklad 2.4.1. Určete řešení základní rovnice dynamického programování

$$f(y) = \max_{0 \le x \le y} \{g(x) + h(y-x) + f(ax + b(y-x))\},$$

je-li $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x^2 - x$, $a = b = \frac{1}{2}$.
Řešení:
Funkce g, h jsou konvexní, maxima je tedy nabyto v bodě $x = 0$ nebo v bodě $x = y$, tedy

$$\begin{aligned} f(y) &= \max\{g(0) + h(y) + f(by), g(y) + h(0) + f(ay)\} \\ &= f(ay) + \max\{h(y), g(y)\}, \end{aligned}$$

s použitím označení z Věty 2.3 a toho, že $a = \frac{1}{2}$ dostáváme

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} F(ay) = \sum_{k=0}^{\infty} F\left(\frac{y}{2^k}\right).$$

Do výrazu pro $F(y)$ dosadíme funkce $g(y)$ a $h(y)$ a máme

$$F(y) = \max\{y^2, 2y^2 - y\} = \left\{ \begin{array}{ll} y^2, & y \in [0,1] \\ 2y^2 - y, & y \ge 1 \end{array} \right. .$$

Je-li $y \in [0,1]$, pak

$$\frac{y}{2^k} \le 1 \quad \Longrightarrow \quad f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2^k}\right)^2 = y^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} y^2.$$

Nyní nechť $y \in [2^n, 2^{n+1}]$ pro $n = 0, 1,,$pak

$$\frac{y}{2^n} \ge 1 \quad \text{a} \quad \frac{y}{2^{n+1}} < 1.$$

V tomto případě funkci $f(y)$ získáme takto:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} F\left(\frac{y}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{y}{2^k}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} F\left(\frac{y}{2^k}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\{2\left(\frac{y}{2^k}\right)^2 - \left(\frac{y}{2^k}\right)\right\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{y}{2^k}\right) = \\ &= \frac{8y^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + 2y\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{y}{3 \cdot 4^n} \end{aligned}$$

Příklad 2.4.2. Určete mezní hodnotu $\bar{y}$ a pro $y < \bar{y}$ určete řešení rovnice

$$f(y) = \max_{0 \le x \le y} \{g(x) + h(y-x) + f(ax + b(y-x))\},$$

je-li $g(x) = 2x - x^2$, $h(x) = x - x^2$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$.
Řešení:
Funkce g, h jsou konvexní, maxima pro funkci f je nabyto pro $x(y) = y$, je-li $y < \bar{y}$.
Určíme $\bar{y}$ z definice jako řešení rovnice:

$$h'(0) = g'(y) - (b-a)\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} g'(a^k y)$$

Víme, že $h'(y) = 1 - 2y$, $h'(0) = 1$, $g'(y) = 2 - 2y$, $g'(a^k y) = 2 - 2(a^k y)$. Dosadíme do rovnice a spočítáme $\bar{y}$:

$$1 = 2(1-y) - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k y\right)$$

$$1 = 2 - 2y - \frac{2}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - y\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\right]$$

V rovnici vyřešíme první sumu a druhou upravíme:

$$1 = 2 - 2y - \frac{1}{3}\left[2 - y\sum_{k=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right]$$

$$1 = 2 - 2y - \frac{1}{3}\left[2 - \frac{2y}{3}\right]$$

a odtud dostáváme

$$\bar{y} = \frac{3}{16}.$$

Nyní dosadíme do vztahu

$$f(y) = g(y) + \sum_{k=1}^{\infty} g\left(a^k y\right),$$

tedy

$$f(y) = 2y - y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^k y - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}y\right)^2 = 2y - y^2 + 2y - \frac{y^2}{3} = 4y - \frac{2y^2}{3}.$$

Pro $y \le \frac{3}{16}$ je řešením funkce

$$f(y) = 4y - \frac{2y^2}{3}.$$

Závěr

V současné době existuje celá řada monografií zabývajících se teorií a praxí dynamického programování. Vedle již zmíněných knih R. Bellmana a G. L. Nemhausera zmiňme alespoň monografie M. Sniedoviche [6] a A. Kaufmanna a R. Cruona [2]. Stručným nahlédnutím do posledně jmenovaných dvou knih se snadno přesvědčíme, že přístup v knihách [1],[3] je jenom jedním z možných přístupů ke studiu a prezentaci dané problematiky.
Nakonec poznamenejme, že zcela stranou zůstala problematika stochastických rozhodovacích procesů. Ale i stručná prezentace metod a výsledků této teorie přesahuje rámec této diplomové práce.

Literatura

[1] BELLMAN, R. *Dynamic Programming.* Princeton University Press,Princeton,1957

[2] KAUFMANN, A., CRUON, R. *Dynamické programovanie.* Alfa, Bratislava, 1969

[3] NEMHAUSER, G. L. *Einführung in die Praxis der Dynamischen Programmierung.* R.Oldenbourg Verlag München-Wien, 1969

[4] NEUMAN, F. *Funkcionální rovnice.* SNTL, Praha, 1986

[5] SMÍTAL, J. *O funkciach a funkcionálných rovniciach.* Alfa, Bratislava, 1984

[6] SNIEDOVICH, M. *Dynamic Programming.* Marcel Dekker, New York, 1992