Matematická analýza II
M2100

Přírodovědecká fakulta jaro 2010

Předpoklady
M1100 Matematická analýza I || **M1101** Matematická analýza I
Znalosti diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné, tj. kursu Matematická analýza I (M1100).

Omezení zápisu do předmětu
Předmět je nabízen i studentům mimo mateřské obory.

Mateřské obory
Matematika (program PřF, B-MA)
Matematika (program PřF, M-MA)
Matematika - ekonomie (program PřF, M-AM)
Matematika (program PřF, N-MA)

Typ výuky a zkoušky
Přednáška 4 + cvičení 2 hod. týdně:
- 2 kontrolní písemky (ze 30% min. 10%) ve cvičeních,
- písemná (40% min. 10%) a
- ústní část (30% min. 10%) zkoušky

s celkovým hodnocením daným součtem dílčích výsledků (min. 30%)

Informace učitele
V porovnání s kursem Matematická analýza I, kurs Matematická analýza II je poněkud abstraktnější (metrické prostory).
Písemka ke zkoušce má podobnou strukturu jako v kursu Matematická analýza I.

Navazující předměty
M3100 Matematická analýza III

Anotace

Druhá část základního kursu matematické analýzy, kde jsou nejprve probrány elementární metody řešení diferenciálních rovnic, v další části je probrána teorie metrických prostorů a diferenciální počet funkcí více proměnných.

Osnova

I. Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic:

- metody řešení rovnic 1. řádu,
- lineární rovnice s vyšších řádů s konstantními koeficienty,
- systémy lineárních diferenciálních rovnic.

II. **Metrické prostory:**

- pojem metrického prostoru, konvergence, uzavřené a otevřené množiny,
- spojité zobrazení, úplné prostory, kompaktní prostory,
- Banachova věta o pevném bodu.

III. **Diferenciální počet funkcí více proměnných:**

- limita, spojitost, parciální derivace,
- Taylorův mnohočlen, extrémy funkcí, zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí,
- věta o implicitní funkci, vázané extrémy.

Literatura

[1] Ráb, Miloš *Metody řešení diferenciálních rovnic. I, Obyčejné diferenciální rovnice,* 1. vyd. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 68 s.

[2] Ráb, Miloš *Diferenciální rovnice*
1. vyd. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980. 196 s.

[3] Ráb, Miloš - Kalas, Josef *Obyčejné diferenciální rovnice*
1. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 1995, 207 s. ISBN 80-210-1130-0.
2. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 2001, 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[4] Došlá, Zuzana - Došlý, Ondřej. *Metrické prostory: teorie a příklady*.
2. přep. vyd., Brno, Masarykova univerzita, 2000, 83 s., ISBN 80-210-1328-1.

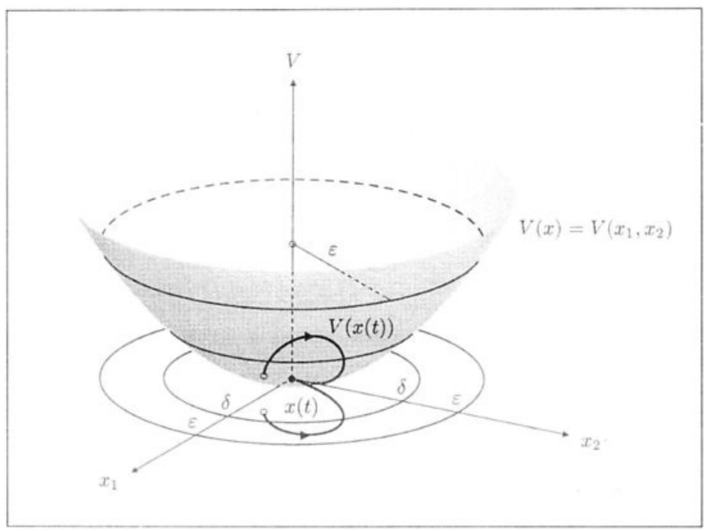
[5] Došlá, Zuzana - Došlý, Ondřej. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*.
1. vyd. Brno, Masarykova univerzita, 1994, 130 s., ISBN 80-210-0992-6.

[6] Novák, Vítězslav *Diferenciální počet funkcí více proměnných*
UJEP, Brno, 1986

MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Josef Kalas
Miloš Ráb

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE



Brno 2001 Druhé vydání

OBSAH

Předmluva

I. Diferenciální rovnice 1. řádu **1**

1. Základní pojmy 1
2. Geometrická interpretace rovnice 1. řádu 2
3. Rovnice se separovanými proměnnými 3
4. Jiné typy integrovatelných rovnic 8
5. Exaktní rovnice 12
6. Cvičení 14

II. Systémy lineárních diferenciálních rovnic **16**

1. Norma vektoru a matice 16
2. Vektorové a maticové funkce 18
3. Systém lineárních diferenciálních rovnic 19
4. Homogenní systém rovnic 25
5. Nehomogenní systém rovnic 29
6. Systém rovnic s konstantními koeficienty 31
7. Cvičení 39

III. Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů **41**

1. Úvod 41
2. Homogenní rovnice 42
3. Nehomogenní rovnice 44
4. Homogenní rovnice s konstantními koeficienty 46
5. Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty 51
6. Cvičení 54
7. Řešení lineárního systému s konstantními koeficienty 55

IV. Systémy nelineárních diferenciálních rovnic **62**
1. Úvod 62
2. Existence a jednoznačnost řešení 63
3. Diferenciální rovnice n-tého řádu 71
4. Globální jednoznačnost řešení 72
5. Prodlužování řešení 73
6. Závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech 79
7. Cvičení 84

V. Diferenciální nerovnosti **86**
1. Diniho derivace 86
2. Maximální a minimální řešení 88
3. Srovnávací věta a některé její aplikace 90
4. Cvičení 93

VI. Autonomní systémy **95**
1. Geometrická interpretace 95
2. Typy singulárních bodů v rovině 98
3. Lineární autonomní systémy v rovině 98
4. Transformace do komplexně konjugovaných souřadnic 106
5. Geometrické vlastnosti trajektorií 108
6. Singulární body nelineárních autonomních rovnic 114
7. Periodická řešení Liénardovy rovnice 119
8. Cvičení 122

VII. Stabilita **124**
1. Úvod 124
2. Ljapunovská stabilita 124
3. Stejnoměrná stabilita 126
4. Asymptotická stabilita 128
5. Exponenciální stabilita 131
6. Nestabilita 133
7. Variační rovnice 136
8. Příklady 139
9. Přímá Ljapunovova metoda 141
10. Stabilita systému diferenciálních rovnic v rovině 145
11. Cvičení 150

VIII. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu **152**
1. Transformace 153
2. Základní vlastnosti lineární rovnice 2. řádu 155
3. Sturmovy srovnávací věty 158
4. Sturmův-Liouvilleův problém 162
5. Oscilatorická rovnice 166
6. Neoscilatorická rovnice 173
7. Asymptotické vzorce. Metoda perturbace 179
8. Řešení diferenciální rovnice pomocí mocninných řad 184
9. Rovnice Fuchsova typu 186
10. Cvičení 192

IX. Doplňky **194**
1. Komplexní funkce reálné proměnné 194
2. Kanonický tvar matice 196

Symbolika **200**

Literatura **202**

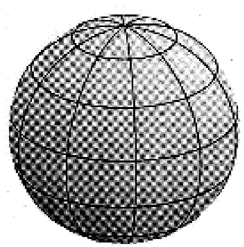
Věcný rejstřík **206**

MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

ZUZANA DOŠLÁ
ONDŘEJ DOŠLÝ

METRICKÉ PROSTORY

Teorie a příklady



BRNO 2000 II. VYDÁNÍ

I METRICKÝ PROSTOR **1**
I.1 Pojem metriky . . . 2
I.2 Vzdálenost množin . . . 12
I.3 Izometrické zobrazení . . . 14

II KONVERGENCE, OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY **16**
II.1 Konvergentní posloupnost . . . 16
II.2 Uzavřené množiny . . . 19
II.3 Otevřené množiny, okolí bodu . . . 22

III ÚPLNÉ A KOMPAKTNÍ PROSTORY **27**
III.1 Úplný metrický prostor . . . 27
III.2 Úplný obal metrického prostoru . . . 31
III.3 Kompaktní prostory . . . 33

IV ZOBRAZENÍ METRICKÝCH PROSTORŮ **37**
IV.1 Spojitá zobrazení . . . 37
IV.2 Kontrakce . . . 40
IV.3 Spojitá zobrazení kompaktních prostorů . . . 43

V BANACHŮV PRINCIP PEVNÉHO BODU A JEHO POUŽITÍ **45**
V.1 Banachův princip . . . 45
V.2 Cauchyova úloha . . . 52
V.3 Systém lineárních rovnic . . . 53

VI DALŠÍ VLASTNOSTI METRICKÝCH PROSTORŮ **55**
VI.1 Souvislé metrické prostory . . . 55
VI.2 Separabilní prostory . . . 57

VI.3 Homeomorfní zobrazení 58
VI.4 Kompaktní množiny 60
VI.5 Závěrečná cvičení 63

VII TOPOLOGICKÉ, NORMOVANÉ A UNITÁRNÍ PROSTORY 65
VII.1 Nerovnosti 65
VII.2 Topologický prostor 67
VII.3 Normované lineární prostory 69
VII.4 Unitární prostory 70

NÁVODY A VÝSLEDKY CVIČENÍ 74

LITERATURA 81

REJSTŘÍK 82

Masarykova univerzita • Přírodovědecká fakulta

Zuzana Došlá, Ondřej Došlý

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Brno 1999

Obsah

1 POJEM FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH 1

2 LIMITA A SPOJITOST FUNKCE 10
- 2.1 Metrické vlastnosti $\mathbb{R}^n$ 10
- 2.2 Limita funkce 11
- 2.3 Spojitost funkce 18
- 2.4 Věty o spojitých funkcích 20

3 PARCIÁLNÍ DERIVACE 24
- 3.1 Parciální derivace 1. řádu 25
- 3.2 Derivace vyšších řádů 28
- 3.3 Směrové derivace 31
- 3.4 Lagrangeova věta o střední hodnotě 34

4 DIFERENCIÁL FUNKCE 37
- 4.1 Diferencovatelná funkce, diferenciál 37
- 4.2 Diferenciály vyšších řádů 43
- 4.3 Kmenová funkce 44

5 DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE, TAYLORŮV VZOREC 49
- 5.1 Parciální derivace složených funkcí 49
- 5.2 Taylorova věta 59

6 LOKÁLNÍ A ABSOLUTNÍ EXTRÉMY 64
- 6.1 Lokální extrémy 64
- 6.2 Absolutní extrémy 73

7 ZOBRAZENÍ MEZI PROSTORY VYŠŠÍCH DIMENZÍ 81
- 7.1 Zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ 81

7.2 Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ 85
7.3 Diferenciální operátory matematické fyziky 88

8 FUNKCE ZADANÁ IMPLICITNĚ **92**
8.1 Implicitně zadaná funkce jedné proměnné 93
8.2 Implicitně zadaná funkce více proměnných 99
8.3 Implicitně zadané zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí 102

9 VÁZANÉ EXTRÉMY **108**
9.1 Metoda Lagrangeových multiplikátorů 108
9.2 Vázané extrémy a nerovnosti 116

PŘÍLOHA **121**
P 1 Limita a spojitost funkce 121
P 2 Parciální derivace a diferenciál 124
P 3 Taylorova věta 127
P 4 Lokální a absolutní extrémy 127

Výsledky cvičení **132**

Použitá literatura **140**

Rejstřík **142**

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V BRNĚ

Fakulta přírodovědecká

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Vítězslav NOVÁK

BRNO 1983

O B S A H

	Předmluva	str. 3
1.	Parciální derivace	5
2.	Směrové derivace a Gâteauxův diferenciál	14
3.	Derivace a totální diferenciál	21
4.	Derivace druhého řádu	34
5.	Derivace a diferenciály vyšších řádů	49
6.	Taylorův vzorec	63
7.	Extrémy funkcí	67
8.	Diferencovatelná zobrazení	80
9.	Diferencování složených zobrazení	97
10.	Funkce dané implicitně	107
11.	Regulární zobrazení a difeomorfizmy	122
12.	Variety v eukleidovských prostorech	131
13.	Extrémy funkcí na varietách	148
	Obsah	159

Metrické prostory

1. Metrický prostor
2. Konvergence, otevřené a uzavřené množiny
3. Úplné a kompaktní prostory
4. Zobrazení metrických prostorů
5. Banachův princip pevného bodu a jeho použití
6. Další vlastnosti metrických prostorů
7. Topologické, normované a unitární prostory

1. Metrický prostor

- <u>Metrický prostor, metrika</u>
- R^n s různými metrikami, E^n s
- C([a,b]) s různými metrikami
- l_p s různými metrikami
- R, $R^{2,}$ R^3 se spec. Metrikami
- <u>vzdálenost množin, průměr množiny</u>
- <u>ohraničená (omezená) množina</u>
- <u>izometrické množiny</u>

2. Konvergence, otevřené a uzavřené množiny

- konvergence, cauchyovskost posloupnosti
- v prostoru R = E
- Věta o jednoznačnosti limity, o cachyovskosti konvergentní posloupnosti a posloupnosti vybrané z konvergentní
- příklady v R^n
- ekvivalence metrik a ekvivalence metrik v R^n a C[a,b]

- okolí bodu, topologické charakteristiky podmnožin (vnitřní, hraniční, hromadný a isolovaný bod, vnitřek, hranice, derivace množiny), otevřená a uzavřená množina, pravidla pro počítání s nimi, vzájemné vztahy
- topologické charakteristiky, uzavřenost,… a konvergence
- hustá množina
- příklady

3. Úplné a kompaktní prostory

- <u>úplnost</u>
- příklady – Q, intervaly, R^n , C[a,b], l_p,
- zobecněný princip vložených intervalů
- <u>úplný obal</u>
- <u>kompaktní prostor</u>
- Věta o ohraničenosti a uzavřenosti kompaktní množiny – obecně, v R^n

4. Zobrazení metrických prostorů

- <u>spojité zobrazení M-prostorů v bodě, na množině</u>
- Věta Heineho o spojitosti a konvergenci
- příklady – vzdálenost od bodu, od mn.,…
- <u>Lipschitzovskost a kontraktivnost</u>
- Věta o spojitosti lipschitzovského zobrazení
- Příklady – stejnolehlost, integrál,…
- Věta o kompaktnosti spojitého obrazu kompaktní množiny

5. Banachův princip pevného bodu a jeho použití

- <u>pevný bod</u>
- Banachova věta a metoda postupných aproximací
- příklady – stejnolehlost s posunutím, Cauchyova úloha pro ODR, systém lineárních rovnic, …

6. Další vlastnosti metrických prostorů

- <u>souvislá množina</u>
- příklady
- Věta o souvislosti spojitého obrazu souvislé množiny
- <u>separabilní prostor</u>
- příklady – v R^n, l_p, C[a,b],…
- <u>homeomorfní zobrazení a prostory</u>
- <u>epsilonová síť</u> a Věta o existenci konečné sítě kompaktní množiny v úplném M-prostoru
- <u>otevřené pokrytí</u> a Heina-Borelovo lemma
- Arzelaova věta

7. Topologické, normované a unitární prostory

- Minkovského, Holderova a Cauchy-Buňakovského nerovnost pro konečný a nekonečný součet, v integrálním tvaru
- <u>topologický prostor, topologie a okolí bodu</u>
- <u>normovaný lineární prostor</u> a v něm indukovaná metrika, <u>Banachův prostor</u>
- příklady – v R^n, l_p, C[a,b],…
- <u>Prostor se skalárním součinem</u> - unitární - a v něm indukovaná norma, <u>Hilbertův prostor</u>
- příklady - v R^n, l_p, C[a,b],…

Diferenciální počet funkcí více proměnných

1. Funkce více proměnných
2. Limita a spojitost
3. Parciální derivace
4. Diferenciál
5. Derivace složené funkce, Taylorův vzorec
6. Lokální a absolutní extrémy
7. Zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí
8. Funkce daná implicitně
9. Vázané extrémy

1.Funkce více proměnných

- **Reálná funkce** n-reálných proměnných, definiční obor

  Př.: ilustrační příklady

- **Graf funkce**, vrstevnice

  Př: ilustrační příklady

2. Limita a spojitost

- **Okolí** bodu v R^n a R^{*n}, jeho vlastnosti
- **Limita** (vl. i nevl.), zvláštní případy
- **Věta**: *o jednoznačnosti limity*
- **Věta**: *pravidla pro počítání limit*
- **Věta**: *o 3 limitách*
- **Věta**: *o spec. limitě součinu*

  (Důkazy: analogicky s DP I, viz též teorie metrických prostorů a limity zobrazení mezi nimi)

Př.: přímé výpočty, zavedení polární soustavy souřadnic, závislost limity „na cestě“ a neexistence limity

- **Spojitost** v bodě
- **Věta:** *pravidla pro počítání se spojitými funkcemi* (racionální operace, skládání)

  Důkaz: Z pravidel pro počítání s limitami.
- **Spojitost na množině**

  (s využitím limity vzhledem k podmnožině)
- *Věty o vlastnostech funkcí spojitých na kompaktních a souvislých množinách:*

  Věta: *Weierstrasseova 1. a 2.*

  Věta: *Bolzanova*

  Důkazy: Analogicky s větami v DP I, příp. plyne z obecnějších tvrzení o vlastnostech spojitých zobrazení mezi metrickými prostory.
- **Př.:** včetně množin poruch spojitosti

3. Parciální derivace

- **Parciální derivace 1. řádu**

  označení, pravidla pro počítání, geometrický význam, vztah ke spojitosti (protipříklady)

- **Parciální derivace vyšších řádů**

- **Věta:** *Schwarzova věta* (n = 2, n – obecné)

  Důkaz: Dvojnásobné použití Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

- **Směrová derivace**

  1. řádu - označení, pravidla pro počítání, vztah k parciální derivaci a spojitosti, směrové derivace vyšších řádů - Schwarzova věta

- **Věta:** *Lagrangeova věta o střední hodnotě*

  (pro parciální i směrové derivace)

4.Diferenciál

- **Diferencovatelnost funkce a diferenciál 1.řádu**

  (n = 2, později n - obecné) ekvivalentní definice

- **Věta:** *o spojitosti diferencovatelné funkce*

  Důkaz: Přímým využitím diferencovatelnosti v definici spojitosti (pomocí limity).

- **Věta:** *o výpočtu diferenciálu*

  Důkaz: Nulováním druhého z přírůstků ve formuli definice diferencovatelnosti

- **Pozn:** geometrický smysl, numerická aplikace, výpočet tečné roviny (nadroviny), normálového vektoru

- **Věta:** *postačující podmínka diferencovatelnosti*
- **Gradient**
- **Diferenciály vyšších řádů** (formálně)
- **Kmenová funkce** a její smysl (m.j. exaktní DR)

5. Derivace složené funkce, Taylorův vzorec

- **Věta:** *o derivaci složené funkce*

  (n = 2 a derivace 1. a 2. řádu, transformování výrazů, n - obecné)

  Důkaz: Využitím diferencovatelnosti vnější složky při výpočtu limit určujících příslušné parciální derivace.

- **Věta:** *Taylorova věta*

  (n = 2, různé formy zápisu, numerická aplikace, n - obecné)

  Důkaz: S využitím Taylorovy věty funkce jedné proměnné – parametru popisujícím úsečku mezi uvažovanými body

6. Lokální a absolutní extrémy

- **Lokální extrémy, stacinární bod**
  (ilustrativní příklady možností)
- **Věta:** *o stacionárních bodech*
  Důkaz: sporem
- **Věta:** *o charakteru stacionárního bodu*
  (pro n = 2 a s diferenciálem 2.řádu)
  Důkaz: S použitím Taylorovy věty a spojitosti 2. derivací.
- **Pozitivní a negativní definitnost, semidefinitnost a indefinitnost** kvadratických forem a matic je representujících
- **Věta:** *kriterium pozitivní a negativní definitnosti*
  (pomocí vlastních čísel, pomocí hlavních minorů – viz algebra)

- **Absolutní (globální) extrémy** na množině
- **Věta:** *o metodě výpočtu absolutních extrémů spojité funkce na kompaktní množině*

  Důkaz: důsledek Weierstrasseovy věty

7. Zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí

- **Zobrazení z R^2 do R^2**
- (příklady – transformace proměnných)
- **Spojitost a diferencovatelnost zobrazení, Jacobiova matice a jacobián zobrazení** (n = 2)
- **Věta:** *o derivaci složeného zobrazení*

  Důkaz: Aplikace věty o derivaci složené funkce prostřednictvím komponent zobrazení
- **Věta:** *o derivaci inverzního zobrazení*

  Důkaz: Aplikace předchozí věty na kompozici zobrazení a zobrazení k němu inverznímu, tj. rovné identickému zobrazení.

- **Spojitost a diferencovatelnost obecného zobrazení, Jacobiova matice a jacobián zobrazení** (n - obecné)
- **Věta:** *o derivaci složeného zobrazení*
- **Věta:** *o derivaci inverzního zobrazení*

- **Diferenciální operátory matematické fyziky**
  - **Vektorové pole** a jeho souřadnice F=(P,Q,R)

    (f: R^3 do R^3 a grad f)
  - **Hamiltonův „nabla“ operátor, divergence, rotace vektorového pole**
  - operace s diferenciálními operátory ya jejich použití ve fyzice

8. Funkce dané implicitně

- **Implicitně daná funkce jedné proměnné**
- ilustrativní příklady
- **Věta:** *o jednoznačné existenci a spojitosti…*

  Důkaz: S pomocí věty Banachovy věty o pevném bodě:

  – konstrukce vhodného úplného prostoru P spojitých funkcí a zobrazení T, jehož pevný bod je implicitně danou funkcí

  – vlastnosti zobrazení T – je kontrakcí P do sebe a proto i obraz spojité funkce je spojitou funkcí

- **Věta:** *o výpočtu derivace…*

  Důkaz: S použitím předchozí věty a věty o derivaci složené funkce

- **Pozn.:**
  - Konstrukce tečny a normály
  - Aplikace – výpočet extrémů, užití Taylorovy věty
  - Výpočet derivací vyšších řádů – opakováním postupu

- **<u>Implicitně daná funkce více proměnných</u>** (intuitivně)
- **<u>Věta:</u>** *o existenci, spojitosti a výpočtu parciálních derivací…*

  Důkaz: neuveden – je analogický…
- **<u>Věta:</u>** *o konstrukci tečné nadroviny…*
- **Pozn.:**
  - Aplikace – výpočet extrémů, užití Taylorovy věty
  - Výpočet derivací vyšších řádů – opakováním postupu

- **<u>Implicitně dané zobrazení</u>** (analogie, vektorový zápis)
- **<u>Věta:</u>** *o lokální jednoznačné existenci, spojitosti a derivaci…*

  Důkaz: analogicky jednoduššímu případu

- **<u>Normálový a tečný prostor</u>** k množině bodů daných m implicitními rovnicemi
- **Pozn.:** metoda konstrukce v definici

9. Vázané extrémy

- **Lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M** (M dána implicitním systémem rovnic)
- **Věta:** *o existenci Lagrangeových multiplikátorů*

  Důkaz: Sporem - 1. pro lineární vazebné podmínky, s využitím jejich „regularity“ a diferencovatelnosti funkce f;

  2. pro nelineární vazebné podmínky – navíc s využitím jejich diferencovatelnosti
- **Stacionární bod funkce f na množině M**
- **Věta:** *o charakteru stacionárního bodu…*

  Důkaz: S využitím Taylorovy věty na Lagrangeovu funkci
- **Pozn.:** Vázané extrémy a nerovnosti

Písemná část zkoušky z MA 2

6 příkladů z tématických okruhů:

1. ODR 1.řádu
2. ODR vyššího řádu
3. Úvodní partie MA 2 (limita, 1. derivace a diferenciál - geometrická a numerická aplikace)
4. Derivace složené funkce, vyšších řádů a jejich užití (včetně transformace výrazů)
5. Extrémy (lokální, absolutní, vázané)
6. Implicitní funkce, jejich analýza a užití

- <u>Čas</u> řešení 2x50 minut
- <u>Hodnocení</u> maximum 40 b.

  (k získání zápočtu přepočítáváno na 30 b.)
- K písemce <u>povoleno</u>
  - použití neprogramovatelných kalkulátorů
  - „taháku“ formátu A4 s podstatnými formulemi…

Ústní část zkoušky

<u>2 otázky – 1 z okruhu MP a 1 z DP II:</u>

1) Uveďte Definici x.y.z:
- definici (definovaný pojem) vysvětlete
- ilustrujte na příkladě, příp. náčrtem
- presentujte přehled základních vlastností
- charakterizujte teoretický význam a případné praktické užití

2) Formulujte Větu x.y.z:
- vysvětlete předpoklady
- vysvětlete tvrzení
- větu ilustrujte příkladem, příp. náčrtem
- uveďte základní kroky důkazu, příp. podrobně dokažte
- presentujte teoretický a příp. praktický význam

3) Vyřešte příklad x.y.z:
- popište jednotlivé kroky postupu
- citujte použitá tvrzení
- postup i jeho jednotlivé kroky zdůvodněte