Obsah

1 Přípravné poznámky

1.1 Používaná symbolika

Číselné množiny: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ — množina reálných, přirozených a celých čísel.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ — kladná reálná čísla
$\bar{\mathbb{R}}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ — nezáporná reálná čísla

Body, vektory: Množinu $\mathbb{R}^n$ budeme vždy uvažovat také jako vektorový prostor.

$\boldsymbol{x}$ — vektor nebo bod z prostoru $\mathbb{R}^n$. Vektory vždy uvažujeme jako sloupcové, složky vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ jsou $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
$(\boldsymbol{x})_i$ — i-tá složka vektoru $\boldsymbol{x}$, tj. $(\boldsymbol{x})_i = x_i$.
$\boldsymbol{o}$ — nulový vektor.
$\boldsymbol{1}$ — vektor, jehož všechny složky jsou jedničky.
$\boldsymbol{e}^j$ — j-tý vektor standardní báze, $(\boldsymbol{e}^j)_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (Kroneckerovo delta).
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ — $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})\, x_i \geq y_i$ a podobně.
$\boldsymbol{x} \geq y$ — $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})\, x_i \geq y$ a podobně.

Matice: $\mathcal{M}(m, n)$ — množina matic o m řádcích a n sloupcích. Vektory z množiny $\mathbb{R}^n$ považujeme za matice z množiny $\mathcal{M}(n, 1)$.

A — matice, jejíž složka v i-tém řádku a j-tém sloupci je a_{ij}.
$\boldsymbol{a}^j$ — j-tý sloupec matice A.
E — jednotková matice.
O — nulová matice.
A^T — matice transponovaná k matici A.
$h(\mathsf{A})$ — hodnost matice A.

Gradient: Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\boldsymbol{x}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\boldsymbol{x}), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\boldsymbol{x}) \right)^\mathsf{T}$$
$$\nabla_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \frac{\partial}{\partial x_2} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right)^\mathsf{T}$$

$|M|$ — mohutnost množiny M. Je-li množina M konečná, je $|M|$ počet jejích prvků.

Příklady:

$$(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = {\boldsymbol{e}^i}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \quad \text{skalární součin vektorů } \boldsymbol{x} \text{ a } \boldsymbol{y}$$

$$a_{ij} = (\boldsymbol{a}^j)_i = {\boldsymbol{e}^i}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{e}^j$$

$$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{1} \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})\, x_i < 1 \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})\, {\boldsymbol{e}^i}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} < 1$$

1.2 Některé pojmy a tvrzení z prerekvizitního předmětu M5171

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^\mathsf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $s \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Položme

$$P = \bar{\mathbb{R}}_+^s \times \mathbb{R}^{n-s} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_s \geq 0\},$$
$$Q = \bar{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{m-k} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_k \geq 0\},$$

1.2.1 Optimalizační úloha

Přípustná množina je definována jako

$$X = \{\boldsymbol{x} \in P : g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,\\ g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = k+1, k+2, \ldots, m\}.$$

Základní úloha je tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min, \qquad \boldsymbol{x} \in X.$$

$f^* = \inf\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in X\}$ se nazývá *hodnota úlohy.*
Pokud úloha má řešení $\boldsymbol{x^*} \in X$, pak $f^* = f(\boldsymbol{x^*})$, v opačném případě je $f^* = -\infty$.

1.2.2 Kuhnova-Tuckerova věta

Definice 1. *Podmínky regularity:*

- *Slaterova:* $k = m$ (omezení jsou pouze ve tvaru nerovností), $(\exists \bar{\boldsymbol{x}} \in P)\ \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0$.
- *Linearity:* funkce $g_1, q_2, \ldots, g_k$ jsou afinní (lineární).

Věta 1. *Nechť*

— *funkce f, g_1, g_2, …, g_k jsou konvexní a diferencovatelné,*
— *funkce g_{k+1}, g_{k+2}, …, g_m jsou afinní (lineární),*
— *je splněna aspoň jedna podmínka regularity.*

Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ položme

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$$

Pak $\boldsymbol{x^*} \in X$ je řešením základní úlohy právě tehdy, když existuje $\boldsymbol{y^*} \in Q$ tak, že

$$(\forall \boldsymbol{x} \in P)\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^*})^\mathsf{T} \nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*}) \geq 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y^*}^\mathsf{T} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x^*}) = 0. \tag{2}$$

Poznámka 1. Pokud $s = n$, je podmínka (1) ekvivalentní s dvojicí podmínek

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*}) \geq 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x^*}^\mathsf{T} \nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*}) = 0, \tag{4}$$

pokud $s = 0$, je podmínka (1) ekvivalentní s podmínkou

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*}) = 0. \tag{5}$$

1.2.3 Dualita

Nechť funkce $\varphi : Q \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ je definována rovností

$$\varphi(\boldsymbol{y}) = \inf \{\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \in P\} = \inf \left\{ f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in P \right\}.$$

Položme

$$Y = \{\boldsymbol{y} \in Q : \varphi(\boldsymbol{y}) > -\infty\}.$$

Platí: množina Y je konvexní, funkce φ je konkávní.

Duální úloha k základní (primární) úloze je optimalizační úloha ve tvaru

$$\varphi(\boldsymbol{y}) \to \max, \qquad \boldsymbol{y} \in Y.$$

$\varphi^* = \sup \{\varphi(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \in Y\}$ se nazývá *hodnota duální úlohy.*

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 1. Pokud $f^* > -\infty$, pak $f^* = \varphi^*$ a množina všech řešení duální úlohy je $\{\boldsymbol{y} \in Q : (\forall \boldsymbol{x} \in P)\, \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq f^*\}$.*

Stručně řečeno: Má-li jedna z úloh řešení, má řešení i druhá z nich a hodnoty obou úloh jsou stejné.

2 Lineární programování

2.1 Dvě motivační úlohy

2.1.1 Výrobní problém

Představme si firmu, vyrábějící n druhů produktů, ke kterým potřebuje m zdrojů (surovin, dodavatelů ap.). Označme

c_j **...** cena jednotkového množství j-tého produktu,

b_i **...** množství i-tého zdroje (zásobu suroviny, kapacitu dodavatele ap.),

a_{ij} **...** množství i-tého zdroje potřebného k výrobě jednotkového množství j-tého produktu,

x_j **...** vyrobené množství j-tého produktu.

Cena celkové produkce tedy je $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$ a celkové množství i-tého zdroje spotřebovaného při výrobě je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i$. Je třeba najít takové uspořádání výroby, tj. množství jednotlivých druhů produktů, aby jejich cena byla maximální,

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \to \max$$

při respektování daných omezení

$$(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i \leq b_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{tedy } \mathsf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

(nelze spotřebovat více z každého zdroje, než kolik ho je) a

$$x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{tedy } \boldsymbol{x} \geq 0$$

(nelze vyrábět méně než nulové množství každého z produktů).

2.1.2 Směšovací problém

Představme si, že z n surovin (např. druhů ropy), z nichž každá obsahuje některé (případně všechny) z m různých složek (např. frakcí ropy). Z těchto surovin se má namíchat směs požadovaného složení (např. lehký topný olej). Označme

c_j **...** cena j-té suroviny,

b_i **...** požadované množství i-té složky ve výsledné směsi,

a_{ij} **...** množství i-té složky v jednotkovém množství j-té suroviny,

x_j **...** nakoupené množství j-té suroviny.

Celková cena nakoupených surovin tedy je $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j = \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$ a celkové množství i-té složky ve výsledné směsi je $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i$. Je třeba nakoupit taková množství surovin, aby jejich cena byla nejmenší,

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \to \min$$

a přitom ve výsledné směsi byla pożdovaná množství jednotlivých složek,

$$(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i = b_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{tedy } \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Na množství nakoupených surovin je kladeno omezení

$$x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{tedy } \boldsymbol{x} \geq 0$$

(nelze nakoupit méně než nic).

2.2 Formulace úlohy lineárního programování

Nechť $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A} \in \mathcal{M}(m, n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $s \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Položme

$$P = \bar{\mathbb{R}}_+^s \times \mathbb{R}^{n-s} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_s \geq 0\}$$

Úloha lineárního programování je optimalizační úloha ve tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \to \min, \qquad \boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in P : (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,\\ (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j = b_j,\ j = k+1, k+2, \ldots, m\}$$

Speciální případy:

$s = n$**,** $k = 0$ úloha v *kanonickém tvaru,*

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \to \min \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0. \tag{6}$$

$s = n$**,** $k = m$ úloha ve *standardním tvaru,*

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \to \min, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0. \tag{7}$$

$s = 0,\ k = m$ úloha v *základním tvaru,*

$$\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \to \min, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}. \tag{8}$$

Tvrzení 1. Obecnou úlohu lineárního programování lze přepsat do základního tvaru.

Zavedeme pomocný neznámý vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{m-k}$ a podmínky přepíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}
(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i \qquad & \le b_i, && i = 1, 2, \dots, k,\\
(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_{k+j} - w_j & \le b_{k+j}, && j = 1, 2, \dots, m-k,\\
-x_\ell \qquad & \le 0, && \ell = 1, 2, \dots, s,\\
-w_j & \le 0, && j = 1, 2, \dots, m-k.
\end{aligned}$$

To znamená, že při označení

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \le m, j \le n,\\ 0, & i \le k, j > n,\\ -\delta_{i-k,j-n}, & k < i \le m, j > n,\\ -\delta_{i-m,j}, & m < i \le m+s,\\ -\delta_{i-m-s,j-n}, & i > m+s, \end{cases}$$

$$\tilde{b}_i = \begin{cases} b_i, & i \le m,\\ 0, & i > m \end{cases}, \quad \tilde{c}_j = \begin{cases} c_j, & j \le n,\\ 0, & j > n \end{cases}, \quad \tilde{x}_j = \begin{cases} x_j, & i \le n\\ w_{j-n}, & j > n \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n+m+s-k,\ j = 1, 2, \dots, n+m-k$$

můžeme úlohu zapsat ve tvaru

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \to \min, \quad \tilde{\mathsf{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} \le \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Tvrzení 2. Úlohu s parametrem $s = n$ lze přepsat do kanonického tvaru. Zejména tedy úlohu ve standardním tvaru můžeme zapsat ve tvaru kanonickém.

Podobně jako v předchozím tvrzení zavedeme pomocný neznámý vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{m-k}$ a podmínky přepíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}
(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i + w_i &= b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,\\
(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j \qquad &= b_j, \quad j = k+1, k+2, \dots m,
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x} \ge 0, \quad \boldsymbol{w} \ge 0.$$

Takže při označení

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \le m, j \le n,\\ \delta_{i,j-n}, & i \le k, j > n,\\ 0, & i > k, j > n, \end{cases} \qquad \tilde{c}_j = \begin{cases} c_j, & j \le n,\\ 0, & j > n \end{cases}, \qquad \tilde{x}_j = \begin{cases} x_j, & i \le n\\ w_{j-n}, & j > n \end{cases}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n+m-k$ můžeme úlohu zapsat ve tvaru

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \to \min, \quad \tilde{\mathsf{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b},\ \tilde{\boldsymbol{x}} \ge 0.$$

Úlohu ve standardním tvaru lze do tvaru kanonického přepsat ještě stručněji

$$\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \to \min, \quad (\mathsf{A}, \mathsf{E})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} = \boldsymbol{b},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} \ge 0.$$

Tvrzení 3. Úloha duální k úloze v kanonickém tvaru je úloha v základním tvaru.

V tomto případě je

$$\begin{aligned}
&Q = \mathbb{R}^m, \\
&\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\mathsf{T}(\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}^\mathsf{T} - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}, \\
&\varphi(\boldsymbol{y}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in P} \{\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\} = \inf_{\boldsymbol{x}\in\bar{\mathbb{R}}^n_+} \left\{(\boldsymbol{c}^\mathsf{T} - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{A})\boldsymbol{x}\right\} + \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{b} = \begin{cases} \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{c}^\mathsf{T} - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{A} \geq 0, \\ -\infty, & \boldsymbol{c}^\mathsf{T} - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{A} < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Duální úloha tedy je

$$\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{b} \to \max, \quad \mathsf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}. \tag{9}$$

Z tvrzení 1, 2 a 3 plyne, že stačí vybudovat teorii pro úlohy v kanonickém tvaru. Libovolnou úlohu totiž převedeme na základní tvar a k němu je úloha v kanonickém tvaru duální. Úlohu v kanonickém tvaru vyřešíme a řešení úlohy v základním tvaru se redukuje na řešení systému lineárních rovnic. Úlohu ve standardním tvaru převedeme na kanonický tvar přímo.

V dalším textu se tedy budeme zabývat úlohou v kanonickém tvaru

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \to \min, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

- $\boldsymbol{b} \geq 0$ (v opačném případě bychom řádky systému rovnic odpovídající záporným složkám vynásobili číslem -1),
- $m \leq n$, $h(\mathsf{A}) = m$ (v opačném případě bychom ze systému rovnic eliminovali závislé rovnice).

2.3 Ilustrační příklady

2.3.1

$$f(x_1,x_2,x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min, \qquad \begin{aligned} x_1{+}x_2{+}x_3 &= 1, \\ 2x_2{-}x_3 &= 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

tj.

$$n = 3,\ m = 2,\ s = 3,\ k = 0, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Přípustné hodnoty jsou nezáporná řešení soustavy rovnic $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tj.

$$X = \left\{(1-3s, s, 2s) : 0 \leq s \leq \tfrac{1}{3}\right\},$$

takže účelová funkce na přípustné množině je

$$f(1-3s, s, 2s) = c_1 + (-3c_1 + c_2 + 2c_3)\, s.$$

To je funkce lineární, nabývá svých extrémních hodnot v krajních bodech intervalu, na němž je definovaná. Tato funkce je rostoucí pro $-3c_1+c_2+2c_3 > 0$ a klesající pro $-3c_1+c_2+2c_3 < 0$. Z této úvahy plyne, že řešení úlohy a její hodnota jsou

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \begin{cases} = (1,0,0), & -3c_1 + c_2 + 2c_3 > 0, \\ \in X \text{ libovolný bod}, & -3c_1 + c_2 + 2c_3 = 0, \\ = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), & -3c_1 + c_2 + 2c_3 < 0, \end{cases}$$

$$f^* = \begin{cases} c_1, & -3c_1 + c_2 + 2c_3 \geq 0, \\ \frac{1}{3}\left(c_2 + c_3\right), & -3c_1 + c_2 + 2c_3 < 0. \end{cases}$$

2.3.2 $\quad f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ -x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

tj.

$$n = 3,\ m = 2,\ s = 3,\ k = 0, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přípustné hodnoty jsou opět nezáporná řešení soustavy rovnic $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tj.

$$X = \{(1, t, 1+t) : t \geq 0\}$$

a účelová funkce na přípustné množině je

$$f(1, t, 1+t) = c_1 + c_3 + (c_2 + c_3)t.$$

To je opět funkce lineární, která roste pro $c_2+c_3 > 0$ a klesá pro $c_2+c_3 < 0$. Poněvadž parametr t může nabývat libovolně velké hodnoty, je účelová funkce, pokud klesá, zdola neomezená. V takovém případě tedy úloha nemá řešení. V případě $c_2 + c_3 \geq 0$ řešení úlohy a její hodnota jsou

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \begin{cases} = (1,0,1), & c_2 + c_3 > 0, \\ \in X \text{ libovolný bod}, & c_2 + c_3 = 0, \end{cases} \qquad f^* = c_1 + c_3.$$

2.4 Označení, definice, základní vlastnosti

Na ilustračních příkladech si všimneme následujících vlastností úlohy lineárního programování v kanonickém tvaru:

- Pokud úloha má jednoznačné řešení, pak toto řešení je krajním bodem přípustné množiny X. (Krajní bod konvexní množiny je ten, který není konvexní kombinací jiných bodů této množiny.)

- Pokud úloha má více řešení, pak tato řešení jsou konvexní kombinací krajních bodů přípustné množiny.

- Řešení úlohy, které je krajním bodem, má nejvýše m nenulových složek (v příkladech dvě).

- Sloupce matice A se slupcovými indexy odpovídajícími indexům nenulových složek krajních bodů přípustné množiny jsou lineárně nezávislé. (V příkladu 2.3.1 odpovídá krajnímu bodu $(1,0,0)$ první sloupec $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ matice a krajnímu bodu $(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ odpovídají druhý $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ a třetí $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sloupec. V příkladu 2.3.2 odpovídají krajnímu bodu $(1,0,1)$ první $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a třetí $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sloupec matice.

Tato pozorování motivují zavedení následujících pojmů.

- *Nosič vektoru* $\boldsymbol{x} \in P = \bar{\mathbb{R}}_+$ je množina $\operatorname{supp}\boldsymbol{x} = \{j \in \{1,2,\dots,n\} : x_j > 0\}$.
- *Množina basických přípustných bodů*

$$B = \left\{ \boldsymbol{x} \in X : \sum_{j \in \operatorname{supp}\boldsymbol{x}} \mu_j \boldsymbol{a}^j = 0 \Rightarrow (\forall j \in \operatorname{supp}\boldsymbol{x})\mu_j = 0 \right\}.$$

  Basický přípustný bod je tedy takový bod $\boldsymbol{x} \in X$, že sloupce matice A se sloupcovými indexy shodujícími se s indexy nenulových složek vektoru $\boldsymbol{x}$, tj. všechny vektory z množiny $\left\{\boldsymbol{a}^j : j \in \operatorname{supp}\boldsymbol{x}\right\}$ jsou lineárně nezávislé. Poněvadž předpokládáme, že $h(\mathsf{A}) = m \le n$, je nosič každého basického přípustného bodu nejvýše m-prvková množina.

- *Indexová base basického přípustného bodu* $\boldsymbol{x} \in B$ je m-prvková podmnožina $\mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ množiny $\{1,2,\dots,n\}$ taková, že $\operatorname{supp}\boldsymbol{x} \subseteq \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ a množina $\left\{\boldsymbol{a}^j : j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\right\}$ je množinou lineárně nezávislých vektorů, tj.

$$\operatorname{supp}\boldsymbol{x} \subseteq \mathcal{J}(\boldsymbol{x}) \subseteq \{1,2,\dots,n\}, \qquad |\mathcal{J}(\boldsymbol{x})| = m,$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})} \mu_j \boldsymbol{a}^j = 0 \Rightarrow \big(\forall j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\big)\mu_j = 0.$$

  To také znamená, že množina $\left\{\boldsymbol{a}^j : j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\right\}$ sloupců matice A tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^m$. Z předpokladu $h(\mathsf{A}) = m$ plyne, že indexová base každého basického přípustného bodu existuje; nemusí být ovšem určena jednoznačně.
  Base basického přípustného bodu $\boldsymbol{x} \in B$ je množina

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = \{x_j : j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\}.$$

- Basický přípustný bod $\boldsymbol{x} \in B$ je *nedegenerovaný*, pokud $\operatorname{supp}\boldsymbol{x} = \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$. Úloha je *nedegenerovaná*, pokud každý basický přípustný bod je nedegenerovaný, tj.

$$(\forall \boldsymbol{x} \in B)\operatorname{supp}\boldsymbol{x} = \mathcal{J}(\boldsymbol{x}).$$

- Basické přípustné body $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ nazveme *sousední*, pokud existují jejich base $\mathcal{J}(\boldsymbol{x_1})$ a $\mathcal{J}(\boldsymbol{x_2})$ takové, že množina $\mathcal{J}(\boldsymbol{x_1}) \cap \mathcal{J}(\boldsymbol{x_2})$ je $(m-1)$-prvková, tj. base bodů $\boldsymbol{x_1}$ a $\boldsymbol{x_2}$ se od sebe liší v jediném prvku.
  Degenerovaný basický přípustný bod je sousední sám se sebou.

Ilustrace: V příkladu 2.3.1 je

$$B = \left\{(1,0,0),(0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})\right\}, \quad \operatorname{supp}(0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}) = \{2,3\} = \mathcal{J}\left((0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})\right),$$

$$\operatorname{supp}(1,0,0) = \{1\}\,, \; \mathcal{J}\left((1,0,0)\right) = \{1,2\} \text{ nebo } \mathcal{J}\left((1,0,0)\right) = \{1,3\}\,,$$

basický přípustný bod $(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ je nedegenerovaný, bod $(1,0,0)$ je degenerovaný a tyto body jsou sousední.

V příkladu 2.3.2 je $B = \{(1,0,1)\}$, $\operatorname{supp}(1,0,1) = \{1,3\} = \mathcal{J}\left((1,0,1)\right)$ a basický přípustný bod $(1,0,1)$ je nedegenerovaný. □

Věta 3. *Bod $\boldsymbol{x}$ je basický přípustný právě tehdy, když je krajním bodem množiny X.*

Věta 4. *Je-li přípustná množina X neprázdná, pak množina basických přípustných bodů je konečná a ke každému přípustnému bodu $\boldsymbol{x} \in X$ existuje basický přípustný bod $\bar{\boldsymbol{x}} \in B$ takový, že $\operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}} \subseteq \operatorname{supp} \boldsymbol{x}$. Zejména tedy množina basických přípustných bodů je neprázdná.*

Věta 5. *Pokud má úloha (6) řešení, pak je toto řešení basickým přípustným bodem.*

Z vět 3, 4 a 5 plyne jednoduchý návod, jak řešit úlohu (6):

1. Najdeme všechny basické přípustné body, tj. najdeme nezávislá řešení systému lineárních rovnic $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Je jich konečně mnoho.

2. Vypočítáme hodnotu účelové funkce $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$ pro každý basický přípustný bod $\boldsymbol{x}$.

3. Najdeme mezi nimi nejmenší hodnotu.

Pokud má úloha řešení, vede tento postup k jeho nalezení. Avšak pokud je úloha neřešitelná a množina basických přípustných bodů je neprázdná, dojdeme uvedeným postupem k bodu, který není řešením (v příkladu 2.3.2 v případě $c_2 + c_3 < 0$ vybere dokonce bod maxima účelové funkce). I u řešitelných úloh by však použití tohoto postupu u „velkých“ úloh bylo příliš zdlouhavé. Proto byla vyvinuta metoda efektivnější.

Před jejím uvedením se však zmíníme o řešení úlohy (9) duální k primární úloze (6) v kanonickém tvaru.

Věta 6. *Nechť $\mathsf{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$.*

- *Vektor $\boldsymbol{x}^*$ je řešením (primární) úlohy (6) v kanonickém tvaru a vektor $\boldsymbol{y}^*$ je řešením duální úlohy (9) právě tehdy, když $(\mathsf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{c})^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* = 0$.*

- *Pokud*
$$(\forall j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x}^*))\, {\boldsymbol{y}^*}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}^j = c_j,$$
$$(\forall j \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \mathcal{J}(\boldsymbol{x}^*))\, {\boldsymbol{y}^*}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}^j \le c_j$$
pak $\boldsymbol{y}^*$ je řešením duální úlohy (9).

Důkaz: První tvrzení je ekvivalentní s rovností $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* = {\boldsymbol{y}^*}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}$ a za předpokladu $\mathsf{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$ jsou následující úpravy také ekvivalentní

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* &= {\boldsymbol{y}^*}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* &= {\boldsymbol{y}^*}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}^*, \\ 0 &= (\mathsf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{c})^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^*. \end{aligned}$$

Druhé tvrzení plyne z prvního, neboť

$$\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{c}\right)^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* = \sum_{j=1}^{n}\left((\mathsf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}^*)_j - c_j\right)x_j^* = \sum_{j\in\mathcal{J}(\boldsymbol{x}^*)}\left((\mathsf{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}^*)_j - c_j\right)x_j^* =$$

$$= \sum_{j\in\mathcal{J}(\boldsymbol{x}^*)}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i^* - c_j\right)x_j^* = \sum_{j\in\mathcal{J}(\boldsymbol{x}^*)}\left((\boldsymbol{a}^j)^\mathsf{T}\boldsymbol{y}^* - c_j\right)x_j^* = 0.$$

□

2.5 Simplexová metoda

2.5.1 Jeden krok simplexové metody

Simplexová metoda je algoritmus, který pro basický přípustný bod rozhodne, zda se v něm realizuje řešení úlohy. Pokud nikoliv, rozhodne zda řešení neexistuje a v opačném případě najde sousední basický přípustný bod, v němž je hodnota účelové funkce menší.

Nechť $\boldsymbol{x} \in B$. Sloupce $\left\{\boldsymbol{a}^j : j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\right\}$ matice A tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^m$. Libovolný sloupec matice tedy lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců matice A z množiny $\left\{\boldsymbol{a}^j : j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\right\}$, tj.

$$\boldsymbol{a}^p = \sum_{j\in\mathcal{J}(\boldsymbol{x})} \lambda_{jp}\boldsymbol{a}^j, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Pro $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nyní položíme

$$\Delta_p = \sum_{j\in\mathcal{J}(\boldsymbol{x})} \lambda_{jp}c_j - c_p. \tag{11}$$

Je zřejmé, že pro $p \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ je $\lambda_{jp} = \delta_{jp}$ a tedy

$$\Delta_p = \sum_{j\in\mathcal{J}(\boldsymbol{x})} \lambda_{jp}c_j - c_p = \sum_{j\in\mathcal{J}(\boldsymbol{x})} \delta_{jp}c_j - c_p = c_p - c_p = 0.$$

Ilustrace: V příkladu 2.3.1 vezmeme $\boldsymbol{x} = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \in B$. Pak je $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \{2, 3\}$ a

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

tedy $\boldsymbol{a}^1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{a}^2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{a}^3$ a $\Delta_1 = \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_3 - c_1$. Celkem máme

$$\begin{array}{rlll} \lambda_{21} = \frac{1}{3} & \lambda_{22} = 1 & \lambda_{23} = 0 & x_2 = \frac{1}{3} \\ \lambda_{31} = \frac{2}{3} & \lambda_{32} = 0 & \lambda_{33} = 1 & x_3 = \frac{2}{3} \\ \Delta_1 = \frac{1}{3}(-3c_1 + c_2 + 2c_3) & \Delta_2 = 0 & \Delta_3 = 0 & f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}(c_2 + 2c_3) \end{array} \tag{12}$$

V příkladu 2.3.2 je $B = \{(1, 0, 1)\}$, vezmeme tedy $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1)$. Pak je $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \{1, 3\}$ a

$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},$$

tedy $\boldsymbol{a}^2 = 0\boldsymbol{a}^1 + (-1)\boldsymbol{a}^3$ a $\Delta_2 = -c_3 - c_2$. Celkem máme

$$\begin{array}{cccc} \lambda_{21} = 1 & \lambda_{22} = 0 & \lambda_{23} = 0 & x_1 = 1 \\ \lambda_{31} = 0 & \lambda_{32} = -1 & \lambda_{33} = 1 & x_3 = 1 \\ \Delta_1 = 0 & \Delta_2 = -(c_2 + c_3) & \Delta_3 = 0 & f(\boldsymbol{x}) = c_1 + c_2 \end{array} \tag{13}$$

□

Věta 7. *Buď $\boldsymbol{x} \in B$. Nechť čísla λ_{jp}, $j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou definována vztahy (10) a čísla Δ_p, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou definována vztahy (11). Mohou nastat případy*

(i) $\big(\forall p \in \{1, 2, \dots, n\}\big)\ \Delta_p \leq 0$,

(ii) $\big(\exists p \in \{1, 2, \dots, n\}\big)\ \Delta_p > 0$.

Pokud nastane případ (i), je bod $\boldsymbol{x}$ řešením úlohy (6).

Nechť nastane případ (ii). Položíme $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že

$$\Delta_q = \max\{\Delta_p : \Delta_p > 0, p = 1, 2, \dots, n\} > 0.$$

Pak je $q \notin \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ a opět mohou nastat dva případy

(ii$_1$) $\big(\forall j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\big)\ \lambda_{jq} \leq 0$,

(ii$_2$) $\big(\exists j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})\big)\ \lambda_{jq} > 0$.

Pokud nastane případ (ii$_1$), úloha (6) nemá řešení.

Nechť nastane případ (ii$_2$). Položíme

$$\alpha = \min\left\{\frac{x_j}{\lambda_{jq}} : j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x}), \lambda_{jq} > 0\right\}$$

a $r \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ takové, že $\dfrac{x_r}{\lambda_{rq}} = \alpha$. Pak bod $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ definovaný rovnostmi

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j - \alpha\lambda_{jq}, & j \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x}), \\ \alpha, & j = q, \\ 0, & j \notin \mathcal{J}(\boldsymbol{x}) \cup \{q\}. \end{cases}$$

je basický přípustný bod sousední s bodem $\boldsymbol{x}$, $\mathcal{J}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \big(\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) \smallsetminus \{r\}\big) \cup \{q\}$ a platí pro něho

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x});$$

pokud je basický přípustný bod nedegenerovaný, je tato nerovnost ostrá.

S „novým“ basickým přípustným bodem $\tilde{\boldsymbol{x}}$ můžeme provádět stejné operace, jako se „starým“ basickým přípustným bodem $\boldsymbol{x}$, tedy libovolný sloupec matice A vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců z množiny $\big\{\boldsymbol{a}^j : j \in \mathcal{J}(\tilde{\boldsymbol{x}})\big\}$ a vypočítat příslušné hodnoty $\tilde{\Delta}$,

$$\boldsymbol{a}^p = \sum_{j \in \mathcal{J}(\tilde{\boldsymbol{x}})} \tilde{\lambda}_{jp}\boldsymbol{a}^j, \quad \tilde{\Delta}_p = \sum_{j \in \mathcal{J}(\tilde{\boldsymbol{x}})} \tilde{\lambda}_{jp}c_j - c_p, \qquad p = 1, 2, \dots, n.$$

Podle věty 7 rozhodneme, zda basický přípustný bod $\tilde{x}$ je řešením úlohy (6), zda řešení neexistuje, nebo přejdeme do sousedního basického přípustného bodu, v němž je hodnota účelové funkce menší. Pokud je úloha nedegenerovaná, po konečném počtu kroků takto dojdeme k řešení úlohy.

V případě degenerovaného basického přípustného bodu $\boldsymbol{x}$ může dojít k zacyklení, metoda pouze vybírá různé base bodu $\boldsymbol{x}$. Pravděpodobnost, že k tomuto jevu dojde v praktických úlohách je však nulová (což ovšem neznamená, že se jedná o jev nemožný).

Ilustrace: Případy (i) je ilustrován tabulkou (12) s vektorem $\boldsymbol{c}$, jehož složky splňují nerovnost $-3c_1+c_2+2c_3 < 0$. Případ (ii$_1$) je ilustrován tabulkou (13) s parametry vyhovujícími nerovnosti $c_1 + c_2 < 0$.

Uvažujme příklad 2.3.1 s vektorem $\boldsymbol{c}$ splňujícím nerovnost $-3c_1 + c_2 + 2c_3 > 0$. Hodnoty koeficientů λ_{jp} a veličin Δ_p pro basický přípustný bod $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ jsou v tabulce (12). V tomto případě je $q = 1$ a obě hodnoty $\lambda_{2q} = \lambda_{21} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{3q} = \lambda_{31} = \frac{2}{3}$ jsou kladné. Nastává tedy možnost (ii$_2$). Dále je

$$\frac{x_2}{\lambda_{21}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1, \quad \frac{x_3}{\lambda_{31}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1,$$

takže $\alpha = 1$. Index r není určen jednoznačně, zvolíme $r = 2$. Bod $\tilde{\boldsymbol{x}}$ má souřadnice

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_q = 1, \quad \tilde{x}_2 = x_2 - \lambda_{21} = 0, \quad \tilde{x}_3 = x_3 - \lambda_{31} = 0.$$

Bod $\tilde{\boldsymbol{x}} = (1, 0, 0)$ je skutečně basický přípustný bod sousední s bodem $\boldsymbol{x}$. Za jeho indexovou basi považujeme množinu $\mathcal{J}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \{1, 2\}$. Pro basický přípustný bod $(1, 0, 0)$ s uvedenou basí určíme koeficienty $\tilde{\lambda}_{jp}$ a hodnoty $\tilde{\Delta}_p$. Platí

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tedy $\boldsymbol{a}^3 = \frac{3}{2}\boldsymbol{a}^1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2$, takže $\tilde{\lambda}_{13} = \frac{3}{2}$, $\tilde{\lambda}_{23} = -\frac{1}{2}$, $\tilde{\Delta}_3 = \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - c_3$. Celkem máme

$$\begin{array}{llll} \tilde{\lambda}_{11} = 1 & \tilde{\lambda}_{12} = 0 & \tilde{\lambda}_{13} = \frac{3}{2} & \tilde{x}_1 = 1 \\ \tilde{\lambda}_{21} = 0 & \tilde{\lambda}_{22} = 1 & \tilde{\lambda}_{23} = -\frac{1}{2} & \tilde{x}_2 = 0 \\ \tilde{\Delta}_1 = 0 & \tilde{\Delta}_2 = 0 & \tilde{\Delta}_3 = -\frac{1}{2}(-3c_1 + c_2 + 2c_3) & f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = c_1 \end{array} \tag{14}$$

Nastává tedy případ (i) z věty 7 a bod $(1, 0, 0)$ je řešením úlohy 2.3.1 s parametry splňujícími nerovnost $-3c_1 + c_2 + 2c_3 > 0$.

Tabulky (12) a (14) zapíšeme ve formě matic:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}(-3c_1 + c_2 + 2c_3) & 0 & 0 & \frac{1}{3}(c_2 + 2c_3) \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(-3c_1 + c_2 + 2c_3) & c_1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}(-3c_1 + c_2 + 2c_3) & 0 & 1 \end{pmatrix} S.$$

První řádek matice $\tilde{S}$ je $\frac{3}{2}$-násobkem druhého řádku matice S, druhý řádek matice $\tilde{S}$ je prvním řádkem matice S zmenšeným o polovinu druhého řádku matice S, třetí řádek matice $\tilde{S}$ je roven třetímu řádku matice S zvětšenému o polovinu prvního řádku matice S násobenému výrazem $-3c_1 + c_2 + 2c_3$. Jinak řečeno, od matice S lze k matici S přejít Gaussovou eliminací. $\square$

2.5.2 Simplexová tabulka

Simplexová tabulka slouží k přehlednému zápisu výpočtů s basickým přípustným bodem $\boldsymbol{x}$ a jeho indexovou basí $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. Má $n+2$ sloupců a $m+1$ řádků a je doplněna záhlavím a označením sloupců. První sloupec je pomocný, v prvních m řádcích posledního sloupce jsou j_1 až j_m-tá souřadnice basického přípustného bodu $\boldsymbol{x}$ (odpovídající indexům z base), ve druhém až $n+1$-ním sloupci j_k-tého řádku jsou koeficienty $\lambda_{j_k p}$, na posledním řádku ve druhém až $n+1$-ním sloupci jsou veličiny Δ_p, $p = 1, 2, \ldots, n$. V posledním sloupci na posledním řádku je hodnota účelové funkce v basickém přípustném bodě $\boldsymbol{x}$.

	z	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	
x_{j_1}	0	$\lambda_{j_1 1}$	$\lambda_{j_1 2}$	$\ldots$	$\lambda_{j_1 n}$	$(\boldsymbol{x})_{j_1}$
x_{j_2}	0	$\lambda_{j_2 1}$	$\lambda_{j_2 2}$	$\ldots$	$\lambda_{j_2 n}$	$(\boldsymbol{x})_{j_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{j_m}	0	$\lambda_{j_m 1}$	$\lambda_{j_m 2}$	$\ldots$	$\lambda_{j_m n}$	$(\boldsymbol{x})_{j_m}$
z	1	Δ_1	Δ_2	$\ldots$	Δ_n	$f(\boldsymbol{x})$

Je-li $j_k \in \mathcal{J}(\boldsymbol{x})$, pak z definice hodnot $\lambda_{j_k p}$ a Δ_p plyne, že ve sloupci označeném x_{j_p} jsou samé nuly s výjimkou řádku označeného stejně, ve kterém je jednička. V prvním sloupci označeném z jsou nuly s výjimkou posledního řádku označeného stejně, kde je jednička.

Postup výpočtu:

- Pokud jsou všechny prvky v posledním řádku ve druhém až předposledním sloupci nekladné, je basický přípustný bod $\boldsymbol{x}$ řešením úlohy (6) a hodnota této úlohy je na poslední pozici posledního řádku.

- Pokud se v posledním řádku ve druhém až předposledním sloupci vyskytuje kladná hodnota, vybereme sloupec, v němž je tato hodnota největší. Tento sloupec nazveme *klíčový sloupec.* (Při označení z věty 7 se jedná o sloupec nadepsaný x_q.)

- Mezi prvními m řádky najdeme všechny takové, že v tomto řádku a klíčovém sloupci je kladná hodnota. Pokud takový řádek neexistuje, úloha nemá řešení. V opačném případě pro takové řádky vypočítáme podíl hodnoty v posledním sloupci a hodnoty v klíčovém sloupci (tyto podíly můžeme zapsat do přidaného dalšího sloupce tabulky) a najdeme mezi nimi nejmenší hodnotu. Řádek, v němž se tento minimální podíl nachází, nazveme *klíčový řádek.* (Při označení z věty 7 se jedná o řádek označený x_r.) Prvek na průsečíku klíčového řádku a klíčového sloupce nazveme *klíčový prvek.*

- Tabulku upravíme: Klíčový řádek označíme symbolem ze záhlaví klíčového sloupce. Hodnoty v klíčovém řádku vydělíme hodnotou klíčového prvku. Od každého dalšího řádku odečteme takto upravený klíčový řádek násobený hodnotou v klíčovém sloupci upravovaného řádku.

- Upravená tabulka by měla mít stejnou vlastnost jako tabulka výchozí, tj. ve sloupci označeném x_{j_p} jsou samá nuly s výjimkou řádku označeného stejně, ve kterém je jednička, a v prvním sloupci označeném z jsou nuly s výjimkou posledního řádku označeného stejně, kde je jednička. Ověření, že tabulka má skutečně tento tvar slouží ke kontrole výpočtu.

Ilustrace: Provedeme úpravu simplexové tabulky pro úlohu 2.3.1 s basickým přípustným bodem $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a vektorem $\boldsymbol{c} = (1, 2, 3)^\mathsf{T}$. Klíčový prvek je při výpočtu označen zarámováním.

	z	x_1	x_2	x_3		
x_2	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	1	0	$\frac{1}{3}$	1
x_3	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	1
z	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	
x_1	0	1	3	0	1	
x_3	0	0	-2	1	0	
z	1	0	-1	0	1	

Dostali jsme řešení úlohy $\boldsymbol{x}^* = (1, 0, 0)$, jeho indexová base je $\{1, 3\}$ a hodnota úlohy je $f^* = 1$.
$\square$

2.5.3 Volba počátečního basického přípustného bodu

Dosavadní popis simplexové metody se věnoval rozhodnutí, zda jistý basický přípustný bod je řešením úlohy a pokud ne, zda úloha řešení má. V případě, že úloha je řešitelná a zvolený basický bod nebyl řešením, metoda nalezla sousední basický přípustný bod, v němž hodnota účelové funkce nebyla větší. Zbývá popsat „nastartování“ metody.

Samozřejmě, že je možné najít jedno nezáporné řešení soustavy rovnic $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a k němu spočítat hodnoty λ_{jp} a Δ_p, $p = 1, 2, \ldots, n$. Rychlejší ale je tzv. *metoda umělé báze.*

Uvažujme úlohu

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \to \min, \qquad \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geq 0,\ \ \boldsymbol{w} \geq 0, \tag{15}$$

neboli

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{o}^\mathsf{T}, \boldsymbol{1}^\mathsf{T}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix} \to \min, \quad (\mathsf{A}, \mathsf{E}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Účelová funkce $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ je zdola omezená nulou. To znamená, že řešení $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{w}})$ této úlohy existuje. Pokud $f(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{w}}) = 0$, pak $\mathcal{J}((\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{w}})) \cap \{n+1, n+2, \ldots, n+m\} = \emptyset$ a bod $\hat{\boldsymbol{x}}$ je basickým přípustným bodem původní úlohy (6). Pokud $f(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{w}}) > 0$, nemá původní úloha řešení.

Poněvadž sloupce jednotkové matice E jsou lineárně nezávislé a stále předpokládáme, že $\boldsymbol{b} \geq 0$, je bod $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{b})$ basickým přípustným bodem úlohy (15) a

$$\mathcal{J}((\boldsymbol{o}, \boldsymbol{b})) = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}.$$

Označme

$$\tilde{\mathsf{A}} = (\mathsf{A}, \mathsf{E}), \qquad \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^p = \boldsymbol{e}^{p-n}, \qquad\qquad p = n+1, n+2, \ldots, n+m,$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^p = \boldsymbol{a}^p = \sum_{j=1}^{m} a_{jp} \boldsymbol{e}^j = \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{j-n,p} \tilde{a}^j, \qquad p = 1, 2, \ldots, n,$$

takže

$$
\begin{aligned}
&\Delta_p = 0, && p = n+1, n+2, \dots, n+m,\\
&\Delta_p = \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{j-n,p} - 0 = \sum_{j=1}^{m} a_{jp}, && p = 1, 2, \dots, n,\\
&f(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{b}) = \tilde{\boldsymbol{c}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{o}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{1}^{\mathsf{T}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} b_j. &&
\end{aligned}
$$

Spolu s úlohou (15) budeme uvažovat rovnici

$$z - \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} = 0;$$

proměnná z vyjadřuje hodnotu účelové funkce původní úlohy (6). Řádek odpovídající této rovnici zapíšeme do simplexové tabulky řešené úlohy. Budeme tedy upravovat tabulku

	$\sum w_i$	z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	w_1	w_2	$\dots$	w_m	
w_1	0	0	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
w_2	0	0	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
w_m	0	0	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
z	0	1	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	$\dots$	0	0
$\sum w_i$	1	0	$\sum_{j=1}^{m} a_{j1}$	$\sum_{j=1}^{m} a_{j2}$	$\dots$	$\sum_{j=1}^{m} a_{jn}$	0	0	$\dots$	0	$\sum_{j=1}^{m} b_j$

Při úpravách této simplexové tabulky vybíráme klíčový řádek pouze z prvních m řádků tabulky. Po nalezení minima účelové funkce pomocné úlohy pokračujeme s upravenou simplexovou tabulkou, ve které vynecháme poslední řádek a sloupce označené $\sum w_i$, w_1, w_2, $\dots w_n$.

Ilustrace: Vyřešíme úlohu 2.3.1 s vektorem $\boldsymbol{c} = (1, 2, 3)^{\mathsf{T}}$ simplexovou metodou. Klíčový prvek je označen zarámováním.

	$\sum w_i$	z	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2		
w_1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
w_2	0	0	0	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	0
z	0	1	-1	-2	-3	0	0	0	
$\sum w_i$	1	0	1	3	0	0	0	1	
w_1	0	0	1	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	
x_2	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
z	0	1	-1	0	-4	0	1	0	
$\sum w_i$	1	0	1	0	$\frac{3}{2}$	0	-3	1	
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
x_2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
z	0	1	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	
$\sum w_i$	1	0	0	0	0	-1	-1	0	

Pomocná uloha tedy má řešení $w_1 = w_2 = 0$. Počáteční basické řešení původní úlohy je $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Budeme pokračovat úpravou simplexové tabulky, která vznikne ze získané výsledné tabulky vynecháním sloupců označených $\sum w_i$, w_1, w_2 a řádku označeného $\sum w_i$.

	z	x_1	x_2	x_3		
x_3	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	1	$\frac{2}{3}$	1
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	1
z	1	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{8}{3}$	
x_1	0	1	0	$\frac{3}{2}$	1	
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
z	1	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	

Dostali jsme opět řešení $(1, 0, 0)$, za jeho indexovou basi tentokrát považujeme množinu $\{1, 2\}$. $\square$

3 Lineární lomené a hyperbolické programování

3.1 Motivační úloha

3.1.1 Optimální poměr zisku a nákladů

Uvažujme výrobní problém 2.1.1. Výroba každého z produktů může mít své náklady. Označme proto d_j náklady na výrobu jednotkového množství j-tého produktu. Celkové náklady na produkci pak jsou

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j = \boldsymbol{d}^\mathsf{T} \boldsymbol{x}.$$

Hledáme optimální poměr ceny produkce a nákladů na ni při daných omezeních, tedy řešíme úlohu

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} \to \max, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge 0.$$

3.2 Formulace úloh

Nechť $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A} \in \mathcal{M}(m, n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $s \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Položme

$$P = \bar{\mathbb{R}}_+^s \times \mathbb{R}^{n-s} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_s \ge 0\}$$

Úloha lineárního lomeného programování je optimalizační úloha ve tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} \to \min, \qquad \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \in P : (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j = b_j,\ j = k+1, k+2, \ldots, m\}$$

Budeme předpokládat, že funkce f je definována pro každé přípustné $\boldsymbol{x} \in X$. To znamená, že výraz $\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$ nemění na přípustné množině X znaménko. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} > 0$ pro každé přípustné $\boldsymbol{x} \in X$.

Nechť dále $C : X \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. *Úloha hyperbolického programování* je optimalizační úloha tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{C(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} \to \min, \qquad \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \in P : (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j = b_j,\ i = k+1, k+2, \ldots, m\}$$

3.3 Transformace úlohy

Definujme zobrazení $\boldsymbol{h} : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ takto

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}); \qquad z_j = \big(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\big)_j = \frac{x_j}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n, \quad z_{n+1} = \big(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\big)_{n+1} = \frac{1}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}}. \tag{16}$$

Pak platí

$$x_j \ge 0 \Rightarrow z_j \ge 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$z_{n+1} > 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} d_j z_j = \sum_{j=1}^{n} d_j \frac{x_j}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} = 1,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - b_i z_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} - b_i \frac{x_{n+1}}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = \frac{1}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} (\mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})_i \,,$$

Označme nyní

$$R = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n+1} : z_1 \ge 0, z_2 \ge 0, \ldots, z_s \ge 0, z_{n+1} \ge 0 \right\},$$
$$\tilde{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d}^\mathsf{T} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ krát}}, 1)^\mathsf{T}. \tag{17}$$

Z předchozích výpočtů plyne, že zobrazení $\boldsymbol{h}$ zobrazuje přípustnou množinu X úlohy lineárního lomeného (hyperbolického) programování na množinu

$$\begin{aligned} Z = \{\boldsymbol{z} \in R : (\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{z})_i &\le 0,\ i = 1, 2, \ldots, k, \\ (\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{z})_j &= 0,\ j = k+1, k+2, \ldots, m, \\ (\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{z})_{m+1} &= 1\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Věta 8. *Nechť ve formulaci úlohy lineárního lomeného programování je $s = n$, $k = 0$, tj. přípustná množina úlohy je $X = \{\boldsymbol{x} \in \bar{R}^n_+ : \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$. Je-li množina X omezená, pak zobrazení $\boldsymbol{h} : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ definované vztahy (16) je bijekcí přípustné množiny X na množinu Z definovanou vztahem (18). Inverzní zobrazení $\boldsymbol{h}^{-1} : Z \to X$ je dáno vztahem*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{z}) = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}} \right)^\mathsf{T}, \quad \text{tj. } x_j = \frac{z_j}{z_{n+1}}. \tag{19}$$

Důkaz: Snadno nahlédneme, že pro každý vektor $\bar{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, který splňuje rovnost

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d}^\mathsf{T} & 0 \end{pmatrix} \bar{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ 1 \end{pmatrix},$$

platí $\bar{z}_{n+1} \neq 0$. V takovém případě totiž je

$$\mathsf{A} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

a z omezenosti množiny $\{\boldsymbol{x} \in \bar{R}^n_+ : \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ plyne $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \cdots = \bar{z}_n = 0$. Kdyby $\bar{z}_{n+1} = 0$, pak by také $(\boldsymbol{d}^\mathsf{T}, 0)\bar{\boldsymbol{z}} = 0 \neq 1$, což by byl spor. □

Důsledek: Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty, matice $\tilde{\mathsf{A}}$ a vektory $\tilde{\boldsymbol{b}}$, $\tilde{\boldsymbol{c}}$ jsou dány vztahy (17) a zobrazení $\boldsymbol{h}$ je definováno vztahy (16). Je-li $\boldsymbol{z}^*$ řešením úlohy lineárního programování

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^\mathsf{T}\boldsymbol{z} \to \min, \quad \tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{b}}, \ \boldsymbol{z} \geq 0,$$

pak $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{z}^*)$ je řešením úlohy lineárního lomeného programování s hodnotami $s = n$, $k = 0$.

Důkaz: Tvrzení plyne z výpočtu

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^\mathsf{T}\boldsymbol{z} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{c}_j z_j = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j + 0 z_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{x_j}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}}.$$

□

Příklad:

$$\frac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2} \to \min, \qquad x_1 + 3x_2 = 5, \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

V tomto případě je

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = 5,$$

takže

$$R = \bar{\mathbb{R}}^3_+, \quad \tilde{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešíme tedy úlohu lineárního programování

$$z_1 + z_2 \to \min, \qquad \begin{aligned} z_1 + 3z_2 - 5z_3 &= 0, \\ 2z_1 + z_2 \qquad &= 1, \\ z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Věta 9. *Nechť funkce $C : X \to \mathbb{R}$ je konvexní a dvakrát diferencovatelná, funkce*

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{C(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x}}$$

je účelovou funkcí úlohy hyperbolického programování a zobrazení $\boldsymbol{h} : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ dané vztahem (16) je prosté (takže existuje zobrazení $\boldsymbol{h}^{-1}$ k němu inverzní a je definováno rovnostmi (19)). Pak funkce $g : \boldsymbol{h}(X) \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$g(\boldsymbol{z}) = f\left(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{z})\right) = z_{n+1} C\left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right)$$

je konvexní.

Důkaz: Buď $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n+1}$ libovolný a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{z}) = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right)^{\mathsf{T}}$. Pak

$$\frac{\partial x_\ell}{\partial z_j} = \frac{\delta_{\ell j}}{z_{n+1}} = \delta_{\ell j} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}, \qquad \frac{\partial x_\ell}{\partial z_{n+1}} = -\frac{z_\ell}{z_{n+1}^2} = -\frac{x_\ell}{z_{n+1}} = -\boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}\, x_\ell, \qquad \ell, j = 1, 2, \dots, n.$$

Při výpočtu derivací složené funkce g budeme pro stručnost používat označení typu:

$\varphi'_{|i}(\boldsymbol{y})$ ... parciální derivace funkce φ podle i-té proměnné v bodě $\boldsymbol{y}$,

$\varphi''_{|i,j}(\boldsymbol{y})$ ... druhá parciální derivace funkce φ podle i-té a podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{y}$,

$\varphi''(\boldsymbol{y})$ ... matice druhých parciálních derivací funkce φ v bodě $\boldsymbol{y}$.

Dostáváme

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{z})}{\partial z_i} = z_{n+1} \sum_{\ell=1}^{n} C'_{|\ell}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial x_\ell}{\partial z_i} = C'_{|i}(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{z})}{\partial z_{n+1}} = C(\boldsymbol{x}) + z_{n+1} \sum_{\ell=1}^{n} C'_{|\ell}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial x_\ell}{\partial z_{n+1}} = C(\boldsymbol{x}) - \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell C'_{|\ell}(\boldsymbol{x}),$$

$$\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{z})}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{\ell=1}^{n} C''_{|i,\ell}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial x_\ell}{\partial z_j} = \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} C''_{|i,j}(\boldsymbol{x}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{z})}{\partial z_i \partial z_{n+1}} = \sum_{\ell=1}^{n} C''_{|i,\ell}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial x_\ell}{\partial z_{n+1}} = -\boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell C''_{|i,\ell}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} \left(C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\right)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{z})}{\partial z_{n+1}^2} = \sum_{\ell=1}^{n} C'_{|\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial z_{n+1}} - \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial x_\ell}{\partial z_{n+1}} C'_{|\ell}(\boldsymbol{x}) + x_\ell \sum_{p=1}^{n} C''_{|\ell,p}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial x_p}{\partial z_{n+1}} \right) =$$

$$= -\boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} \left[\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell C'_\ell(\boldsymbol{x}) - \sum_{\ell=1}^{n} \left(x_\ell C'_{|\ell}(\boldsymbol{x}) + x_\ell \sum_{p=1}^{n} x_p C''_{|\ell,p}(\boldsymbol{x}) \right) \right] =$$

$$= \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} x_\ell C''_{|\ell,p}(\boldsymbol{x}) x_p = \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} C''(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x},$$

tedy

$$g''(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \begin{pmatrix} C''(\boldsymbol{x}) & -C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{x}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \end{pmatrix}.$$

Pro libovolný vektor $(\boldsymbol{v}, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ platí

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^\mathsf{T} & v_{n+1} \end{pmatrix} g''(\boldsymbol{z}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^\mathsf{T} & v_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C''(\boldsymbol{x}) & -C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{x}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \\
&= \boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^\mathsf{T} & v_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} - C''(\boldsymbol{x})(v_{n+1}\boldsymbol{x}) \\ -\boldsymbol{x}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})(v_{n+1}\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \\
&= \boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{v}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})(v_{n+1}\boldsymbol{x}) - (v_{n+1}\boldsymbol{x})^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} + (v_{n+1}\boldsymbol{x})^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})(v_{n+1}\boldsymbol{x})\big) = \\
&= \boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{v}^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} - v_{n+1}\boldsymbol{x}) - (v_{n+1}\boldsymbol{x})^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v} - v_{n+1}\boldsymbol{x})\big) = \\
&= \boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v} - v_{n+1}\boldsymbol{x})^\mathsf{T}C''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v} - v_{n+1}\boldsymbol{x}) \geq 0,
\end{aligned}$$

neboť matice $C''(\boldsymbol{x})$ je pozitivně semidefinitní. To znamená, že také matice $g''(\boldsymbol{z})$ je pozitivně semidefinitní a funkce g je na množině $\boldsymbol{h}(X)$ konvexní. □

Z vět 8 a 9 dostáváme

Důsledek: Nechť množina $X = \left\{\boldsymbol{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n_+ : \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\right\}$, je omezená, funkce $C : X \to \mathbb{R}$ je konvexní a dvakrát spojitě diferencovatelná a $\boldsymbol{h} : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ je zobrazení definované vztahy (16). Pak úloha hyperbolického programování

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{C(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}} \to \min, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{20}$$

je ekvivalentní s úlohou konvexního programování

$$g(\boldsymbol{z}) = f\left(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{z})\right) \to \min, \quad \begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d}^\mathsf{T} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{z} \geq 0, \tag{21}$$

tj. $\boldsymbol{x}^*$ je řešením úlohy (20) právě tehdy, když $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)$ je řešením úlohy (21).

4 Separovatelné úlohy

4.1 Motivační úlohy

4.1.1 Modifikovaný výrobní problém

Ve výrobním problému 2.1.1 nebyl úplně realistický předpoklad, že cena produktu nezávisí na produkci. Zvětšení výroby totiž znamená zvýšení nabídky a následný pokles ceny. V modelu tedy budeme předpokládat, že cena $c_i(x_i)$ jednotkového množství i-tého produktu je klesající funkcí celkového vyrobeného množství. Za tohoto předpokladu vede hledání výrobního programu maximalizujícího cenu produkce na řešení úlohy

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i(x_i) \to \max$$

při omezeních

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq 0.$$

Pokud cena klesá s rostoucí produkcí lineárně, tj.

$$c_i(x_i) = P_{i0}\left(1 - \frac{1}{L_i}x_i\right),$$

kde P_{i0}, L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou kladné konstanty, dostaneme úlohu kvadratického programování

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P_{i0}x_i - \frac{P_{i0}}{L_i}x_i^2\right) \to \max;$$

zejména všechny funkce $c_i(x_i) = P_{i0}x_i - \dfrac{P_{i0}}{L_i}x_i^2$ jsou konvexní. Řešení má smysl uvažovat pouze pro $0 \leq x_i \leq L_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

4.1.2 Problém pevných nákladů

U modifikovaného výrobním problému 4.1.1 budeme dále předpokládat, že s výrobou i-tého produktu jsou spojeny fixní náklady $p_i \geq 0$. Čistý zisk za i-tý výrobek vyprodukovaný v množství x_i tedy bude dán nespojitou funkcí

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i = 0, \\ x_i c_i(x_i) - p_i, & x_i > 0. \end{cases}$$

Hledání optimálního výrobního programu, tj. takového, který maximalizuje celkový čistý zisk, je řešením úlohy

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max$$

při omezeních

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq 0.$$

4.1.3 Optimalizace užitku

Uvažujme i druhů zboží (může jít o nějaké výrobky, služby, kulturní statky a podobně). Cena jednotkového množství zboží i-tého druhu je a_i, spotřebitel má k dispozici částku b a chce maximalizovat svůj užitek z nákupu.

Nechť i-tý druh zboží je v „portfoliu“ v množství x_i. Celkový užitek označíme

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(\boldsymbol{x}).$$

Funkce užitku U je definována na $\bar{R}_+^n$, je nezáporná a je rozumné o ní předpokládat, že má následující vlastnosti:

- Funkce U je homogenní prvního řádu, tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

  $$U(\gamma\boldsymbol{x}) = \gamma U(\boldsymbol{x}) \text{ neboli } U(\gamma x_1, \gamma x_2, \ldots, \gamma x_n) = \gamma U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

  (Zhruba řečeno, pokud spotřebitel bude mít každého z druhů zboží dvojnásobek, zdvojnásobí se i jeho užitek.) Důsledkem homogenity je vlastnost $U(\boldsymbol{o}) = 0$. (Není-li žádné zboží, není ani užitek.)

- Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je funkce $U(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ neklesající, tj. funkce užitku je neklesající v každé z proměnných. (S rostoucím množstvím zboží jeho užitek neklesá.)
- Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je funkce $U(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ konkávní. (Zhruba řečeno, při nadbytku nějakého zboží jeho užitečnost s rostoucím množstvím příliš neroste. Pokud nějaké zboží chybí, s jeho objevením velice vzroste užitek.)

Často používanou funkcí užitku je funkce Cobbova-Douglasova

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = Bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n},$$

kde $B > 0$, $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \dots, \beta_n \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Maximalizovat užitek vyjádřený touto funkcí znamená řešit úlohu

$$Bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n} \to \max,$$

při omezení

$$\boldsymbol{a}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} \leq b, \ \boldsymbol{x} \geq 0.$$

Tato úloha je ekvivalentní s úlohou

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln(x_i) \to \max, \quad \boldsymbol{a}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} \leq b, \ \boldsymbol{x} \geq 0.$$

4.2 Aproximace separovatelné úlohy úlohou lineárního programování

Nechť $K_{i,0}, L_i$ jsou reálná čísla taková, že $K_{i,0} < L_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a nechť funkce f_i, g_{ij} jsou definovány a spojité na intervalu $[K_{i,0}, L_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2 \dots, m$. Řešíme úlohu

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \min \tag{22}$$

při omezeních

$$\boldsymbol{x} \in X = \left\{ \boldsymbol{x} \in [K_{1,0}, L_1] \times [K_{2,0}, L_2] \times \cdots \times [K_{n,0}, L_n] : \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x_i) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \right\} \tag{23}$$

Poněvadž přípustná množina je kompaktní, má tato úloha řešení.

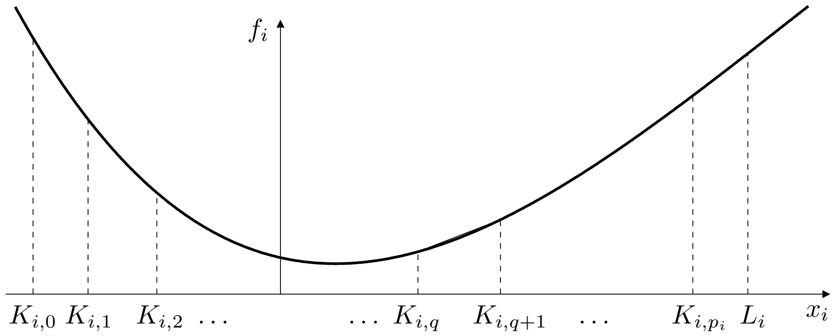
Každý z intervalů $[K_{i,0}, L_i]$ rozdělíme p_i dělícími body $K_{i,1}, K_{i,2}, \dots, K_{i,p_i}$ na $p_i + 1$ subintervalů. Při označení $K_{i,p_i+1} = L_i$ tedy máme

$$K_{i,0} < K_{i,1} < K_{i,2} < \cdots < K_{i,p_i} < K_{i,p_i+1} = L_i,$$

viz obr. 1. Položme

$$s_{i\ell} = \frac{f_i(K_{i,\ell+1}) - f_i(K_{i,\ell})}{K_{i,\ell+1} - K_{i,\ell}}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \ \ell = 0, 1, 2, \dots, p_i,$$

$$r_{ij\ell} = \frac{g_{ij}(K_{i,\ell+1}) - g_{ij}(K_{i,\ell})}{K_{i,\ell+1} - K_{i,\ell}}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2 \dots, m, \ \ell = 0, 1, 2, \dots, p_i;$$



Obrázek 1: Dělení přípustného definičního intervalu funkce f_i. Povšimněme si, že graf funkce f_i na subintervalu $[K_{i,q}, K_{i,q+1}]$ téměř splývá s její lineární aproximaxí.

veličina $s_{i\ell}$ aproximuje derivaci funkce f_i na intervalu $[K_{i,\ell}, K_{i,\ell+1}]$, veličina $r_{ij\ell}$ aproximuje derivaci funkce g_{ij} na stejném intervalu.

Nechť $x_i \in [K_{i,q}, K_{i,q+1})$ pro nějaké $q \in \{1, 2, \ldots, p_i\}$. Zavedeme proměnné

$$x_{i,\ell} = \begin{cases} K_{i,\ell+1} - K_{i,\ell}, & \ell = 0, 1, \ldots, q-1, \\ x_i - K_{i,q}, & \ell = q, \\ 0, & \ell = q+1, q+2, \ldots, p_i. \end{cases}$$

Pak

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &\approx f_i(K_{i,q}) + s_{iq}(x_i - K_{i,q}) = \sum_{\ell=0}^{q} f_i(K_{i,\ell}) - \sum_{\ell=0}^{q-1} f_i(K_{i,\ell}) + s_{iq}x_{i,q} = \\ &= f_i(K_{i,0}) + \sum_{\ell=0}^{q-1} \big(f_i(K_{i,\ell+1}) - f_i(K_{i,\ell})\big) + s_{iq}x_{i,q} = f_i(K_{i,0}) + \sum_{\ell=0}^{q-1} s_{i\ell}x_{i,\ell} + s_{iq}x_{i,q} = \\ &= f_i(K_{i,0}) + \sum_{\ell=0}^{q} s_{i\ell}x_{i,\ell} = f_i(K_{i,0}) + \sum_{\ell=0}^{p_i} s_{i\ell}x_{i,\ell} \end{aligned}$$

a podobně

$$g_{ij} \approx g_{ij}(K_{i,0}) + \sum_{\ell=0}^{p_i} r_{ij\ell}x_{i,\ell}.$$

Úlohu (22), (23) tedy můžeme aproximovat úlohou

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f_i(K_{i,0}) + \sum_{\ell=0}^{p_i} s_{il}x_{i,l} \right) \to \min$$

při omezeních

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left(g_{ij}(K_{i,0}) + \sum_{\ell=0}^{p_i} r_{ij\ell}x_{i,l} \right) \le 0, && j = 1, 2, \ldots, m, \\ &0 \le x_{i,\ell} \le K_{i,\ell+1} - K_{i,\ell}, && i = 1, 2, \ldots, n, \ \ell = 0, 1, 2, \ldots, p_i, \end{aligned}$$

nebo ekvivalentně

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{p_i} s_{il}x_{i,l} \to \min \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{p_i} r_{ij\ell}x_{i,\ell} \le -\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(K_{i,0}), \qquad j = 1,2,\dots,m, \tag{25}$$

$$0 \le x_{i,\ell} \le K_{i,\ell+1} - K_{i,\ell}, \qquad i = 1,2,\dots,n,\ \ \ell = 0,1,2,\dots,p_i. \tag{26}$$

To je úloha lineárního programování, kterou lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} \to \min, \qquad \mathsf{A}\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \ge 0,$$

kde

$$\boldsymbol{c} = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1p_1}, s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2p_2}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{np_n})^{\mathsf{T}},$$

$$\boldsymbol{y} = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,p_1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,p_2}, \dots, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,p_n})^{\mathsf{T}},$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix}
r_{111} & r_{112} & \dots & r_{11p_1} & r_{211} & r_{212} & \dots & r_{21p_2} & \dots & r_{n11} & r_{n12} & \dots & r_{n1p_n} \\
r_{121} & r_{122} & \dots & r_{12p_1} & r_{221} & r_{222} & \dots & r_{22p_2} & \dots & r_{n21} & r_{n22} & \dots & r_{n2p_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{1m1} & r_{1m2} & \dots & r_{1mp_1} & r_{2m1} & r_{2m2} & \dots & r_{2mp_2} & \dots & r_{nm1} & r_{nm2} & \dots & r_{nmp_n} \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \Bigg(-\sum_{i=1}^{n} g_{i1}(K_{i,0}), -\sum_{i=1}^{n} g_{i2}(K_{i,0}), \dots, -\sum_{i=1}^{n} g_{im}(K_{i,0}),$$

$$K_{1,1} - K_{1,0}, K_{1,2} - K_{1,1}, \dots, K_{1,p_1} - K_{1,p_1-1}, L_1 - K_{1,p_1}, \dots$$

$$\dots, K_{n,1} - K_{n,0}, K_{n,2} - K_{n,1}, \dots, K_{n,p_n} - K_{n,p_n-1}, L_n - K_{1,p_n}\Bigg)^{\mathsf{T}}.$$

Věta 10. *Nechť jsou všechny funkce f_i, g_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ spojité a konvexní. Pak existuje řešení aproximující úlohy (24), (25), (26) takové, že*

$$x_{iq} > 0 \ \Rightarrow \ \bigl(\forall \ell \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}\bigr)\, x_{i,\ell} = K_{i,\ell+1} - K_{i,\ell}.$$

Důkaz: Z podmínek

$$0 \le x_{i,l} \le K_{i,\ell+1} - K_{i.\ell}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ \ell = 0, 1, 2, \ldots, p_i$$

plyne, že přípustná množina úlohy (24), (25), (26) je kompaktní a tedy že řešení existuje.

Předpokládejme, že existuje řešení $\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{x}_{1,1}, \bar{x}_{1,2}, \ldots, \bar{x}_{n,p_n})$ takové, že existují i_0, q_1, q_2, pro něž

$$q_1 < q_2 \text{ a } \bar{x}_{i_0,q_2} > 0, \ \bar{x}_{i_0,q_1} < K_{i_0,q_1+1} - K_{i_0,q_1}. \tag{27}$$

Pak

$$\varrho = \min\left\{\bar{x}_{i_0,q_2}, K_{i_0,q_1+1} - K_{i_0,q_1} - \bar{x}_{i_0,q_1}\right\} > 0.$$

Poněvadž všechny funkce f_i, g_{ij} jsou konvexní, platí

$$r_{i_0jq_1} - r_{i_0jq_2} \le 0, \quad s_{i_0q_2} - s_{i_0,q_1} \ge 0. \tag{28}$$

Položme dále

$$\tilde{x}_{i,j} = \begin{cases} \bar{x}_{i,j}, & i \ne i_0 \text{ nebo } j \ne q_1, j \ne q_2, \\ \bar{x}_{i_0,q_1} + \varrho, & i = i_0, j = q_1, \\ \bar{x}_{i_0,q_2} - \varrho, & i = i_0, j = q_2, \end{cases}$$

tj. složku $\bar{x}_{i_0,q_1}$ zvětšíme o ϱ, složku $\bar{x}_{i_0,q_2}$ o ϱ zmenšíme. Podle definice čísla ϱ je

$$0 \le \tilde{x}_{i_0,q_1} \le K_{i_0,q_1+1} - K_{i_0,q_1} \quad \text{a} \quad 0 \le \tilde{x}_{i_0,q_2} \le \bar{x}_{i_0,q_2} \le K_{i_0,q_2+1} - K_{i_0,q_2},$$

neboť $\bar{x}_{i_0,q_2}$ je souřadnice přípustného bodu. Podle první z nerovností (28) dále platí

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{p_1} r_{ij\ell}\tilde{x}_{il} = \\
&\qquad = \sum_{\substack{i=1\\ i\ne i_0}}^{n} \sum_{\substack{\ell=0\\ q_1\ne\ell\ne q_2}}^{p_i} r_{ij\ell}\bar{x}_{i\ell} + \sum_{\substack{\ell=0\\ q_1\ne\ell\ne q_2}}^{p_i} r_{i_0j\ell}\bar{x}_{i_0\ell} + r_{i_0jq_1}\tilde{x}_{i_0,q_1} + r_{i_0jq_2}\tilde{x}_{i_0,q_2} = \\
&\qquad = \sum_{\substack{i=1\\ i\ne i_0}}^{n} \sum_{\substack{\ell=0\\ q_1\ne\ell\ne q_2}}^{p_i} r_{ij\ell}\bar{x}_{i\ell} + \sum_{\substack{\ell=0\\ q_1\ne\ell\ne q_2}}^{p_i} r_{i_0j\ell}\bar{x}_{i_0\ell} + r_{i_0jq_1}(\bar{x}_{i_0,q_1} + \varrho) + r_{i_0jq_2}(\bar{x}_{i_0,q_2} - \varrho) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{p_i} r_{ij\ell}\bar{x}_{il} + \varrho(r_{i_0jq_1} - r_{i_0jq_2}) \le -\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(0) + \varrho(r_{i_0jq_1} - r_{i_0jq_2}) \le -\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(0),
\end{aligned}$$

takže $\tilde{\boldsymbol{y}} = (\tilde{x}_{1,1}, \tilde{x}_{1,2}, \ldots, \tilde{x}_{n,p_n})$ je přípustným bodem úlohy (24), (25), (26). Podle druhé z nerovností (28) dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{p_i} s_{i\ell}\tilde{x}_{i,\ell} &= \sum_{\substack{i=1\\ i\ne i_0}}^{n} \sum_{\substack{\ell=0\\ q_1\ne\ell\ne q_2}}^{p_i} s_{i\ell}\bar{x}_{i\ell} + \sum_{\substack{\ell=0\\ q_1\ne\ell\ne q_2}}^{p_i} s_{i_0\ell}\bar{x}_{i_0\ell} + s_{i_0q_1}\tilde{x}_{i_0,q_1} + s_{i_0q_2}\tilde{x}_{i_0,q_2} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{p_i} s_{i\ell}\bar{x}_{i,\ell} - \varrho(s_{i_0q_2} - s_{i_0q_1}) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{p_i} s_{i\ell}\bar{x}_{i,\ell}.
\end{aligned}$$

V poslední neostré nerovnosti musí nastat rovnost, neboť v opačném případě by v přípustném bodě $\tilde{\boldsymbol{y}}$ byla hodnota účelové funkce menší než v bodě $\bar{\boldsymbol{y}}$ a to by bylo ve sporu s tím, že $\bar{\boldsymbol{y}}$ je řešením úlohy. To znamená, že jsme našli jiné řešení $\tilde{\boldsymbol{y}}$ úlohy (24), (25), (26), které již nemá nežádoucí vlastnost (27). □

4.3 Řešení metodami dynamického programování

Řešíme úlohu (22) při omezení

$$\boldsymbol{x} \in X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \bar{R}_+^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b \right\}. \tag{29}$$

Minimum budeme postupně hledat tak, že zvolíme hodnotu poslední proměnné, s touto zvolenou hodnotou minimalizujeme prvních $n-1$ sčítanců v separovatelné účelové funkci a nakonec optimalizujeme volbu poslední proměnné, tj. hledáme minimum funkce f_n. Hledáme tedy

$$\begin{aligned} &\min\left\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in X\right\} = \\ &\quad = \min\left\{ f_n(x_n) + \min\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) : x_1 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} x_i = b - x_n \right\} : 0 \leq x_n \leq b \right\}. \end{aligned}$$

Pokud označíme

$$F(n, b) = \min\left\{f(\boldsymbol{x}) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 \cdots + x_n = b\right\} \quad \text{a} \quad b_n = b,$$

můžeme předchozí rovnost přepsat ve tvaru

$$F(n, b_n) = \min\left\{f_n(x_n) + F(n-1, b_n - x_n) : 0 \leq x_n \leq b\right\}.$$

Označme $\bar{x}_n$ bod, v němž se realizuje minimum, tj. bod, pro nějž platí

$$F(n, b_n) = f_n(\bar{x}_n) + F(n-1, b_n - \bar{x}_n).$$

Položme dále $b_{n-1} = b_n - \bar{x}_n$. Pak

$$\begin{aligned} F(n-1, b_{n-1}) &= \min\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0, x_1 + x_2 \cdots + x_{n-1} = b_{n-1} \right\} = \\ &= \min\Bigg\{ f_{n-1}(x_{n-1}) + \\ &\quad + \min\left\{ \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x_i) : x_1 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0, \sum_{i=1}^{n-2} x_i = b_{n-1} - x_{n-1} \right\} : 0 \leq x_{n-1} \leq b_{n-1} \Bigg\} = \\ &= \min\left\{f_{n-1}(x_{n-1}) + F(n-2, b_{n-1} - x_{n-1}) : 0 \leq x_{n-1} \leq b_{n-1}\right\}. \end{aligned}$$

Označme opět $\bar{x}_{n-1}$ bod, v němž se minimum realizuje, tj. bod, pro nějž platí

$$F(n-1, b_{n-1}) = f_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + F(n-2, b_{n-1} - \bar{x}_{n-1}) = f_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + F(n-2, b - \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}).$$

Tak můžeme postupovat dále. Obecně dostaneme

$$\begin{aligned} F(k, b_k) &= \min\left\{f_k(x_k) + F(k-1, b_k - x_k) : 0 \leq x_k \leq b_k\right\} = \\ &= f_k(\bar{x}_k) + F(k-1, b - \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} - \cdots - \bar{x}_k). \end{aligned}$$

Postupně dojdeme až k rovnosti

$$F(1, b_1) = \min \{f_1(x_1) : 0 \le x_1 \le b_1\},$$

takže $F(1, b_1) = f_1(\bar{x}_1)$, přičemž

$$\bar{x}_1 = b - \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} - \cdots - \bar{x}_2 = b_1, \tag{30}$$

tedy $F(1, b_1) = f_1(b_1)$. Tuto hodnotu dosadíme do předchozího vztahu, tj.

$$F(2, b_2) = \min \{f_2(x_2) + f_1(b_1) : 0 \le x_2 \le b_2\}$$

a vyjádříme $\bar{x}_2$ v závislosti na b_2. Tak postupujeme dále až k vyjádření $\bar{x}_n$ v závislosti na $b_n = b$, tedy hodnotu $\bar{x}_n$ již vypočítáme. Pomocí ní vypočítáme $\bar{x}_{n-1} = \bar{x}_{n-1}(b_{n-1})$ atd. Tak postupujeme až k $\bar{x}_2$. Hodnotu $\bar{x}_1$ nakonec vypočítáme z rovnosti (30).

Celkem uvedeným postupem provádíme $n-1$ minimalizací funkcí jedné proměnné.

Příklad: $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \to \min$, $2x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$. Položíme $y_1 = 2x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ a řešíme úlohu

$$\frac{1}{4}y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 \to \min, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 10, \ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0,$$

která je ekvivalentní s úlohou původní. Máme

$$F(1, b_1) = \frac{1}{4}b_1^2,$$

$$\begin{aligned}
F(2, b_2) = \min \left\{2y_2^2 + F(1, b_2 - y_2) : 0 \le y_2 \le b_2\right\} &= \\
= \min \left\{2y_2^2 + \frac{1}{4}(b_2 - y_2)^2 : 0 \le y_2 \le b_2\right\} &= \\
= \min \left\{\frac{9}{4}y_2^2 - \frac{1}{2}b_2y_2 + \frac{1}{4}b_2^2 : 0 \le y_2 \le b_2\right\} &= \frac{2}{9}b_2^2, \\
\bar{y}_2 = \frac{1}{9}b_2&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(3, b_3) = \min \left\{y_3^2 + F(2, b_3 - y_3) : 0 \le y_3 \le b_2\right\} &= \\
= \min \left\{y_3^2 + \frac{2}{9}(b_3 - y_3)^2 : 0 \le y_3 \le b_3\right\} &= \\
= \min \left\{\frac{11}{9}y_3^2 - \frac{4}{9}b_3y_3 + \frac{2}{9}b_3^2 : 0 \le y_3 \le b_3\right\} &= \frac{2}{11}b_3^2, \\
\bar{y}_3 = \frac{2}{11}b_3 = \frac{2}{11} \cdot 10 = \frac{20}{11}&,
\end{aligned}$$

takže

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{9}b_2 = \frac{1}{9}(10 - \bar{y}_3) = \frac{10}{11},$$

$$\bar{y}_1 = 10 - \bar{y}_3 - \bar{y}_2 = 10 - \frac{10}{11} - \frac{20}{11} = \frac{80}{11}.$$

Návratem k původním proměnným dostaneme řešení zadané úlohy

$$x_1^* = \frac{40}{11}, \ x_2^* = \frac{10}{11}, \ x_3^* = \frac{20}{11}, \quad f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \frac{200}{11}.$$