ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ:

1. **(6 bodů)** Vyřešte následující diferenciální rovnici

$$xy' + y = y^2 x^2 \ln x.$$

2. **(6 bodů)** Vyřešte následující diferenciální rovnici

$$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$$

3. **(8 bodů)** Transformujte následující diferenciální výraz

$$xz_{xx} + 2yz_{xy} = 0$$

do nových proměnných $u = x$ a $v = \frac{x}{y}$.

4. **(4 body)** S využitím diferenciálu funkce dvou proměnných vypočtěte přibližnou hodnotu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + \mathrm{e}^{2y}}$$

v bodě $\left[\frac{22}{10}, -\frac{2}{10}\right]$.

5. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda je v okolí bodu $[1, -6, 0]$ rovností

$$\mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$$

zadaná implicitní funkce $z = f(x, y)$. Pokud ano, určete všechny parciální derivace prvního řádu této implicitní funkce a druhou parciální derivaci f_{yy} v bodě $[1, -6, 0]$.

6. **(9 bodů)** Určete globální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1.$$

na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge y \leq -x + 3\}$. U bodů podezřelých z lokálního extrému určete i jejich typ!

- Zadání si můžete ponechat — správné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M2100.
- Ústní část zkoušky začíná ve 13^{30} v učebně MS2 na ÚMS.

1) $xy' + y = y^2 x^2 \ln x$

$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x \cdot \ln x \quad \Big| \; y \neq 0 \leftarrow$ vyhovuje rovnici

$z = \frac{1}{y}$

$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'$

$-z' + \frac{1}{x} \cdot z = x \cdot \ln x$

$z' - \frac{1}{x} z = -x \ln x \quad \Big| \; e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

$\frac{z'}{x} - \frac{1}{x^2} z = -\ln x$

$\int \ln x \, dx \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int 1 dx =$

$= x \cdot \ln x - x$

$\left(\frac{z}{x} \right)' = -\ln x$

$\frac{z}{x} = x - x \cdot \ln x + C$

$z = x^2 - x^2 \ln x + Cx$

$\frac{1}{y} = x(x - x \cdot \ln x + C)$

$\underline{y = \frac{1}{x(x + C - x \ln x)}}, \; C \in \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{y \equiv 0}}$

2) $xy + y^2 = (2x^2 + xy) y'$

$\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = \left(2 + \frac{y}{x} \right) y', \quad z = \frac{y}{x}$

$z'x + z = y'$

$\frac{z + z^2}{2 + z} = z'x + z \quad \Big| \; z \neq -2$

nevyhovuje zadání

$\frac{z + z^2 - z(2+z)}{2+z} = z'x$

$$\frac{-z}{2+z} = z'x$$

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{2+z}{z}dz \quad \Big|\ z \neq 0 \Rightarrow y \equiv 0$$ vyhovuje rovnici, odpovídá $K=0$

$$C - \ln|x| = 2\cdot\ln|z| + z, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$C = \ln|z^2 \cdot x| + z$$

$$C = \ln\left|\frac{y^2}{x}\right| + \frac{y}{x}$$

$$L = \left|\frac{y^2}{x}\right| \cdot e^{y/x}, \quad L > 0$$

$$Kx = y^2 e^{y/x}, \quad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$y^2 - Kxe^{-y/x} = 0, \quad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\underline{\underline{y^2 - Cxe^{-y/x} = 0, \quad C \in \mathbb{R}}}$$

3) $xz_{xx} + 2y z_{xy} = 0$

$$u = x \qquad v = \frac{x}{y}$$

$$u_x = 1 \qquad v_x = \frac{1}{y}$$

$$u_y = 0 \qquad v_y = -\frac{x}{y^2}$$

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = z_u + z_v \cdot \frac{1}{y}$$

$$z_{xy} = z_{uu}\cdot u_y + z_{uv}\cdot v_y - \frac{1}{y^2}\cdot z_v + z_{vu}\cdot u_y \cdot \frac{1}{y} + z_{vv}\cdot v_y \cdot \frac{1}{y} =$$

$$= -z_{uv}\cdot\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^2}z_v - z_{vv}\frac{x}{y^3}$$

$$z_{xx} = z_{uu}\cdot u_x + z_{uv}\cdot v_x + \frac{1}{y}\left(z_{vu}\cdot u_x + z_{vv}\cdot v_x\right) =$$

$$= z_{uu} + z_{uv}\cdot\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\cdot z_{vu} + \frac{1}{y^2}\cdot z_{vv}$$

$$x\cdot\left(z_{uu} + 2\cdot z_{uv}\cdot\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}z_{vv}\right) + 2y\left(-z_{uv}\cdot\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^2}z_v - z_{vv}\cdot\frac{x}{y^3}\right) = z_{uv}\left(\frac{2x}{y} - \frac{2yx}{y^2}\right) + z_{vv}\left(\frac{x}{y^2} - \frac{2xy}{y^3}\right) +$$

$$+ x\cdot z_{uu} - \frac{2}{y}z_v =$$

$$= z_{vv} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + x \cdot z_{uu} - \frac{2}{y} z_v$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{y^2} = \frac{v^2}{u}, \quad x = u, \quad \frac{2}{y} = 2 \cdot \frac{v}{u}$$

$$\frac{v^2}{u} \cdot z_{vv} + u \cdot z_{uu} - 2 \cdot \frac{v}{u} z_v = 0$$

$$\underline{\underline{v^2 z_{vv} + u^2 z_{uu} - 2v \cdot z_v = 0}}$$

4) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$

$x_0 = 2 \qquad dx = 0{,}2$

$y_0 = 0 \qquad dy = -0{,}2$

$f(x_0, y_0) = \sqrt{8+1} = 3$

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \cdot 4x \rightsquigarrow \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 8 = \frac{4}{3}$$

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \cdot 2e^{2y} \rightsquigarrow \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{2 \cdot (2{,}2)^2 + e^{2 \cdot (-0{,}2)}} \approx 3 + \frac{4}{3} \cdot 0{,}2 + \frac{1}{3}(-0{,}2) =$$

$$= 3 + 0{,}2 = \underline{\underline{3{,}2}}$$

5) $e^z + x^2 y + z + 5 = 0 \qquad [1, -6, 0]$

$F_z = e^z + 1 \rightsquigarrow 2 \neq 0 \Rightarrow$ rovnice zadává implicitní funkci

$F_x = 2xy \qquad z_x = -\frac{2xy}{e^z+1} \rightsquigarrow \underline{\underline{6}}$

$F_y = x^2 \qquad z_y = -\frac{x^2}{e^z+1} \rightsquigarrow -\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

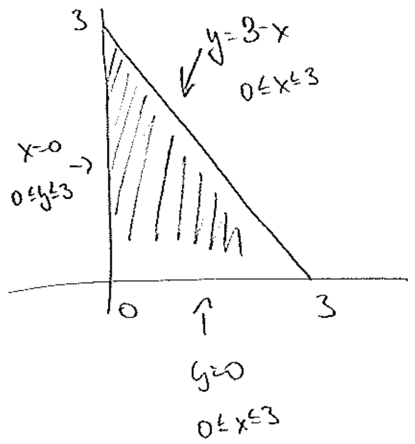
$$z_y (e^z + 1) = -x^2$$

$$z_{yy} \cdot (e^z + 1) + z_y \cdot e^z \cdot z_y = 0$$

$$z_{yy} (e^z + 1) + e^z \cdot \left(-\frac{x^2}{e^z+1}\right)^2 = 0$$

$$z_{yy} = -e^z \cdot \frac{x^4}{(e^z+1)^2} \cdot \frac{1}{e^z+1} \rightsquigarrow -\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

6) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$



lok. extrémy:

$f_x = 2x + 4y - 6 = 0$ $\quad 6x = 6 \Rightarrow \underline{x = 1}$

$f_y = -4y + 4x = 0 \Rightarrow x = y$ $\quad \underline{y = 1}$

$f_{xx} = 2$

$f_{xy} = 4$

$f_{yy} = -4$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -24 < 0$

<u>není lok. extrém</u>

I) $y = 0, \quad 0 \leq x \leq 3$

$g(x) = x^2 - 6x - 1$

$g'(x) = 2x - 6 = 0$

$\underline{x = 3, y = 0}$ $\quad f(3,0) = -10$

II) $y = 3 - x, \quad 0 \leq x \leq 3$

$g(x) = x^2 - 2(3-x)^2 + 4x(3-x) - 6x - 1 = x^2 - 18 + 12x - 2x^2 + 12x - 4x^2 - 6x - 1 =$

$= -5x^2 + 18x - 19$

$g'(x) = -10x + 18 = 0$

$\underline{x = \frac{9}{5}} \quad \underline{y = \frac{6}{5}}$ $\quad f\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right) = -\frac{14}{5}$

III) $x = 0, \quad 0 \leq y \leq 3$

$g(y) = -2y^2 - 1$

$g'(y) = -4y = 0$

$\underline{y = 0, x = 0}$ $\quad \boxed{f(0,0) = -1}$ <u>globální maximum</u>

$\boxed{f(0,3) = -19}$ <u>globální minimum</u>