1. Kombinatorika

Pojmy a jejich význam

Z teorie. ***Faktoriál***

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$
$$0! = 1.$$

Kombinační číslo. Pro $a \in \mathbf{R}$

$$\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots,$$
$$\binom{a}{0} = 1.$$

Také $n! = \Gamma(n+1)$.

Pro celá $0 \leqq k \leqq n$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Při výpočtech je však dobré co nejvíce krátit:

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \ldots 1}{(2 \cdot 1) \cdot (98 \cdot 97 \ldots 1)} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950.$$

Variace k prvků z n je uspořádaná k-tice, v níž se žádný prvek neopakuje. Kolik jich je?

Na první místo můžeme dát n prvků, na druhé jen $n-1$, …, na k-té zbude $n-k+1$ prvků. Celkem tedy

$$V_k(n) = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Platí (umístíme 1. prvek)

$$V_k(n) = nV_{k-1}(n-1),$$

nebo (ty bez prvku $n+1$ a zařazení prvku $n+1$ na jedno z k míst)

$$V_k(n+1) = V_k(n) + kV_{k-1}(n).$$

Permutacemi n prvků rozumíme jejich různá uspořádání. Kolik jich je (kolik způsoby lze seřadit n-prvkovou množinu)?

Na první místo můžeme dát n prvků, na druhé pak jen $n-1$, …, na n-té zbude jediný prvek. Celkem tedy

$$P(n) = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

k členná ***kombinace*** z n prvkové množiny je její podmnožina o k prvcích. Kolik jich je?

Vezměme k-členné variace z n prvků. Vždy $k!$ variací obsahuje tytéž prvky, jen v jiném pořadí — reprezentují touž podmnožinu.

Tudíž k-prvkových podmnožin je $k!$-krát méně než variací

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Snadno teď dokážeme vztahy kombinačních čísel.

1) k prvkových podmnožin je tolik, co $n-k$ prvkových (množina a její doplněk).

2) $k+1$ prvkové podmnožiny $n+1$ prvkové množiny buďto obsahují prvek 1 (k němu tedy k prvků z n) anebo ho neobsahují ($k+1$ prvků z n).

Variace s opakováním je uspořádaná k-tice z n prvků, v níž se prvky mohou opakovat. Kolik jich je?

Na první místo můžeme dát n prvků, na druhé opět n, …, na k-té také n, celkem tedy

$$V_k'(n) = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ krát}} = n^k.$$

Kolik má n-prvková množina podmnožin?

Verze 2004-09-03

U každého prvku zaznamenáme, je-li, nebo není- li v podmnožině, máme tak uspořádanou k-tici z prvků 1,0, těch je

$$V_n^*(2) = 2^n.$$

Tedy bez binomické věty

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Permutace s opakováním je uspořádaná $k = k_1 + \cdots + k_n$-tice z n prvků, v níž se prvek i vyskytuje k_i-krát. Kolik jich je?

Přestaneme-li v $k!$ permutacích k prvků rozlišovat mezi k_i prvky, dostaneme $k_i!$-krát méně možností, tedy

$$P'_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_n!}$$

Kombinace s opakováním je k-členná (neuspořádaná) skupinu z n prvků, které se v ní mohou opakovat. Kolik jich je?

Vybíráme k-člennou skupinu z předmětů n druhů. Reprezentujme ji (tj. kolik předmětů kterého druhu) posloupností teček a čárek: tečky značí předmět a čárka znamená, že následující tečky znázorňují předměty dalšího druhu. Posloupnost tedy začíná tečkou, pokud jsme vybrali aspoň jeden předmět 1. druhu, anebo čárkou, pokud žádný předmět 1. druhu vybrán nebyl. Podobně posloupnost končí tečkou, pokud jsme vybrali aspoň jeden předmět posledního, tj. n-tého druhu, anebo čárkou, pokud žádný předmět n-tého druhu vybrán nebyl.

Posloupnost tak obsahuje k teček (předmětů) a $n-1$ čárek (oddělujících jednotlivé druhy) a je určena např. polohami čárek, tj. vybráním $n-1$ míst z $k+(n-1)$ možných

$$C'_k(n) = C_{n-1}(n+k-1) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Známe tak počet nezáporných celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + \cdots + x_n = k$$

(máme dostat k jedniček jako součet jedniček n druhů).

1.1. Přehled výběru k-tic z n prvků.

	bez opakování	s opakováním
Variace (záleží na pořadí)	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V'_k(n) = n^k$
Permutace (záleží na pořadí)	$P(n) = n!$	$P'_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}$
Kombinace (nezáleží na pořadí)	$C_k(n) = \binom{n}{k}$	$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

Variace

1.1. Kolika způsoby může být mezi osm finalistů rozdělena zlatá, stříbrná a bronzová medaile?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.1)

K řešení

1.2. Sestavujeme vlajku ze 3 vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky. Kolik vlajek lze sestavit, kolik jich má modrý pruh, kolik nemá červený pruh uprostřed?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.2)

K řešení

1.3. Určete počet všech nejvýše pěticiferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.3)

K ŘEŠENÍ

1.4. Ve výboru je 6 mužů a 4 ženy. Kolik je způsobů, jak zvolit předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře? Co když předseda a místopředseda mají být opačného pohlaví?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.4)

K ŘEŠENÍ

1.5. Ve vlaku je kupé se 4 místy v každém směru jízdy. Z 8 cestujících 3 chtějí sedět ve směru jízdy, 2 proti, ostatním je to jedno. Kolika způsoby si mohou sednout, aby byli všichni spokojeni?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.5)

K ŘEŠENÍ

1.6. Kolika způsoby lze sestavit šestihodinový rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje 12 předmětům (každému nejvýše 1 hodinu denně)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.6)

K ŘEŠENÍ

1.7. Určete počet všech nejvýše čtyřciferných čísel s různými číslicemi, která jsou sestavena z číslic 0, 2, 4, 6, 8.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.7)

K ŘEŠENÍ

Permutace

1.8. 8 přátel si v restauraci sedá ke "svému" stolu o 8 místech. Kolika způsoby se mohou posadit? Co když je stůl kulatý a za jedno rozesazení považujeme ta, kdy má každý stejného levého i pravého souseda?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.8)

K ŘEŠENÍ

1.9. S připomínkami k zákonu chce vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet všech pořadí jejich vystoupení. V kolika případech vystupuje A až po E, v kolik ihned po E?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.9)

K ŘEŠENÍ

1.10. Kolika způsoby si může při nástupu n táborníků stoupnout do řady, v níž A a B nestojí vedle sebe?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.10)

1.11. V pětimístné lavici sedí 5 studentů. Kolika způsoby si mohou sednout? Co když žák „A“ chce sedět na kraji? Co když „A“ a „B“ chtějí sedět vedle sebe?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.11)

K ŘEŠENÍ

1.12. Kolikrát lze přemístit slova ve verši „Sám svobody kdo hoden, svobodu zná vážiti každou“, nemají-li se promíchat slova věty hlavní a vedlejší?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.12)

K ŘEŠENÍ

1.13. Kolika způsoby může nastoupit m chlapců a n dívek do zástupu tak, aby a) nejdříve stály dívky a pak chlapci, b) mezi žádnými dvěma chlapci nestála dívka?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.13)

K ŘEŠENÍ

Kombinace

1.14. Test se skládá ze 2 dějepisných, 2 zeměpisných a 1 literární otázky. Připraveno je 30 dějepisných, 25 zeměpisných a 20 literárních otázek. Kolik variant testu lze vytvořit?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.14)

K ŘEŠENÍ

1.15. Na večírku je n lidí. Přiťukne-li si skleničkou každý s každým, kolik ťuknutí by mohlo být slyšet?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.15)

K ŘEŠENÍ

1.16. Kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat a) trojici políček, b) neležících v témže sloupci, c) neležících v témže sloupci ani řadě?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.16)

K ŘEŠENÍ

1.17. Petr má 7 knih, o které se zajímá Ivana. Ivana má 10 knih, o které se zajímá Petr. Kolika způsoby si Petr může vyměnit své 2 knihy za dvě Ivaniny?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.17)

K ŘEŠENÍ

1.18. Kolika způsoby může m chlapců a n dívek vytvořit taneční pár?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.18)

1.19. Kolik je úhlopříček v konvexním n-úhelníku?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.19)

Variace s opakováním

1.20. Kolik SPZ existuje, jsou-li tvořeny 3 písmeny a 4 čísly (písmen je 28)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.20)

1.21. Skupina 3 chlapců a 2 dívek hledá práci v 7 podnicích, přičemž ve 3 podnicích berou jen muže, ve 2 jen ženy a ve zbylých 2 každého. Kolika způsoby se skupina může do jednotlivých podniků rozejít?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.21)

1.22. Kolik je značek Morseovy abecedy (1–4 místné posloupnosti teček a čárek)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.22)

1.23. Musí mít aspoň dva obyvatelé městečka o 1500 obyvatelích stejné iniciály (jméno a příjmení začínají jedním ze 32 písmen)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.23)

1.24. Určete počet šesticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je sudý.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.24)

Permutace s opakováním

1.25. Kolik různých „slov“ lze vytvořit přeházením písmen ve slově „kombinatorika“?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.25)

1.26. Kolika způsoby lze přemístit písmena ve slově „abrakadabra“?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.26)

1.27. Kolika způsoby lze umístit všechny bílé šachové figurky a) do dvou pevně zvolených řad šachovnice, b) do libovolných dvou?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.27)

K ŘEŠENÍ

1.28. Kolika způsoby můžeme ze 7 kuliček (4 modrých, po 1 bílé, červené, zelené) vybrat a položit do řady 5?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.28)

K ŘEŠENÍ

Kombinace s opakováním

1.29. Kolika způsoby lze vybrat 4 karty ze sady 32, zajímají-li nás pouze a) barvy, b) hodnoty?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.29)

K ŘEŠENÍ

1.30. Klenotník má 3 rubíny, 2 smaragdy a 5 safírů. Kolika způsoby může sestavit prsten se 3 kameny?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.30)

K ŘEŠENÍ

1.31. Kolika způsoby lze vytáhnout 5 kuliček ze sáčku, který obsahuje a) 5 červených, 4 modré a 4 zelené, b) aspoň 5 od každé ze 3 barev?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.31)

1.32. Kolika způsoby lze z nabídky 4 druhů rybiček zakoupit 6 ryb, kupujeme-li je od každého druhu po párech?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.32)

1.33. Kolik je kvádrů s velikostmi hran rovnými přirozeným číslům ≤ 10? Kolik z nich jsou krychle?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.33)

1.34. Kolik je trojúhelníků s velikostmi stran z množiny $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$? Kolik jich je rovnoramenných a kolik rovnostranných?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.34)

Další

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

1.35. Kolik je péticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 1, 3, 4, 7? Kolik z nich je dělitelných šesti?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.35)

1.36. Kolik je nejvýše pěticiferných přirozených (tj. kladných celých) čísel?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.36)

1.37. Kolika způsoby se na startu může seřadit 8 automobilů do dvou řad po 4 autech? Co když nám jde jen o rozdělení do dvou řad?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.37)

1.38. Napíšeme pod sebe všechny permutace čísel 1, 2, 3, 4, 5. Jaký je součet 120 čísel v každém z 5 sloupců?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.38)

1.39. Na maturitním večírku je 15 hochů a 12 dívek. Kolika způsoby lze vybrat 4 taneční páry?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.39)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

1.40. Kolika způsoby lze přemístit písmena ve slově „Mississippi"? Kolik takových slov nezačíná na „M"?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:1.40)

1.41. Kolika způsoby lze nakoupit 250g kávy, mají-li v samoobsluze 4 druhy po 50g? Co když od dvou druhů mají pouze po 4 balíčcích?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:1.41)

1.42. Kolika způsoby lze zaplatit a)6 Kč, b) $2n$ Kč pomocí padesátníků a jednokorun?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:1.42)

1.43. Kolika způsoby si mohou 3 osoby rozdělit 8 jablek?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:1.43)

1.44. Kolika způsoby lze všechny figurky šachové hry rozmístit na 64 políček šachovnice?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:1.44)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

1.45. Kolika nulami končí číslo 258! ?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.1.45)

2. Klasická definice pravděpodobnosti

Z definice

Z teorie. ***Klasická definice pravděpodobnosti***: Nechť $\mathbf{\Omega} \neq \emptyset$ je konečná množina *stejně pravděpodobných* výsledků pokusu. Potom **pravděpodobností** jevu $\boldsymbol{A} \subset \Omega$ nazýváme číslo

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\Omega|} = \frac{\text{počet případů příznivých jevu } A}{\text{počet všech případů}}.$$

Podobně poměr příznivých a všech případů můžeme vyjádřit podílem velikostí příznivé plochy a celkové plochy při geometrickém znázornění (***geometrická pravděpodobnost***).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

2.1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne sudé číslo?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.1)

K ŘEŠENÍ

2.2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 2 kostkami bude součet 8?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.2)

K ŘEŠENÍ

2.3. Dřevěnou, červeně natřenou krychli o straně 4 cm rozřežeme na jednotkové krychličky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička a) má právě 2 červené stěny, b) nemá žádnou červenou stěnu?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.3)

K ŘEŠENÍ

2.4. Vojenskou kolonu tvoří 2 terénní vozy UAZ, 3 auta Praga V3S a 4 tatry 138. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení kolony pojedou stejná vozidla za sebou?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.4)

K ŘEŠENÍ

2.5. Máme 16 lahví minerálek: 10 Šaratic a 6 Mlýnských pramenů. Náhodně vybereme 3 lahve. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali 2 Šaratice a 1 Mlýnský pramen?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.5)

K ŘEŠENÍ

2.6. Ve třídě 20 chlapců a 12 dívek jsou losem určeni 2 mluvčí. Jaká je pravděpodobnost, že obě pohlaví budou zastoupena?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.6)

2.7. 40 studentů má být rozděleno na 4 stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že A a B budou ve stejné skupině?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.7)

2.8. V semifinále, do něhož postoupila družstva a, b, c, d, budou soupeři určeni losem. Jaká je pravděpodobnost, že se utkají a s b a c s d?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.8)

2.9. 8 družstev bude rozlosováno do dvou skupin po 4. Jaká je pravděpodobnost, že 2 nejsilnější družstva se ocitnou v téže skupině?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.9)

2.10. Jaká je pravděpodobnost, že slovem náhodně sestaveným z písmen A, A, A, E, I, K, M, M, T, T bude MATEMATIKA?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.10)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

2.11. Dva lidé si dali schůzku mezi 17 a 18 hod. Jaká je pravděpodobnost setkání, přicházejí-li nezávisle a náhodně během domluvené doby a čekají-li na druhého 15 minut?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.11)

K ŘEŠENÍ

2.12. Na úsečce délky ℓ náhodně zvolíme 2 body. Jaká je pravděpodobnost, že ze vzniklých 3 částí lze sestavit trojúhelník?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.12)

K ŘEŠENÍ

Vlastnosti

Z teorie. $P(\emptyset) = 0$, $\quad P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$, $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Tudíž (*pouze*) pro A, B disjunktní je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Zvlášť vztah pro pravděpodobnost doplňku lze často vhodně použít.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

2.13. Jev A nastane, je-li dané číslo dělitelné 2, jev B, je-li dělitelné 3. Popište jev $C = A \cap B$ a dále jevy $A^c \cap C$, $A \cup C^c$ a $A^c \cup B^c$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.13)

2.14. Jaká je pravděpodobnost, že z n lidí někteří dva slaví narozeniny ve stejný den ($n < 365$)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.14)

2.15. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 3 kartami, náhodně vytaženými z balíčku 32 karet, bude eso?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.15)

2.16. Jaká je pravděpodobnost, že 3 náhodně vybraná pole na šachovnici 8×8 nebudou ležet v tomtéž sloupci?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.16)

2.17. Pomocí pravděpodobností jednotlivých jevů a jejich průniků vyjádřete $P(A \cup B \cup C)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.17)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

Verze 2004-09-03

2.18. Z 10 studentů je losována tříčlenná komise. Jaká je pravděpodobnost, že A **nebo** B budou mezi vylosovanými?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.18)

K ŘEŠENÍ

2.19. V ruletě může padnout $1, \dots, 36$, nebo 0. Hráč vsadil na lichá čísla, na první tucet, a na „poslední číslici 2“. S jakou pravděpodobností vyhraje aspoň jednu z těchto 3 sázek?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.19)

K ŘEŠENÍ

2.20. Hodíme 3 kostkami. S jakou pravděpodobností aspoň na jedné z nich padne šestka? S jakou pravděpodobností padnou jen sudá nebo jen lichá čísla nebo dosáhneme součtu 4? S jakou pravděpodobností padnou jen sudá nebo jen lichá čísla nebo dosáhneme součtu 6?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.20)

K ŘEŠENÍ

Nezávislost jevů

Z teorie.

Definice: Jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou ***nezávislé***, jestliže $\forall_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1,2,\ldots,n\}}$

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdot \mathrm{P}(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

Nezávislost *není* totéž co neslučitelnost (disjunktnost)!
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

2.21. $\mathrm{P}(A) = 0,3$, $\mathrm{P}(B) = 0,5$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0,2$. Jsou jevy A a B nezávislé? Jsou neslučitelné?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.21)

K ŘEŠENÍ

2.22. Dvakrát hodíme mincí. Označme jevy A_1, že v 1. hodu padne líc, A_2, že ve 2. hodu líc a A_3, že v obou hodech padne totéž. Jsou jevy A_1, A_2, A_3 nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.22)

K ŘEŠENÍ

2.23. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$. Jsou jevy $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 12\}$, $B = \{1, 5, 6, 9, 10, \ldots$ $C = \{1, 2, 3, 5\}$ nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.23)

K ŘEŠENÍ

2.24. Z balíčku 32 mariášových karet náhodně vytáhneme jednu kartu. Jev A spočívá ve vytažení žaludové karty, jev B ve vytažení esa. Určete pravděpodobnosti jevů A,B a jestli jsou nezávislé.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.24)

K ŘEŠENÍ

2.25. V účtech je chyba. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden z nezávislých kontrolorů, nacházejících chybu s pravděpodobností 0,90 a 0,95, ji najde?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.25)

K ŘEŠENÍ

2.26. S jakou pravděpodobností fungují zařízení sestavená z nezávisle se chovajících součástek typu A (které pracují s pravděpodobností 0,9) a B (které pracují s pravděpodobností 0,8), jestliže jsou součástky zapojené a) AsB, b) (AsB)p(AsB), tj. zálohování celého zařízení, c) (ApA)s(BpB), tj. zálohování jednotlivých součástek, d) přidáme-li v b) můstek (spojující body mezi A a B na jednotlivých větvích) se součástkou C fungující s pravděpodobností p, e) může-li proud procházet C jen jedním směrem?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.26)

2.27. Mohou být neslučitelné (disjunktní) jevy A a B nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.27)

K ŘEŠENÍ

2.28. Hodíme dvakrát mincí, na níž padá rub (líc) s pravděpodobností $\frac{1}{2} + \varepsilon$ ($\frac{1}{2} - \varepsilon$), $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že oba hody dají týž výsledek?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.28)

K ŘEŠENÍ

Nezávislá opakování pokusu

Z teorie. Opakujeme-li nezávisle na sobě pokusy, jejichž výsledkem je buď „zdar" s pravděpodobností $p \in (0, 1)$, anebo „nezdar" s pravděpodobností $q = 1 - p$ (***Bernoulliovo schéma***), potom

$$\mathrm{P}[\text{právě } k \text{ zdarů v } n \text{ pokusech}] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Je $\binom{n}{k}$ posloupností, v nichž je k zdarů a $n-k$ nezdarů, každá se vyskytne s pravděpodobností $p^k q^{n-k}$ (jednotlivé (ne-)zdary jsou nezávislé).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

2.29. Jaká je pravděpodobnost, že rodina se 4 dětmi má aspoň 3 chlapce?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.29)

K ŘEŠENÍ

2.30. Test obsahuje 10 otázek, každá se 4 možnými odpověďmi. Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví správně aspoň na 5 otázek, jestliže odpovědi volí zcela náhodně?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.30)

K ŘEŠENÍ

2.31. U nemocného člověka odhalí test onemocnění s pravděpodobností 0,99. Podrobí-li se testu 30 nemocných, jaká je pravděpodobnost, že nám žádné onemocnění neunikne?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.31)

K ŘEŠENÍ

2.32. Firma dodává výrobky v sadách po 10 kusech. Je-li v sadě více než 1 vadný výrobek, sada se neúčtuje. Jestliže asi 2% výrobků jsou vadná, kolik asi procent sad nebude firma moci účtovat?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.32)

K ŘEŠENÍ

2.33. Pravděpodobnost zásahu terče při jednom výstřelu je 0,3. Kolikrát je třeba střelbu opakovat, aby pravděpodobnost (aspoň jednoho) zásahu byla aspoň 0,9?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.33)

K ŘEŠENÍ

Další

2.34. Pravděpodobnost, že v každém (žádném) ze dvou následujících dnů dojde (nedojde) k poruše, je 0,5 (0,3). Předpokládejme, že jevy porucha–bez poruchy a naopak mají stejnou pravděpodobnost. Jaká je pravděpodobnost, že během dne dojde k poruše?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.34)

K ŘEŠENÍ

2.35. Pravděpodobnost, že dvojčata budou chlapci (dívky) je 0,34 (0,30). Jaká je pravděpodobnost narození chlapce (dvojčata nejsou nezávislým opakováním narození dítěte!)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.35)

K ŘEŠENÍ

2.36. Každý z n střelců si náhodně vybere jeden z $m \geqq n$ cílů. Jaká je pravděpodobnost, že budou střílet na různé cíle?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.36)

K ŘEŠENÍ

2.37. Odběratel přijme 50 kusovou dodávku, jestliže mezi 10 namátkou vybranými kusy není žádný vadný. Jaká je pravděpodobnost, že dodávka bude přijata, obsahuje-li a) 5, b) 10 vadných kusů?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.37)

K ŘEŠENÍ

2.38. Jaká je pravděpodobnost, že ve sportce vyhrajeme 5. pořadí (uhodneme 3 čísla z 6 losovaných)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.38)

K ŘEŠENÍ

2.39. Student ovládá 45 otázek z 50. Jaká je pravděpodobnost, že 2 otázky, které obdrží u zkoušky, budou obě z těch, které ovládá?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.39) K ŘEŠENÍ

2.40. Studenti u zkoušky losují 3 z 20 otázek. Jaká je pravděpodobnost, že dva studenti a) si vytáhnou tytéž 3 otázky, b) nedostanou ani jednu stejnou?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.40) K ŘEŠENÍ

2.41. Ve třídě o 30 žácích jich 5 nemá domácí cvičení. Jaká je pravděpodobnost, že bude aspoň 1 odhalen, budou-li vyvoláni 4 žáci?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.41) K ŘEŠENÍ

2.42. V osudí je 200 losů, z nichž 10 vyhrává. Jaká je pravděpodobnost, že získáme aspoň jednu výhru, koupíme-li a) 10, b) 20 losů?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.42) K ŘEŠENÍ

2.43. Ze 30 žáků ve třídě jich je 70% připraveno. Budou zkoušeni 3 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň 2 z nich budou připraveni?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.43) K ŘEŠENÍ

2.44. Je pravděpodobnější hodit při 4 hodech jednou kostkou aspoň jednou 6, nebo při 24 hodech dvěma kostkami aspoň jednou 6,6?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.44)

K ŘEŠENÍ

2.45. r míčků spadne náhodně do n krabiček. Jaká je pravděpodobnost, že v i-té krabičce nebude žádný míček? Jaká je pravděpodobnost, že v i-té ani v j-té krabičce nebude žádný míček $(i \neq j)$?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.45)

K ŘEŠENÍ

2.46. n žen a n mužů si náhodně sedá ke kulatému stolu o $2n$ místech. Jaká je pravděpodobnost, že se muži a ženy pravidelně střídají?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.46)

K ŘEŠENÍ

2.47. Předpokládejme ještě, že jeden z mužů má mezi ženami k přítelkyň. Jaká je pravděpodobnost, že vpravo i vlevo od něj budou sedět jeho přítelkyně (když muži se stále budou střídat se ženami a když se střídat nemusí)?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.47)

K ŘEŠENÍ

2.48. V osudí je a černých a b bílých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že bílou kouli vytáhneme poprvé až v k-tém tahu, $k = 1, \dots, a+1$ (vytažené koule nevracíme)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.48)

K ŘEŠENÍ

2.49. Na základě předchozího příkladu spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že při zkoušení klíčů ze svazku o n klíčích přijde na řadu ten, který se do zámku hodí, jako k-tý.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.49)

K ŘEŠENÍ

2.50. Na vysoké škole propadá v 1. ročníku 15% studentů z matematiky, 10% z fyziky a 5% z obou předmětů. Jsou propadání z matematiky a z fyziky nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.50)

K ŘEŠENÍ

2.51. V jedné tombole vyhrává každý pátý los, ve druhé každý desátý. Koupíme-li si po jednom losu od každé, jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden náš los vyhraje?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.51)

K ŘEŠENÍ

2.52. U výrobku se rozlišují dva druhy závad. Víme, že výrobek bude mít vyhovující rozměr s pravděpodobností 0,96 a vyhovující hmotnost s pravděpodobností 0,93, a dále, že některou ze závad má s pravděpodobností 0,09. Jsou závady v rozměru a v hmotnosti nezávislé? Jaká je pravděpodobnost, že výrobek nebude mít obě závady současně?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.52)

K ŘEŠENÍ

2.53. Výrobek má s pravděpodobností 0,10 (0,06, 0,03) vzhledovou (funkční, obě) vadu. Jsou vzhledová a funkční vada nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.53)

K ŘEŠENÍ

2.54. V obvodu zapojeném $As(B_1pB_2)$ nastávají poruchy u jednotlivých členů nezávisle, s pravděpodobnostmi 0,03, 0,2, 0,2. Jaká je pravděpodobnost přerušení obvodu?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.54)

K ŘEŠENÍ

2.55. Bloky A_1, A_2, A_3 fungují nezávisle na sobě s pravděpodobnostmi 0,95, 0,90, 0,85. Jaká je pravděpodobnost, že zařízení A_1p(A_2sA_3) funguje?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.55)

K ŘEŠENÍ

2.56. Zařízení se skládá z 10 stejných, nezávisle se chovajících prvků, fungujících aspoň 100 hodin s pravděpodobností 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že zařízení funguje aspoň 100 hodin, stačí-li, aby fungovalo aspoň 8 prvků?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.56)

K ŘEŠENÍ

2.57. V kanceláři pracují 3 sekretářky přicházející do práce pozdě s pravděpodobnostmi 0,1, 0,2, 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že a) aspoň jedna přijde včas, b) aspoň jedna se opozdí?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.57)

K ŘEŠENÍ

2.58. Kolik hodů mincí je třeba provést, aby pravděpodobnost, že padne aspoň jednou líc byla větší než a) 0,999, b) 0,99?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.58)

K ŘEŠENÍ

2.59. Jak velké musí být n, má-li pravděpodobnost, že šestka padne nejpozději v n-tém hodu, přesáhnout $1/2$? K ŘEŠENÍ
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.59)

Náročnější

2.60. Házíme mincí a sledujeme, jestli padne dvakrát po sobě stejná strana. Jaká je pravděpodobnost, že se tak stalo už během 4 hodů? K ŘEŠENÍ
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.60)

2.61. Z 28 kostek domina (na každé kostce jsou dvě políčka s počtem teček v rozmezí $0, \dots, 6$) náhodně dvě vytáhneme. S jakou pravděpodobností půjdou k sobě přiložit? K ŘEŠENÍ
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.61)

2.62. Postupně vyndaváme koule z urny se 3 bílými, 5 černými a 4 červenými koulemi. Jaká je pravděpodobnost, že červenou vytáhneme dříve než bílou? K ŘEŠENÍ
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:2.62)

2.63. Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b. Na a je n různých bodů $A_1, \ldots, A_n$, na b m různých bodů $B_1, \ldots, B_m$. Jaká je pravděpodobnost, že 3 náhodně vybrané body tvoří trojúhelník?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.63)

K ŘEŠENÍ

2.64. Náhodně vybíráme 3 vrcholy z konvexního n-úhelníku. Jaká je pravděpodobnost, že takto vzniklý trojúhelník nemá s n-úhelníkem společnou stranu?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.64)

K ŘEŠENÍ

2.65. Po číselné ose se posuneme o jedničku vpravo, nebo vlevo, podle toho, zda nám na minci padne rub, nebo líc. Začínáme v 0. Jaká je pravděpodobnost, že po $2n$ krocích budeme v 0?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.65)

K ŘEŠENÍ

2.66. V 3-rozměrném prostoru se posunujeme o jedničku ve směru nebo proti směru jedné z os. Každý směr má pravděpodobnost 1/6. Začínáme v 0. Jaká je pravděpodobnost, že po $2n$ krocích budeme v 0?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.66)

2.67. Nechť je n lidí. V čase 1 jeden z nich náhodně vybranému člověku předá zprávu. Vždy v dalším čase ten, kdo zprávu dostal ji předá někomu jinému, náhodně vybranému. Jaká je pravděpodobnost, že někdy v čase $1, \ldots, r$ se zpráva dostane k někomu, kdo už ji zná? Jaká je pravděpodobnost, že někdy v čase $1, \ldots, r$ se zpráva dostane k tomu, kdo ji původně vypustil?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.67)

K ŘEŠENÍ

2.68. (Banachova úloha) Kuřák má v obou kapsách košile krabičku s n sirkami. Krabičku, ze které si vezme sirku si vybírá náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že v okamžiku, kdy poprvé narazí na prázdnou krabičku, je v té druhé právě k sirek?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.68)

K ŘEŠENÍ

2.69. 40% žáků neumí. Z 200 žáků bylo vybráno 20 a zjistilo se, že prvních 5 umí. Jaká je pravděpodobnost, že také šestý vybraný bude umět?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.69)

2.70. Čísla $1, \dots, n$ promícháme. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedno číslo bude na svém místě? Najděte její limitu při $n \to \infty$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.2.70)

3. Podmíněná pravděpodobnost

Z DEFINICE

Z teorie. ***Podmíněná pravděpodobnost*** jevu A podmíněná jevem B:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}, \quad \text{je-li } \mathrm{P}(B) > 0.$$

Platí: Podmíněná pravděpodobnost $\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$ se chová jako pravděpodobnost.

Pro *nezávislé* jevy $A, B \neq \emptyset$ platí

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$$

(neboť

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)).$$

Platí: Je-li $P(B) > 0$, potom

$P[A \mid B] = P(A) \iff A, B$ nezávislé.

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

3.1. Dvakrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet přesně 10, víme-li, že padla (aspoň jedna) šestka?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.1)

3.2. V populaci je 5% diabetiků; 2% populace jsou diabetici kuřáci. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený diabetik je kuřák?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.2)

3.3. V první zásuvce jsou 2 zlaté mince, ve druhé 1 zlatá a 1 stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně zásuvku a vytáhneme minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže jsme vytáhli stříbrnou?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.3)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

3.4. Bez vracení taháme z urny s a černými a b bílými koulemi. Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém tahu vytáhneme černou kouli, jestliže v prvním tahu jsme vytáhli kouli bílou?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.4)

K ŘEŠENÍ

3.5. Předpokládejme, že při volbách na n míst má každý z N kandidátů stejnou šanci být zvolen. V_j nechť označuje, že kandidát „j“ byl zvolen. Jsou jevy $V_1, V_2, \dots V_N$ nezávislé? Jaká je $\mathrm{P}[V_k \mid V_j]$?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.5)

K ŘEŠENÍ

3.6. V dostihu zvítězí kůň A (B) s pravděpodobností 0,5 (0,3). Kůň A ztratil na startu příliš a je jisté, že nezvítězí. Jaká je nyní pravděpodobnost, že zvítězí B?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.6)

K ŘEŠENÍ

3.7. Šance závodníků A, B, C na vítězství jsou 0,4, 0,3, 0,2. Jestliže A odstoupil, jaká je nyní pravděpodobnost vítězství B a C?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.7)

K ŘEŠENÍ

3.8. Za předpokladu $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$ zjednodušte výraz $\mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \,|\, A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \,|\, A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot \mathrm{P}(A_n \,|\, A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.8)

K ŘEŠENÍ

Věta o celkové pravděpodobnosti

Z teorie. Pro *úplný disjunktní systém* $B_1, B_2, \dots,$ $P(B_i) > 0\ \forall i$, $P(\bigcup_i B_i) = 1$ platí

$$\mathrm{P}(A) = \sum_i \mathrm{P}(A \,|\, B_i)\, \mathrm{P}(B_i).$$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

3.9. V první urně je 6 bílých a 2 černé koule, ve druhé jsou 4 bílé a 2 černé koule. Náhodně zvolíme urnu a vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.9)

K ŘEŠENÍ

3.10. Elektronka s pravděpodobnostmi 0,4, 0,3, 0,3 náleží k jedné ze tří možných partií. Pravděpodobnost, že elektronka odpracuje stanovený počet hodin, jsou u jednotlivých partií 0,8, 0,9, 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka odpracuje stanovený počet hodin?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.10)

K ŘEŠENÍ

3.11. Automat A vyrobí za směnu dvakrát více výrobků než automat B. Pravděpodobnost vzniku zmetku je u automatu A 0,02, u B 0,05. Po skončení směny se výrobky ukládají do jedné bedny. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek náhodně vybraný z této bedny není zmetek?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.11)

K ŘEŠENÍ

3.12. K výstupní kontrole přicházejí výrobky, z nichž je 13 % zmetků. Výstupní kontrola propustí 1 % zmetků a vyřadí 2 % dobrých výrobků. Kolik procent výrobků kontrola vyřadí?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.12)

K ŘEŠENÍ

3.13. V osudí je b bílých a c černých koulí. Táhneme dvakrát bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že a) v prvním, b) ve druhém tahu bude tažena bílá koule?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.13)

K ŘEŠENÍ

3.14. Závod produkuje 5% zmetků se závadou A. Mezi nimi je 6%, které mají i závadu B. Mezi výrobky bez vady A je 2% výrobků se závadou B. Jaký je podíl závad B mezi všemi výrobky?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.14)

K ŘEŠENÍ

3.15. Mezi 20 střelci jsou 4 výborní, 10 dobrých a 6 průměrných s pravděpodobnostmi zásahu 0,9, 0,7 a 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že dva náhodně vybraní střelci oba zasáhnou cíl?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.15)

K ŘEŠENÍ

Bayesova věta

Z teorie. Pro *úplný disjunktní systém* $B_1, B_2, \ldots, P(B_i) > 0\ \forall i$, $P(\bigcup_i B_i) = 1$ platí

$$\mathrm{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum_i \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}$$

(dosazením dle definice podmíněné pravděpodobnosti).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

3.16. Jeden ze 3 střelců s pravděpodobnostmi zásahu 0,3, 0,5, 0,8 vystřelil a zasáhl. Jaká je pravděpodobnost, že střílel druhý střelec? (2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.16) K ŘEŠENÍ

3.17. Tři střelci s pravděpodobnostmi zásahu 0,6, 0,5, 0,4 vystřelili (každý jednou) na cíl. Zjistilo se, že 2 zasáhli. Jaká je pravděpodobnost, že to byl 2. a 3.? (2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.17) K ŘEŠENÍ

3.18. Mezi 20 střelci je 5 výborných, 9 dobrých a 6 průměrných. s pravděpodobnostmi zásahu 0,9, 0,8 a 0,7. Náhodně vybraný střelec ze 2 ran trefil jednou. Jaká je pravděpodobnost, že šlo o výborného (dobrého, průměrného) střelce?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.18)

K ŘEŠENÍ

3.19. Detekční přístroj vadu materiálu odhalí s pravděpodobností 0,95, s pravděpodobností 0,01 označí bezvadný materiál jako vadný. Pravděpodobnost výskytu vady je 0,005. Přístroj ukazuje vadu. S jakou pravděpodobností je zkoušený materiál skutečně vadný?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.19)

K ŘEŠENÍ

3.20. Víme-li, že pravděpodobnost odhalení AIDS při testu je 0,999, že pravděpodobnost správného otestování zdravého jedince je 0,99 a že AIDS se vyskytuje u 0,006 lidí, jaká je pravděpodobnost, že člověk, u kterého byl test pozitivní, AIDS skutečně má?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.20)

K ŘEŠENÍ

3.21. Manžel nepřišel včas ze zaměstnání. Manželka ze zkušenosti ví, že s pravděpodobností 0,3 (resp. 0,6, 0,1) pracuje přesčas (resp. odpočívá v hospodě, zdržel se z jiné příčiny). Pravděpodobnosti, že manžel bude ve 20 hod. doma jsou, podle toho, kde se zdržel, 0,9, 0,2, 0,9. Manžel nakonec ve 20 hod. doma byl. Jaká je pravděpodobnost, že pracoval přesčas (resp. byl v hospodě, byl jinde)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.21)

K ŘEŠENÍ

3.22. Mezi 6 puškami jsou pouze 2 zastřílené. Pravděpodobnost zásahu je u zastřílené 0,9, u nezastřílené 0,2. Náhodně vybranou puškou se podařilo cíl zasáhnout. Jaká je pravděpodobnost, že šlo o zastřílenou (nezastřílenou)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.22)

K ŘEŠENÍ

3.23. Je vyslána zprávu složená z nul a jedniček. Vlivem rušení může dojít k chybě: pravděpodobnost přijetí 0 (resp. 1), byla-li skutečně vyslána, je 0,97 (resp. 0,8). Ve vyslané zprávě je 45% nul. Jaká je

pravděpodobnost, že přijatá 1 byla skutečně vyslána? Jaká je pravděpodobnost špatného příjmu?
(2004-09-03.1y6g0kh6jd2xr.3.23)

3.24. Nevytáhne-li se letadlu podvozek, kontrolka se rozbliká s pravděpodobností 0,999, s pravděpodobností 0,005 však signalizuje závadu, i když vše proběhlo v pořádku. K selhání podvozku dochází s pravděpodobností 0,003. Jaká je pravděpodobnost, že blikající kontrolka představuje planý poplach?
(2004-09-03.1y6g0kh6jd2xr.3.24)

Další

3.25. Pánové Dobrý a Zlý mají splácet úvěr. Pravděpodobnost, že Dobrý (resp. Zlý) svůj úvěr splatí, je 0,9 (resp. 0,1). Pravděpodobnost, že aspoň jeden úvěr bude splacen, je 0,95. Jaká je pravděpodobnost, že Zlý úvěr nesplatí, jestliže Dobrý už ho splatil? Je chování zmíněných pánů nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6jd2xr.3.25)

K ŘEŠENÍ

K ŘEŠENÍ

K ŘEŠENÍ

3.26. Dílna v průměru vyrábí 95% bezvadných výrobků. 30% produkce pochází od pracovníka B, který odevzdává jen 90% bezvadných výrobků. Je-li výrobek z této dílny vadný, s jakou pravděpodobností pochází od B?
(2004-09-03.1y6g0kh6jd2xr.3.26)

K ŘEŠENÍ

3.27. Jen 60% výrobků je kvalitních. Proto se každý jednoduše testuje. Ví se, že podíl výrobků, které jsou nekvalitní a zároveň testováním projdou, je 0,1 a že testovací zařízení neukazuje závadu u 70% testovaných výrobků. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že výrobek, u něhož se při testu neprojevila závada, je skutečně kvalitní?
(2004-09-03.1y6g0kh6jd2xr.3.27)

K ŘEŠENÍ

3.28. Při narození dvojčat je pravděpodobnost stejného pohlaví dvakrát větší než opačného. Je-li první dvojče chlapec, jaká je pravděpodobnost, že i druhé bude chlapec? (Celkově pravděpodobnost narození chlapce je 0,51).
(2004-09-03.1y6g0kh6jd2xr.3.28)

K ŘEŠENÍ

3.29. Tři lovci, každý s pravděpodobností zásahu 0,4, současně vystřelili na vlka. S jakou pravděpodobností bude vlk zabit, je-li známo, že při 1 (2, 3) zásahu zemře s pravděpodobností 0,2 (0,5, 0,8)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.29)

K ŘEŠENÍ

3.30. Na letadlo bylo čtyřikrát nezávisle na sobě vystřeleno s pravděpodobností zásahu 0,1. Jaká je pravděpodobnost, že letadlo bude vyřazeno, stačí-li k tomu 3 zásahy; při 2 se tak stane s pravděpodobností 0,8 a při 1 zásahu 0,6?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.30)

K ŘEŠENÍ

3.31. Na cíl míří 3 nezávislé výstřely s pravděpodobnostmi zásahu 0,1, 0,2, 0,3. Ke zničení cíle stačí 2 zásahy, při jednom dojde ke zničení s pravděpodobností 0,6. Jaká je pravděpodobnost zničení cíle?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.31)

K ŘEŠENÍ

3.32. Dívce dochází v náhodném pořadí n různě dobrých nabídek k sňatku. Dívka prvních $s-1$ nápadníků odmítne a vezme si prvního

takového, který bude lepší než těch prvních $s-1$. Jaká je pravděpodobnost, že si vybere nejlepšího? Jaká je pravděpodobnost, že se neprovdá?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.32)

K ŘEŠENÍ

3.33. $p_B = 5/6$ lidí pojištěných proti úrazu u pojišťovny jsou „běžní“ lidé s pravděpodobností úrazu během roku $u_B = 0,06$. Zbylých $p_S = 1/6$ tvoří sportovci, u nichž je pravděpodobnost úrazu $u_S = 0,6$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný pojištěnec bude mít během roku úraz, a jaká, že mezi takovými si vybereme nešťastníka, který bude mít úraz i v příštím roce? (U každého pojištěnce předpokládáme nezávislost výskytu úrazu v jednotlivých letech.)
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.33)

K ŘEŠENÍ

3.34. Omezme se na rodiny s dětmi. Předpokládejme, že v rodině s k dětmi je pravděpodobnost výskytu libovolné posloupnosti kluků a holek 2^{-k} (tj. narození kluka nebo holky nastává nezávisle s pravděpodobností 1/2) a že pravděpodobnosti výskytu 1, 2, 3 a 4 dětí

jsou 0,2, 0,6, 0,15 a 0,05. Máme-li informaci, že v rodině nemají holku, jaká je pravděpodobnost, že mají jen jedno dítě (kluka)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.3.34)

4. Diskrétní náhodné veličiny

Z definice

Z teorie. ***Rozdělení*** Q náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ je míra na $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$:

$Q(B) = \mathrm{P}(X_{-1}(B)) = \mathrm{P}[X \in B], \quad B \in \mathcal{B}.$

Distribuční funkce F rozdělení Q (náhodné veličiny X):

$F(x) = Q((-\infty, x]) = \mathrm{P}[X \leqq x], \quad x \in \mathbf{R}$

(zprava spojitá).

Střední hodnota náhodné veličiny X (jejího rozdělení):

$\mathrm{E}\, X = \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}\,\mathrm{P}(\omega) = \int_\mathbf{R} x\, \mathrm{d}Q(x).$

Rozptyl náhodné veličiny X (jejího rozdělení):

$$\operatorname{var} X = \operatorname{E}(X - \operatorname{E} X)^2 = \operatorname{E} X^2 - (\operatorname{E} X)^2.$$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

4.1. Při hodu mincí označme $\Omega = \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$, tudíž $\mathrm{P}(\omega) = 1/2 \ \forall_{\omega \in \Omega}$. Funkce X, Y nechť zobrazují množinu Ω do $\mathbf{R}$ takto:

$$X(\mathrm{L}) = 1, \quad X(\mathrm{R}) = 0, \quad Y(\mathrm{L}) = 0, \quad Y(\mathrm{R}) = 1.$$

Co můžeme říct o rozděleních náhodných veličin X a Y? Nakreslete distribuční funkci, určete střední hodnoty a rozptyly.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.1)

4.2. Vyjádřete 3. centrální moment pomocí necentrálních momentů.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.2)

4.3. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny s alternativním rozdělením s parametrem p.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.3)

4.4. Dva střelci (s pravděpodobnostmi zásahu p_1 a p_2) se střídají ve střelbě, dokud někdo nezasáhne. Určete rozdělení počtu výstřelů.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.4)

K ŘEŠENÍ

4.5. Lovec má 5 patron a pravděpodobnost zásahu 0,4. Střílí, dokud netrefí (a dokud má čím). Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl počtu výstřelů.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.5)

K ŘEŠENÍ

4.6. Pro náhodnou veličiny X značme $p_k = \mathrm{P}[X = k] = p_k$, je $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/4$, $p_4 = 1/6$, $p_5 = 1/4$. Spočtěte její střední hodnotu, rozptyl a nakreslete graf distribuční funkce.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.6)

K ŘEŠENÍ

4.7. Pro náhodnou veličinu X je $\mathrm{P}[X = k] = p_k$, $p_{-2} = 1/4$, $p_{-1} = 1/6$, $p_0 = 1/6$, $p_1 = 1/6$, $p_2 = 1/4$. Spočtěte jeho střední hodnotu, rozptyl, šikmost, špičatost a nakreslete graf distribuční funkce.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.7)

K ŘEŠENÍ

4.8. Náhodně vybereme jedno z čísel $1, 2, \ldots, 10$. Náhodná veličina X nechť udává zbytek po vydělení tohoto čísla čtyřmi. Určete střední hodnotu a rozptyl X. Jsou jevy $[X = 2]$ a $[X \le 3]$ nezávislé? Jaká je pravděpodobnost, že X je liché číslo?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.8)

K ŘEŠENÍ

4.9. Dvakrát nezávisle na sobě hodíme kostkou upravenou tak, že na 2 stranách má jedničku, na dalších 2 dvojku a na posledních 2 trojku. Náhodná veličina X nechť udává součet hodů. Určete střední hodnotu a rozptyl X. Určete $P[X$ je sudé číslo$]$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.9)

K ŘEŠENÍ

4.10. Dvakrát nezávisle na sobě hodíme kostkou upravenou tak, že na 2 stranách má jedničku, na dalších 2 dvojku a na posledních 2 trojku. Náhodná veličina X nechť udává zbytek po vydělení součtu hodů třemi. Určete střední hodnotu a rozptyl X. Jsou jevy $[X = 0]$, $[X = 1]$ a $[X = 2]$ nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.10)

K ŘEŠENÍ

4.11. Hráč vsadí na jedno z čísel $1, \ldots, 6$. Bankéř hodí 3 kostkami. Neobjeví-li se vsazené číslo, hráč prohrává sázku; objeví-li se, dostává již zpět a k tomu ještě stejnou částku za každý výskyt jeho čísla. Jaký je střední zisk bankéře?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.11)

K ŘEŠENÍ

4.12. Představují $\mathrm{P}[X = k] = \frac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbf{N}$, rozdělení pravděpodobnosti? Jak je to v tom případě s $\mathrm{E}\, X$?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.12)

K ŘEŠENÍ

Binomické rozdělení

4.13. Při pokusu nastává úspěch s pravděpodobností p. Náhodná veličina X nechť udává počet úspěchů po n nezávislých opakováních takového pokusu. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu, rozptyl. Jaké má rozdělení?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.13)

K ŘEŠENÍ

4.14. Pětkrát hodíme mincí. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že aspoň dvakrát padl líc.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.14)

K ŘEŠENÍ

4.15. n-krát hodíme kostkou. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že šestka padne aspoň jednou.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.15)

K ŘEŠENÍ

4.16. Hodíme čtyřikrát mincí. Náhodná veličina X nechť udává, kolikrát padl líc. Určete její střední hodnotu a rozptyl. Jsou jevy $[X \leqq 4]$, $[X \geqq 0]$ nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.16)

K ŘEŠENÍ

4.17. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Určete takový počet dětí, aby pravděpodobnost, že mezi nimi bude aspoň jeden chlapec, byla větší než 0,99.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.17)

K ŘEŠENÍ

4.18. Kolika kostkami je třeba házet, aby průměrný počet dvojek na 1 hod byl 6?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.18)

K ŘEŠENÍ

Hypergeometrické rozdělení

4.19. V rybníku je N kaprů. A jich vylovíme, označíme a pustíme zpátky. Po čase vylovíme n kaprů. Náhodná veličina X nechť označuje počet označených mezi nimi. Jaké má X rozdělení?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.19)

K ŘEŠENÍ

4.20. Z urny se 3 bílými a 5 černými koulemi jsou vytaženy 3 koule. Najděte rozdělení a střední hodnotu počtu černých koulí mezi vytaženými.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.20)

K ŘEŠENÍ

4.21. Mezi 50 výrobky v bedně je 6 zmetků. Je vybráno 5 výrobků. Najděte rozdělení a střední hodnotu počtu zmetků mezi vybranými.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.21)

K ŘEŠENÍ

4.22. V klobouku jsou 3 černé a 4 bílé koule. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že při vytažení 3 koulí budou aspoň 2 černé.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.22)

K ŘEŠENÍ

Geometrické rozdělení

4.23. Házíme kostkou. X nechť označuje, kolik hodů předcházelo hození šestky. Jaké má X rozdělení?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.23)

K ŘEŠENÍ

4.24. Dva hráči střídavě házejí kostkou. Vyhrává ten, kdo první hodí šestku. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje ten, který začínal?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.24)

K ŘEŠENÍ

Poissonovo rozdělení

4.25. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem λ.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.25)

K ŘEŠENÍ

4.26. Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Dochází-li průměrně k 600 hovorům za hodinu, jaká je pravděpodobnost, že se bude současně konat více než 30 hovorů?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.26)
K ŘEŠENÍ

4.27. Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Má-li ústředna 10 linek a dochází-li průměrně k 120 hovorům za hodinu, jaká je pravděpodobnost ztráty volání?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.27)
K ŘEŠENÍ

4.28. Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Kolik linek musí ústředna mít, dochází-li průměrně k 240 hovorům za hodinu a pravděpodobnost ztráty volání nemá překročit a) 0,01, b) 0,001?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.28)
K ŘEŠENÍ

4.29. V aparatuře dochází k výměnám 10 lamp za rok. Jaká je pravděpodobnost, že během 1000 hodin provozu dojde k vyřazení aparatury v důsledku poruchy lamp?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.29)
K ŘEŠENÍ

4.30. V práci zařízení dochází náhodně k výpadkům. Průměrně jsou 2 výpadky za 24 hodin. Za předpokladu, že možnost výpadku je v každém okamžiku stejná, jaké je pravděpodobnost, že a) v rámci 24 hodin k aspoň 1 výpadku dojde, b) za týden nebudou více než 3 výpadky?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.30)

Aproximace

Z teorie. Lze používat ***aproximace rozdělení***

- hypergeometrického rozdělení $\mathrm{HG}(N, A, n)$ binomickým $\mathrm{Bi}(n, A/N)$, když $n/N < 0{,}1$, $A/N < 0{,}1$,
- binomického $\mathrm{Bi}(n, p)$ Poissonovým $\mathrm{Po}(np)$, když $n > 30$ a $p < 0{,}1$.

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

4.31. Mezi 15 000 výrobky je 300 zmetků. Náhodně vybereme 100 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že vadné budou nejvýše 2?

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.31)

4.32. Ve „sportce" taháme 6 čísel z 49. Sázíme 6 čísel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme uhodli právě 4 čísla?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.32)

4.33. Závod vyrábí v průměru 99,8% kvalitních výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 500 vybranými budou více než 3 zmetky?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.33)

4.34. Je-li 1% leváků, jaká je pravděpodobnost, že mezi 200 lidmi budou a) právě 4, b) aspoň 4 leváci?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.34)

Další

4.35. Hodíme kostkou. Náhodná veličina X nechť udává hozené číslo zmenšené o 6. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl X. Jsou jevy $[X \le -4]$ a $[-4 \le X \le -2]$ nezávislé?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.35)

4.36. Z 10 výrobků, mezi nimiž jsou 3 vadné, postupně vybereme 2 výrobky. Veličina X nechť udává počet vadných (mezi vybranými). Určete pravděpodobnostní funkci veličiny X, jestliže vybraný výrobek a) vracíme zpět, b) nevracíme zpět.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.36)

K ŘEŠENÍ

4.37. Dva střelci (s pravděpodobnostmi zásahu 0,5 a 0,6) nezávisle každý dvakrát vystřelí. Najděte rozdělení, střední hodnotu a rozptyl celkového počtu zásahů.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.37)

K ŘEŠENÍ

4.38. Dva střelci (s pravděpodobnostmi zásahu 0,4 a 0,5) nezávisle každý dvakrát vystřelí. Najděte rozdělení, střední hodnotu a rozptyl rozdílu počtů zásahů prvního a druhého střelce.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.4.38)

K ŘEŠENÍ

4.39. Pracovník obsluhuje n strojů stojících v řadě po a metrech. Po skončení práce na jednom se přesune k tomu stroji, který hlásil

problém jako první. Pravděpodobnost problému u všech strojů je stejná. Najděte průměrnou délku přesunu pracovníka.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2zr.4.39)

4.40. Z n klíčů se jen 1 hodí do zámku. Klíče postupně náhodně zkoušíme. Najděte střední hodnotu a rozptyl veličiny udávající, jako kolikátý přijde na řadu správný klíč.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2zr.4.40)

5. Spojité náhodné veličiny

Z definice

Z teorie. Distribuční funkce $F(x) = \mathrm{P}[X \leq x]$ je *absolutně spojitá*, tj. existuje funkce $f(x)$ (***hustota***) splňující

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Naopak $f(x) = F'(x)$.

Tudíž

$$\mathrm{E}\,g(X) = \int g(x) f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{P}[X \in A] = \int_{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a tedy $\mathrm{P}[X = x] = 0$), $p-$kvantil

$$u_p = \inf\{x, F(x) \geqq p\} = F_{-1}(p).$$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

5.1. Napište distribuční funkci rozdělení daného hustotou $f(x) = x/2$ na $(0,1)$, $1/2$ na $(1,2)$, $(3-x)/2$ na $(2,3)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.1)

K ŘEŠENÍ

5.2. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 2x + 2$, na $(-1,0)$ a nulovou jinde. Najděte $\mathrm{P}[-2 \leqq X \leqq -0,5]$, $\mathrm{P}[-2 \leqq X \leqq -1]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.2)

K ŘEŠENÍ

5.3. Náhodná veličina X má distribuční funkci $x^2/4$ na $(0,2)$, nulovou pro $x < 0$ a jednotkovou pro $x > 2$. Najděte její hustotu, modus, medián, střední hodnotu a $\mathrm{P}[0,5 < X < 1,5]$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.3)

K ŘEŠENÍ

5.4. Najděte medián, horní kvartil a 10 % kvantil rozdělení určeného hustotou $f(x) = 1 - x/2$, $x \in (0, 2)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.4)

K ŘEŠENÍ

5.5. Náhodná veličina má hustotu $f(x) = ae^{-|x|}$ na $\mathbf{R}$ (Laplace). Určete a, střední hodnotu a rozptyl.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.5)

K ŘEŠENÍ

5.6. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ na $\mathbf{R}$ (Cauchy). Určete a, distribuční funkci, $\mathrm{P}[X > \sqrt{3}]$, střední hodnotu, modus a medián.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.6)

K ŘEŠENÍ

5.7. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = ax^2$ na $[0, 2]$ a 0 jinde. Určete a, a pravděpodobnost, že X se od své střední hodnoty neliší o více než 0,5.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.7)

K ŘEŠENÍ

5.8. Najděte distribuční funkci vzdálenosti náhodně zvoleného bodu v kruhu o poloměru R od jeho středu.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2zr 5.8)

K ŘEŠENÍ

5.9. Najděte hustotu, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl vzdálenosti náhodně zvoleného bodu koule o poloměru R od jejího středu.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2zr 5.9)

K ŘEŠENÍ

Rovnoměrné rozdělení

5.10. Náhodná veličina X má $\mathrm{Ro}(0, 2)$. Napište její hustotu a distribuční funkci a určete $\mathrm{P}[0 < X < 1/2]$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2zr 5.10)

K ŘEŠENÍ

5.11. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl rovnoměrného rozdělení $\mathrm{Ro}(a, b)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2zr 5.11)

K ŘEŠENÍ

5.12. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení. Jaká je jí hustota, jestliže $\mathrm{E}\,X = 1$, $\operatorname{var} X = 3$.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr 5.12) K ŘEŠENÍ

Exponenciální rozdělení

5.13. Doba do poruchy má exponenciální rozdělení s intenzitou poruch 0,02. Najděte střední dobu do poruchy a pravděpodobnost, že po dobu 80 hodin nedojde k poruše.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr 5.13) K ŘEŠENÍ

5.14. Doba bezporuchového chodu zařízení má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 700 hodin. Určete dobu, během níž nedojde s pravděpodobností 0,8 k poruše?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr 5.14) K ŘEŠENÍ

5.15. Nechť životnost výrobků se řídí exponenciálním rozdělením s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-x/5}, x > 0$. Jakou záruční dobu stanoví výrobce, nemá-li počet reklamovaných výrobků překročit 10%? K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.15)

5.16. Doba opravy televizoru má exponenciální rozdělení. Určete střední dobu opravy, jestliže do 60 minut je opraveno 30 % televizorů.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.16) K ŘEŠENÍ

5.17. Jaký je podíl střední hodnoty a mediánu u exponenciálního rozdělení?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.17) K ŘEŠENÍ

5.18. Doba do poruchy zařízení má exponenciální rozdělení s parametrem λ. Porouchané zařízení je za dobu t opraveno a znovu uvedeno do provozu. Jaká je pravděpodobnost, že mezi sousedními poruchami uběhne více času než $3t$?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.18) K ŘEŠENÍ

5.19. Střední doba bezporuchové práce dvou zařízení pracujících nezávisle s exponenciálním rozdělením je 750 a 800 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že obě vydrží pracovat déle než 1000 hodin?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.19) K ŘEŠENÍ

5.20. Vyjádřete dobu, po kterou bude s pravděpodobností $1-\alpha$ pracovat zařízení sestávající z n nezávisle se chovajících součástek (všechny s týmž exponenciálním rozdělením) zapojených sériově (resp. paralelně).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.20)

K ŘEŠENÍ

Normální rozdělení

5.21. Náhodná veličina X má rozdělení $N(0,1)$. Vyjádřete hustotu a distribuční funkci veličiny $Y = \mu + \sigma X$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.21)

K ŘEŠENÍ

5.22. Délka výrobku v mm má $N(68,3,0,04)$. Jaká je pravděpodobnost, že délka náhodně odebraného výrobku bude mezi 68 a 69 mm?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.22)

K ŘEŠENÍ

5.23. Výsledky měření jsou zatíženy jen normálně rozdělenou náhodnou chybou se směrodatnou odchylkou 3 mm. Jaká je pravděpo-

dobnost, že při 3 měřeních bude aspoň jednou chyba v intervalu (0, 2,4)?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.23)

K ŘEŠENÍ

5.24. Životnost svíčky (v km) má normální rozdělení s průměrem 10 000 a směrodatnou odchylkou 3000. Jaká je pravděpodobnost, že na vzdálenosti 4300 km nebude třeba měnit žádnou ze 4 svíček?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.24)

K ŘEŠENÍ

5.25. Pro veličinu $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ známe a) $\mathrm{P}[X \leqq 5] = 0,7$ a $\mathrm{P}[X \geqq 0] = 0,8$, b) $\mathrm{P}[X \geqq 5] = 0,7$ a $\mathrm{P}[X \leqq 0] = 0,8$. Určete μ, σ^2.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.25)

K ŘEŠENÍ

5.26. Výsledky radarového měření jsou zatíženy normálně rozdělenou náhodnou chybou s nulovou střední hodnotou, která s pravděpodobností 0,95 nepřesahuje ± 20 m. Určete směrodatnou odchylku měření.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.26)

K ŘEŠENÍ

5.27. Výrobky jsou považovány za prvotřídní, pokud odchylka od předepsané délky nepřekročí 3,6 mm. Jestliže odchylka má rozdělení $N(0, 9)$, kolik prvotřídních výrobků lze čekat mezi 100 výrobky?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.27)

K ŘEŠENÍ

5.28. Chyba při měření vzdálenosti má $N(0, 1370)$. Kolikrát je třeba měření opakovat, má-li s pravděpodobností 0,9 být aspoň jedna chyba menší než 5?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.28)

K ŘEŠENÍ

5.29. Jaký rozptyl mají normálně rozdělená měření, která se s pravděpodobností 0,41 neodchylují od správné hodnoty o více než 24 m?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.29)

K ŘEŠENÍ

Monotónní transformace

Z teorie. Je-li veličina $Y = T(X)$, monotónní funkcí veličiny X (nebo aspoň postupně na několika intervalech), lze spočítat její distribuční funkci pomocí inverzní transformace T_{-1}. Pro T rostoucí

$$F_Y(y) = \mathrm{P}[Y \leq y] = \mathrm{P}[T(X) \leq y] = \mathrm{P}[X \leq T_{-1}(y)] = = F_X(T_{-1}(y)),$$

resp. pro T klesající

$$F_Y(y) = \cdots = \mathrm{P}[X \geq T_{-1}(y)] = 1 - F_X(T_{-1}(y)).$$

(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr Teo)

5.30. Najděte hustotu veličiny $Y = X^2$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 3)$.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr 5.30)

5.31. X má $\mathrm{Ro}(-1, 1)$. Najděte hustotu veličiny X^2.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr 5.31)

5.32. Náhodná veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(1, 2)$. Najděte hustotu a distribuční funkci veličiny $Y = 1/X$.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr 5.32)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

5.33. Najděte hustotu veličiny $Y = \ln X$, jestliže X má hustotu $\frac{x}{a^2} e^{-x^2/2a^2}$, $x > 0$, a nulovou jinde (Rayleigh).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.33)

K ŘEŠENÍ

5.34. Najděte hustotu, střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = \exp(-X)$, jestliže X má hustotu $3x^2$, $x \in (0, 1)$, a nulovou jinde.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.34)

K ŘEŠENÍ

5.35. Najděte hustotu veličiny X^2, jestliže $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.35)

K ŘEŠENÍ

5.36. Na kružnici poloměru R se středem v počátku je náhodně zvolen bod. Náhodnou veličinou X je jeho x-ová souřadnice. Určete hustotu a distribuční funkci X.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.36)

K ŘEŠENÍ

5.37. Náhodná veličina X má rozdělení s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$ (Exp(1)). Najděte funkci T tak, aby veličina $Y = T(X)$ měla $\mathrm{N}(0, 1)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.37)

K ŘEŠENÍ

Další

5.38. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = -x/2 + 1$ na $[0, 2]$ a nulovou jinde. Najděte $\mathrm{P}[X \leqq 1]$, $\mathrm{P}[X > 1]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.38)

K ŘEŠENÍ

5.39. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 1/2$ pro $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ a nulovou jinde. Najděte $\mathrm{P}[X \leqq -1{,}5]$, $\mathrm{P}[X < 0{,}5]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.39)

K ŘEŠENÍ

5.40. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 1$ na $[0, 0{,}5]$, $f(x) = 1/2$ na $[1, 2]$, $f(x) = 0$ jinde. Najděte $\mathrm{P}[0{,}25 \leqq X \leqq 1{,}5]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.40)

K ŘEŠENÍ

5.41. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 3(x-1)^2$ na $(0, 1)$ a nulovou jinde. Určete střední hodnotu a hodnotu distribuční funkce v bodě 0,5.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.41)

K ŘEŠENÍ

5.42. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = x$ na $(0, 1]$, $f(x) = 2 - x$ na $(1, 2]$, $f(x) = 0$ jinde. Určete střední hodnotu, rozptyl a hodnotu distribuční funkce v bodě 1,5.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.42) K ŘEŠENÍ

5.43. Náhodná veličina X má hustotu $3x^2$ na $(0, 1)$ a nulovou jinde. Najděte její distribuční funkci, modus, medián a střední hodnotu.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.43) K ŘEŠENÍ

5.44. Náhodná veličina má hustotu $f(x) = a \sin x$ na $[0, \pi]$ a 0 jinde. Najděte a, distribuční funkci a $\mathrm{P}[X \in (0, \frac{\pi}{4})]$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.44) K ŘEŠENÍ

5.45. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = e^x$, pro $x < 0$ a nulovou jinde. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.45) K ŘEŠENÍ

5.46. Jaká je pravděpodobnost, že po 200 hodinách provozu budou fungovat aspoň 3 výrobky z 5, jestliže jejich životnost v hodinách má $N(180, 400)$? K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.46)

5.47. Najděte p-kvantil Weibullova rozdělení s distribuční funkcí $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(x/\theta)^\beta}$, $x > 0$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.47)

5.48. Vyjádřete p-kvantil rozdělení $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.48)

5.49. Spočtěte $\mathrm{P}[X \in (\mathrm{E}\,X - k\sqrt{\mathrm{var}\,X}, \mathrm{E}\,X + k\sqrt{\mathrm{var}\,X})]$, $k = 1, 2, 3$ pro veličinu X s rozdělením $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\mathrm{Ro}(a, b)$ a $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.49)

5.50. Najděte hustotu veličiny $Y = X^3$, jestliže veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 2)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.50)

5.51. Najděte hustotu veličiny $Y = 1/X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.5.51)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

5.52. Najděte hustotu veličiny $Y = \ln X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.52)

5.53. Najděte hustotu veličiny $Y = -\ln X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.53)

5.54. Najděte hustotu veličiny $Y = X^2$, jestliže veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(-2, 0)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.54)

5.55. Najděte hustotu veličiny $Y = 1/X$, jestliže veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 2)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.55)

5.56. Najděte hustotu veličiny $Y = 5\ln X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr 5.56)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

6. Vztahy mezi náhodnými veličinami

Z definice

6.1. Náhodný vektor (X, Y) má konstantní hustotu na $[1, 2] \times [2, 4]$ a nulovou jinde. Najděte sdruženou a marginální hustoty a distribuční funkce, zjistěte, zda jsou X a Y nezávislé.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.1)

K ŘEŠENÍ

6.2. Jsou veličiny $U = X + Y$, $V = X - Y$, kde X, Y jsou výsledky dvou nezávislých hodů kostkou, nezávislé, resp. nekorelované?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.2)

K ŘEŠENÍ

6.3. Pětkrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že v prvních 3 hodech padla šestka 2×, jestliže ve všech pěti hodech padla 3×? Obecněji: Jaká je $\mathrm{P}[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n]$, jestliže $X_1 \sim \mathrm{Bi}(n_1, p)$ je nezávislá s $X_2 \sim \mathrm{Bi}(n_2, p)$?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.3)

6.4. Máme nezávislé stejně rozdělené veličiny $X_1, \dots, X_n$ s rozdělením s hustotou f a distribuční funkcí F. Najděte distribuční funkci a hustotu jejich maxima a minima.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.4)

K ŘEŠENÍ

V normálním rozdělení

6.5. Měsíční výdaje (v Kč) domácností na určité zboží mají $\mathrm{N}(900, 19\,600)$. Jaká je pravděpodobnost, že a) výdaje jedné, b) průměrné výdaje 5 náhodně vybraných domácností překročí 1000 Kč?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.5)

K ŘEŠENÍ

6.6. Chyba měření má rozdělení $\mathrm{N}(0, 16)$. Kolikrát je nutno měření opakovat, aby se s pravděpodobností alespoň 0,95 aritmetický průměr naměřených hodnot neodchyloval od správné hodnoty o více než ± 1?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.6)

K ŘEŠENÍ

6.7. Poloměr míčku a délka krabice (v mm) mají normální rozdělení se středními hodnotami 29,4 a 237 a se směrodatnými odchylkami 0,2 a 0,8. Čtyři míčky je třeba uložit vedle sebe do krabice. Jaká je pravděpodobnost, že a) se nevejdou, b) zůstane mezera větší než 3 mm.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.7)

K ŘEŠENÍ

6.8. Hmotnost pomerančů v dodávce má $N(170, 144)$ (v gramech). Jaká je pravděpodobnost, že síťka s 8 pomeranči bude vážit více než 1,5 kg?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.8)

K ŘEŠENÍ

Transformace a konvoluce

Z teorie. Pro hustotu transformované veličiny $T(X)$ platí:

Má-li náhodný vektor X hustotu f_X vzhledem k Lebesgueově míře a je-li T zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, regulární a prosté na otevřených disjunktních množinách $G_1, G_2, \ldots$, $P[X \in \bigcup_i G_i] = 1$, potom $T(X)$

má hustotu

$$f_{T(X)}(y) = \sum_{\{i; y \in T(G_i)\}} f_X\left((T|_{G_i})_{-1}(y)\right) \cdot \left|((T|_{G_i})_{-1})'(y)\right|.$$

Pro $f(X_1, \dots, X_n)$, diferencovatelnou funkci *nezávislých* náhodných veličin lze za předpokladu jejich blízkosti ke středním hodnotám (tj. $\sqrt{\operatorname{var} X_i}$ malé) díky Taylorovu rozvoji

$$f(X_1, \dots, X_n) \approx f(\mathrm{E}\,X_1, \dots, \mathrm{E}\,X_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{E}\,X_1, \dots, \mathrm{E}\,X_n) \cdot (X_i - \mathrm{E}\,X_i)$$

psát ***přibližně***

$$\mathrm{E}\,f(X_1, \dots, X_n) \approx f(\mathrm{E}\,X_1, \dots, \mathrm{E}\,X_n),$$

a

$$\operatorname{var} f(X_1, \dots, X_n) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{E}\,X_1, \dots, \mathrm{E}\,X_n)\right)^2 \operatorname{var} X_i.$$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

6.9. Najděte distribuční funkci a hustotu veličiny $Z = X + Y$, jestliže $X \sim \mathrm{Ro}(0,1)$ a $Y \sim \mathrm{Ro}(-1,0)$ jsou nezávislé. Kolik je $\mathrm{E}\,Z$ a $\operatorname{var} Z$?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.9)

K ŘEŠENÍ

6.10. Najděte distribuční funkci a hustotu veličiny $Z = X/Y$, jestliže $X \sim \mathrm{Ro}(0,1)$ a $Y \sim \mathrm{Ro}(-1,0)$ jsou nezávislé.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.10)

K ŘEŠENÍ

6.11. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s $\mathrm{Ro}(\mu_i - \varepsilon_i, \mu_i + \varepsilon_i)$ ($\mu_i > 0$ a ε_i jsou malé). Určete přibližně střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = X_1/X_2$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.6.11)

K ŘEŠENÍ

7. Centrální limitní věta

Obecně

Z teorie. $X_1, X_2, \dots$ nezávislé s $\mathrm{E}\,|X_i|^3 < \infty$. Jestliže

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_i - \mathrm{E}\,X_i|^3}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

potom

$$\mathrm{P}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathrm{E}\,X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{var} X_i}} < x\right] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Tedy pro ***stejně rozdělené nezávislé*** náhodné veličiny s $\mathrm{E}\,|X_i^3| < \infty$ (dle Lindebergovy CLV stačí už konečný rozptyl) centrální limitní věta platí.

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

7.1. Pomocí centrální limitní věty vyjádřete $\mathrm{P}[\sum_{i=1}^{n} X_i < a]$, jestliže $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s rozdělením $\mathrm{N}(1,4)$, resp. $\mathrm{Alt}(1/5)$, $\mathrm{Ro}(0,2)$, $\mathrm{Ro}(-2,2)$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.1)

K ŘEŠENÍ

7.2. Zatížení letadla s 64 místy nemá překročit 6 000 kg. Jaká je pravděpodobnost, že při plném obsazení bude tato hodnota překročena, má-li hmotnost cestujícího střední hodnotu 90 kg a směrodatnou odchylku 10 kg?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.2)

K ŘEŠENÍ

7.3. Počet chyb na jedné straně textu má střední hodnotu 8 a rozptyl 4. Jaká je pravděpodobnost, že na 100 stranách bude méně než 750 chyb?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.3)

K ŘEŠENÍ

7.4. Předpokládejme, že žák má při písemce stejnou šanci dostat kteroukoli ze známek 1–5. Jaká je pravděpodobnost, že průměr známek ve třídě se 40 žáky bude lepší než 2,5?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.4)

7.5. Pan „A“ cestuje do práce a z práce tramvají, která jezdí v intervalu 5 min., přičemž jeho příchod na zastávku je vzhledem k odjezdu tramvaje zcela náhodný. S jakou pravděpodobností pročeká pan „A“ během 20 pracovních dní méně než 120 min.?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.5)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

7.6. Stokrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet dosažených ok bude mezi 320 a 380?.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.6)

Pro alternativní rozdělení

Z teorie. Pro $S_n \sim \mathrm{Bi}(n,p) = \sum \mathrm{Alt}(p)$ (nezávislých) je

$$\mathrm{P}\left[\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right] \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x),$$

přičemž aproximaci použijeme už při var $S_n > 9$.

(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

7.7. Pravděpodobnost, že se anketní lístek vrátí vyplněný, je 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že ze 160 rozeslaných se jich vrátí aspoň 100 vyplněných? Kolik jich je třeba rozeslat, aby se tato pravděpodobnost zvýšila na 0,99?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr.7.7)

7.8. V osudí je 16 bílých a 14 černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že při 150 tazích jedné koule (s vracením) vytáhneme bílou právě 77×?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr.7.8)

7.9. Jaká je pravděpodobnost, že při 100 hodech kostkou padne šestka nejvýše dvacetkrát?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr.7.9)

7.10. S jakou pravděpodobností bude při 100 hodech kostkou relativní četnost padnutí šestky větší než 1/12?
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr.7.10)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

7.11. Nechť $P(A) = 0,4$. Jaká je pravděpodobnost, že relativní četnost výskytu jevu A v 1 500 pokusech bude větší než 0,38? Kolik pokusů je třeba provést, aby s pravděpodobností alespoň 0,99 se relativní četnost výskytu A od jeho pravděpodobnosti nelišila o více než 0,01?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.11)

K ŘEŠENÍ

7.12. V určité oblasti je 3% nemocných malárií. Jaká je pravděpodobnost, že při kontrole 5 000 lidí najdeme $3 \pm 0,5\%$ nemocných malárií?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.12)

K ŘEŠENÍ

Další

7.13. 60× hodíme kostkou. Pomocí CLV určete, jaká je pravděpodobnost, že šestka padne alespoň desetkrát.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.13)

K ŘEŠENÍ

7.14. 200× hodíme mincí. Jaká je pravděpodobnost, že podíl líců bude větší než 0,55?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.14)

7.15. Kolikrát musíme opakovat pokus, aby pravděpodobnost, že jev (vyskytující se při jednom pokusu s pravděpodobností 0,05) nastal alespoň pětkrát, byla větší než 0,8?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.15)

7.16. Kolikrát nejméně musíme hodit kostkou, aby s pravděpodobností 0,995 (nejméně) padla šestka aspoň desetkrát?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.16)

7.17. Jaký je nejmenší počet nezávislých pokusů, aby s pravděpodobností (alespoň) 0,95 nastal při nich sledovaný jev (s pravděpodobností výskytu 0,2 při jednom) alespoň desetkrát?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.7.17)

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

8. Odhady parametrů

Druhy a vlastnosti odhadů

Z teorie. T_n je ***konzistentní*** odhad θ, jestliže

$$T_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta.$$

To nastává např. když $\mathrm{E}\,T_n^2 < \infty$, $\mathrm{E}\,T_n \to \theta$ a $\operatorname{var} T_n \to 0$.

Rao-Cramér:

$$\operatorname{var}(\text{nestranný odhad}) \geqq 1/(nJ(\theta)).$$

Obecněji pro každý odhad s $\mathrm{E}\,T^2 < \infty$, $b(\theta) = \mathrm{E}\,T - \theta$ z výběru z regulárního rozdělení (nosič nezáv. na θ, konečná $f' = \partial f/\partial\theta$, $\int f' \,\mathrm{d}x = 0$, $J(\theta)$ konečná) a při ex. $b'(\theta)$ a $\partial(\int Tf \,\mathrm{d}x)/\partial\theta = \int Tf' \,\mathrm{d}x$

je

$$\mathrm{E}(T-\theta)^2 \geq \frac{(1+b'(\theta))^2}{J(\theta)},$$

kde $J(\theta) = \mathrm{E}(f'/f)^2 \; (= -E((\ln f)'')^2$ když $\int f''\,dx = 0)$. Rovnosti lze dosáhnout pro

$$f(x,\theta) = c(\theta)e^{A(\theta)T(x)}u(x).$$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

V normálním rozdělení

Z teorie. $(1-\alpha)$% intervaly spolehlivosti (intervalové odhady) pro střední hodnotu (při rozptylu známém, neznámém) a rozptyl normálního rozdělení jsou

$$\overline{X}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \quad \overline{X}_n \pm \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \quad \left(\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right),$$

kde

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}.$$

Díky CLV lze intervaly pro normální rozdělení použít i pro odhad střední hodnoty u velkých náhodných výběrů ($n > 30$, resp. $n > 100$ při větších odchylkách od normality) z rozdělení s konečným rozptylem. Je

$$\mathrm{P}\left[\frac{\sum X_i - n\,\mathrm{E}\,X_1}{\sqrt{n \operatorname{var} X_1}} \leq x \right] \to \Phi(x), \quad s_n^2 \to \operatorname{var} X_1 \quad \text{s.j.}$$

a tedy přibližný $(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro $\mathrm{E}\, X_1$ je

$$\overline{X} \pm u_{1-\alpha/2} \frac{s_n}{\sqrt{n}}.$$

Pro větší jistotu lze místo $u_{1-\alpha/2}$ použít $t_{1-\alpha/2}(n-1)$, nicméně $t_p(n) \doteq u_p$ pro $n > 30$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

8.1. Odvoďte maximálně věrohodný odhad pro střední hodnotu normálního rozdělení při známém rozptylu.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.1)

8.2. Odvoďte intervalové odhady střední hodnoty (při rozptylu známém i neznámém) a rozptylu normálního rozdělení.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.2)

8.3. Opakovanými měřeními byla zjištěna tloušťka vlákna: 210, 217, 209, 216, 216, 215, 220, 214, 213 (10^{-6} m). Je známo, že měření mají rozdělení $\mathrm{N}(\mu, 25)$. Nalezněte 95% interval spolehlivosti pro μ.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.3)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

8.4. Deset balíčků mouky pocházejících z balícího stroje mělo hmotnosti v gramech: 987, 1 001, 993, 994, 993, 1 005, 1 007, 999, 995, 1 002. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu a rozptyl hmotnosti (předpokládejte normální rozdělení).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.4)

K ŘEŠENÍ

8.5. Z 12 pozorování doby trvání montážní operace byl zjištěn průměr 44 s a směrodatná odchylka 4 s. Sestrojte 90% interval spolehlivosti pro očekávanou délku operace, jestliže ta má normální rozdělení.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.5)

K ŘEŠENÍ

8.6. U 100 náhodně vybraných výrobků činila průměrná spotřeba materiálu 150 a výběrový rozptyl spotřeby byl 16. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro očekávanou spotřebu na 1 výrobek.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.6)

K ŘEŠENÍ

V alternativním rozdělení

Z teorie. Intervalové odhady pro výběr z Alt(p) lze založit na CLV,

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{X}(1-\overline{X}),$$

čili přibližný interval spolehlivosti pro p je

$$\overline{X} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}} = \overline{X} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\sum X - (\sum X)^2/n}}{n},$$

pro malé np je však lépe aproximovat pomocí Po(np).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

8.7. $X_1, X_2, \ldots X_n$ výběr z Alt(p). Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.7)

8.8. Z 42 náhodně vybraných účastníků sportovního odpoledne bylo 16 dívek a 26 chlapců. Odhadněte podíl dívek mezi účastníky.

K řešení K řešení

(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:8.8)

8.9. Mezi 160 pracovníky (náhodně vybranými z 8 000 pracujících v závodě) 48 cestuje do práce vlakem. Napište bodový odhad a 95% interval spolehlivosti pro podíl a počet zaměstnanců dopravujících se vlakem.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:8.9)

K ŘEŠENÍ

8.10. Byla sledována účinnost léku na snížení tlaku krve. Snížení nastalo u 140 z 225 pacientů. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro (průměrnou) účinnost léku.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:8.10)

K ŘEŠENÍ

8.11. Při 100 nezávislých pokusech byl dvanáctkrát zaznamenán úspěch. Najděte 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost úspěchu.
(2004-09-03:1y6g0kh6j0d2xr:8.11)

K ŘEŠENÍ

V rovnoměrném rozdělení

8.12. $X_1, X_2, \dots X_n$ výběr z $\mathrm{Ro}(0,\theta)$ $(\theta > 0)$. Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ, zjistěte, jestli je nestranný a spočtěte jeho rozptyl. Navrhněte také nestranný odhad pro střední hodnotu a porovnejte ho s $\overline{X}$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.12)

K ŘEŠENÍ

8.13. Najděte $(1-\alpha)\%$ intervalový odhad parametru θ rozdělení $\mathrm{Ro}(0,\theta)$ (jeho meze hledejte ve tvaru $g(\max X_i)$, kde g je rostoucí funkce).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.13)

K ŘEŠENÍ

8.14. Autobus jezdí pravidelně v intervalech délky θ, kterou neznáme. Při náhodných příchodech na zastávku byly zjištěny doby čekání 7, 10, 9, 6, 3, 4, 7, 2, 2, 8 minut. Odhadněte θ.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.14)

K ŘEŠENÍ

Další

8.15. Opakovanými měřeními byla zjištěna teplota vody: 21,0, 21,7, 20,9, 21,6, 21,6, 21,5, 22,0, 21,4, 21,3 ($^\circ$C). Je známo, že měření mají rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Nalezněte 95% interval spolehlivosti pro μ.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.15)

K ŘEŠENÍ

8.16. Určete 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (výšky studentů) na základě náhodného výběru rozsahu 26: 190, 175, 168, 182, 180, 179, 200, 191, 156, 180, 178, 191, 185, 202, 182, 187,5, 166, 182, 178, 177, 176, 182, 185, 175, 182, 185.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.16)

K ŘEŠENÍ

8.17. Při kontrole ze 100 vozidel 24 překročilo rychlost 60 km/h, průměrná rychlost byla 65 km/h, směrodatná odchylka 7 km/h. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro průměrnou rychlost vozidel a pro podíl vozidel překračujících rychlost.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.17)

K ŘEŠENÍ

8.18. Odhadujeme výši úspor novomanželů. Žádáme spolehlivost 95% a maximální chybu 200 Kč. Směrodatná odchylka byla předběžně odhadnuta na 2 500 Kč. Kolika párů se musíme zeptat?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.18)

K ŘEŠENÍ

8.19. Odhadujeme podíl prvotřídních výrobků. Kolik jich je třeba přezkoušet, aby se spolehlivostí 95% chyba nepřekročila $\pm 3\%$? Co když víme, že hledaný podíl bude přes 80%?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.8.19)

K ŘEŠENÍ

9. Testování hypotéz

Z definice

Z teorie. Při testování hypotéz je třeba najít vhodnou statistiku $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ a množinu jejích hodnot, při nichž budeme zamítat hypotézu H_0 proti alternativě H_1 (***kritický obor***) tak, aby pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu

$$p_1 = \mathrm{P}[\text{zam. } H_0 \,|\, H_0 \text{ platí}] \quad \text{a} \quad p_2 = \mathrm{P}[\text{nezam. } H_0 \,|\, H_0 \text{ neplatí}]$$

byly co nejmenší.

Nemožnost společně minimalizovat obě dvě chyby vede ke slabší podmínce minimalizovat p_2 při platnosti $p_1 \leq \alpha$ (***stejnoměrně nejsilnější*** α***-test***), kdy je kontrolována „nepříjemnější" chyba 1. druhu číslem α (např. 5%, 1%, 10%).

V mnoha případech to dopadá tak, že při velkých odchylkách parametru od testované hodnoty má i statistika T velké (resp. malé) hodnoty a hledá se tak jen hranice, od které je její hodnota tak velká, že při platnosti hypotézy H_0 by taková situace nastala jen s danou malou pravděpodobností (menší než α při testu s ***hladinou významnosti*** α).

Pro konkrétní hodnoty parametru z H_1 je možno spočítat p_2 a $1 - p_2$ je ***silofunkce testu*** (ta se hledala co nejvyšší).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

9.1. Uhyne-li více než 1 rostlina z 5 zasazených, rozhodneme, že jde o choulostivý druh s pravděpodobností uhynutí 0,3, jinak že o odolný s 0,1. Určete pravděpodobnosti chyb obou druhů.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.1) K ŘEŠENÍ

9.2. Je možno považovat za znalce člověka, který z 8 předložených druhů vína pozná 5 (anebo ještě více)? (Vi, kterých 8 druhů má poznat, ale neví v jakém pořadí mu budou předloženy.) K ŘEŠENÍ

Verze 2004-09-03

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.2)

9.3. Závod obdržel zásilku 10 000 součástek, v níž by podle smluvy mělo být nejvýše 1% zmetků. Náhodně byl vybrán a zkontrolován vzorek 500 ks. Pro jaký počet zmetků v něm můžeme hypotézu, že v celé zásilce je nejvýše 1% zmetků, zamítnout na hladině významnosti a) 0,05, b) 0,01? Spočtěte pravděpodobnosti chyby 2. druhu za předpokladu, že skutečná zmetkovitost je 2% (resp. 3%).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.3)

K ŘEŠENÍ

O STŘEDNÍ HODNOTĚ A ROZPTYLU

Z teorie. Víme, že při výběru z $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mají za $H_0 : \mu = \mu_0$, resp. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ statistiky

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim t_{n-1},$$

resp.

$$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

$$s^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}.$$

Odchylky skutečného μ od μ_0 (resp. σ^2 od σ_0^2) způsobí výrazně nenulovou hodnotu T (resp. příliš malou či velkou hodnotu χ^2), při uvážení pravděpodobnosti chyby 1. druhu je vhodné zamítat H_0 proti oboustranné alternativě, když

$$|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1),$$

resp.

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \text{ nebo } < \chi^2_{\alpha/2}(n-1),$$

podobně pro jednostranné alternativy.

Obdobně (dle CLV) při testování o střední hodnotě pro jiná rozdělení, např. pro výběr z Alt(p) má při dostatečném rozsahu výběru $n\widehat{p}(1-\widehat{p}) > 9$) za $H_0: p = p_0$ statistika

$$U = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}}\sqrt{n} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

($\widehat{p} = \overline{X}$) a zamítá se proti oboustranné alternativě při $|U| > u_{1-\alpha/2}$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

9.4. Spotřeba téhož auta byla testována u 11 řidičů s výsledky 8,8, 8,9, 9,0, 8,7, 9,3, 9,0, 8,7, 8,8, 9,4, 8,6, 8,9 (l/100 km). Je pravdivá výrobcem udávaná spotřeba 8,8 l/100 km? Můžeme popřít tvrzení, že rozptyl získaných údajů je 0,1?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.4)

K ŘEŠENÍ

9.5. Je dosud aktuální představa o $\sigma_0 = 300$, směrodatné odchylce normálně rozdělené náhodné veličiny, jestliže je zaznamenáno $n = 25$, $\overline{X} = 3118$, $s = 357$?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.5)

9.6. Pro bavlněnou přízi je předepsána horní mez variability pevnosti vlákna: rozptyl pevnosti (která má $N(\mu, \sigma^2)$) nemá překročit $\sigma_0^2 = 0,36$. Při zkoušce 16 vzorků byly zjištěny výsledky 2,22, 3,54, 2,37, 1,66, 4,74, 4,82, 3,21, 5,44, 3,23, 4,79, 4,85, 4,05, 3,48, 3,89, 4,90, 5,37. Je důvod k podezření na vyšší nestejnoměrnost než je stanoveno?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.6)

K ŘEŠENÍ

9.7. Určete silofunkci testu hypotézy H_0: $\mu = \mu_0$ proti H_1: $\mu \neq \mu_0$ při výběru z $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 známý.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.7)

K ŘEŠENÍ

9.8. Je padnutí 22 líců při 40 hodech mincí důkazem její nevyváženosti? Od jakého rozsahu výběru je 55% líců již významný výsledek?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.8)

K ŘEŠENÍ

Dvě veličiny

Z teorie. Pro porovnání středních hodnot ve výběru z dvojrozměrného normálního rozdělení, tj. rozdíl *dvojic*

$$Z_i = X_i - Y_i \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2),$$

používá ***párový t-test*** statistiku

$$T = \frac{\overline{Z} - \delta_0}{s_Z}\sqrt{n} \sim t_{n-1} \qquad \text{za } H_0\text{: } \mu_1 - \mu_2 = \delta_0.$$

Pro porovnání středních hodnot ve 2 *nezávislých* výběrech rozsahů n_1 a n_2 z $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ a $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ (nenormalitu a nestejnost rozptylů možno opominout, ne však nezávislost!) používá ***dvouvýběrový (nepárový) t-test*** statistiku

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \sim t_{n_1+n_2-2} \qquad \text{za } H_0\text{: } \mu_1 - \mu_2 = \delta_0.$$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

9.9. U 6 aut bylo zjištěno ojetí předních pneumatik (v mm).

1,8	1,0	2,2	0,9	1,5	1,6
1,5	1,1	2,0	1,1	1,4	1,4

Ojíždějí se levá a pravá pneumatika stejně?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.9)

K ŘEŠENÍ

9.10. Denní přírůstky váhy selat byly při krmení směsí A 62, 54, 55, 60, 53, 58, u směsi B 52, 56, 50, 49, 51. Je mezi nimi rozdíl?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.10)

K ŘEŠENÍ

χ^2 TEST DOBRÉ SHODY

Z teorie. Má-li $\mathbf{X} \sim \text{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_k)$, potom

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i^2}{np_i} - n \xrightarrow[\mathcal{D}]{n\to\infty} \chi^2_{k-1},$$

a proti H_0: správné parametry jsou $p_1, \ldots, p_k$ svědčí vysoké hodnoty χ^2.

Aproximace je přijatelná pro $np_i > 5 \forall_i$ (popř. při $k \geq 3$ $np_i \geq 5q$, kde q je podíl tříd s $np_i < 5$).

Při ***modifikované metodě minimálního*** χ^2 se za $p_i = p_i(a)$ dosadí to $\hat{a}$, které je řešením rovnic

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{X_i}{p_i(a)} \frac{\partial p_i(a)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

a statistika

$$\chi^2 \sim \chi^2_{k-1-m}.$$

Např. test nezávislosti v ***kontingenční tabulce***: Jsou-li Y, Z nezávislé, pak

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}} = n \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}} - $$
$$- n \xrightarrow[\mathcal{D}]{n\to\infty} \chi^2_{(r-1)(c-1)},$$

spec. pro tabulku 2×2

$$\chi^2 = \frac{(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2 n}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}}.$$

Asymptotické rozdělení lze použít jako dobrou *aproximaci* skutečného, *jestliže*

$$\frac{n_{i.}n_{.j}}{n} > 5 \quad \forall_{i,j},$$

jinak je třeba slučovat buňky.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

9.11. V roce 1970 se narodilo 117 137 chlapců a 111 394 děvčat. Jsou pravděpodobnosti narození chlapce a děvčete stejné?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.11)

9.12. 200 lidí uvedlo, jakou číslici mají nejraději:

Číslice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Počet	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Lze tvrdit, že žádné číslici není dávána přednost?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.12)

9.13. V závodě byly vyzkoušeny dva technologické postupy. Je rozdíl mezi nimi z hlediska počtu nekvalitních výrobků statisticky významný, jestliže daly 950 a 485 (resp. 50 a 15) kvalitních (resp. nekvalitních) výrobků?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.13)

9.14. Byla zjišťována souvislost mezi hladinou alkoholu v krvi (nízká, střední, vysoká) a rychlostí reakce (dobrá, špatná) u 100 náhodně vybraných lidí. Existuje souvislost?

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

	dobrá	špatná	
nízká	53	12	65
střední	5	15	20
vysoká	2	13	15
	60	40	100

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.14)

K ŘEŠENÍ

9.15. Na základě údajů o 100 žácích rozhodněte, zda je souvislost mezi známkou z chování (v řádcích) a z matematiky (ve sloupcích).

	1	2	≥3	
1	28	34	18	80
≥2	2	6	12	20
	30	40	30	100

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.15)

K ŘEŠENÍ

9.16. Lze z údajů o 91 059 manželstvích uzavřených v roce 1957 prokázat závislost mezi stavem ženicha a stavem nevěsty při vstupu do manželství?

	svob-á	ovd-á	rozv-á	
svob-ý	75 564	824	3 463	79 851
ovdov-ý	1 370	904	798	3 072
rozv-ý	4 603	590	2 943	8 136
	81 537	2 318	7 204	91 059

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.16)

9.17. V tabulce $\begin{matrix} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}$ je na místě ij počet žáků se známkou z matematiky i a z angličtiny j. Jsou známky z těchto předmětů nezávislé?

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.17)

Další

9.18. Zácvik laboranta je úspěšný, pokud dosahuje směrodatné odchylky menší než 0,14. Jaký závěr učiníte z měření 6,42, 6,44 6,38, 6,60, 6,50, 6,51?

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.18)

9.19. Potvrzuje náhodný výběr rozsahu 240 s $\overline{X} = 9720$ a $s = 2300$, že průměrný příjem je 10 000 Kč?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.19)

9.20. Výrobce předpokládal, že bude reklamováno 15% výrobků. Je tomu tak, jestliže z 900 výrobků bylo reklamováno 150?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.20)

9.21. Starosta obdržel při posledních volbách 60% hlasů. Bude stejně úspěšný i při příštích, když ze 100 náhodně vybraných občanů je pro něj 48?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.21)

9.22. Při 200 hodech mincí byl rub zaznamenán 90krát. Je důvod se domnívat, že rub nepadá stejně často jako líc?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.22)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

9.23. U 100 neošetřených postřikem byla zaznamenána prvotřídní kvalita plodů v 58 případech, u 200 ošetřených ve 134 případech. Má postřik nějaký vliv na kvalitu plodů?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.23)

9.24. Mezi 60 americkými studenty bylo zjištěno, že marihuanu kouří (resp. nekouří) 15 (resp. 20) mužů a 8 (resp. 17) žen. Lze prokázat souvislost mezi a kouřením marihuany pohlavím respondentů?
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.24)

9.25. U 31 pacientů trpících chorobou bylo zjišťováno, zda byli očkováni a jaký průběh choroba má. Závisí průběh choroby na tom, zda byl pacient očkován?

	lehký	těžký	
očk	11	3	14
neočk	5	12	17
	16	15	31

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.25)

K ŘEŠENÍ

K ŘEŠENÍ

K ŘEŠENÍ

Strana 122

Verze 2004-09-03

9.26. Je souvislost mezi barvou očí u syna a u otce? (1 000 údajů o kombinacích barev modrá, zelená – šedá, tmavě šedá – světle hnědá, hnědá.)

	M	Z-Š	tŠ-sH	H	
Syn: M	194	70	41	30	335
Z-Š	83	124	41	36	284
tŠ-sH	25	34	55	23	137
H	56	36	43	109	244
	358	264	180	198	1 000

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.9.26)

K ŘEŠENÍ

10. Korelace a regrese

KORELACE

Z teorie. Pro test nulovosti ***korelačního koeficientu*** ϱ lze při výběru výběru z regulárního N_2 využít za H_0: $\varrho = 0$

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \sim t_{n-2},$$

kde ***výběrový korelační koeficient***

$$r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}},$$

a ***výběrová kovariance***

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \frac{1}{n-1}(\sum X_i Y_i - n\overline{XY}).$$

Pro testování jiných hodnot ϱ lze už od $n = 10$ (resp. při malém ϱ už od $n = 6$) používat *aproximaci*

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \dot\sim \mathrm{N}(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\varrho}{1-\varrho}, \frac{1}{n-3}),$$

tj. za H_0: $\varrho = \varrho_0$ je

$$U = (Z - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varrho_0}{1-\varrho_0}) \sqrt{n-3} \dot\sim \mathrm{N}(0,1).$$

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

10.1. Zjistěte, zda jsou nezávislá měření provedená 2 pracovníky, jestliže naměřili hodnoty (předpokládáme výběr z N_2)

U_i	0,16	0,49	0,47	0,55	0,46	0,48	0,60	0,45	0,45
V_i	0,30	0,49	0,50	0,48	0,59	0,60	0,69	0,40	0,54

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.1)

K ŘEŠENÍ

LINEÁRNÍ REGRESE

Z teorie. V modelu

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\boldsymbol{\beta}_{k\times 1} + \mathbf{e}_{n\times 1},$$

kde

$$\mathrm{E}\,\mathbf{e} = 0, \quad \mathrm{var}\,\mathbf{e} = \sigma^2\mathbf{I}, \quad \mathrm{h}(X) = k < n,$$

je ***odhadem metodou nejmenších čtverců***

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Reziduální součet čtverců

$$S_e = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Při *normálních* chybách

$$\mathbf{e} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

je ($s^2 = S_e/(n-k)$)

$$T_i = \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{s^2 v_{ii}}} \sim t_{n-k}, \qquad \frac{s^2(n-k)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$$

$$F = \frac{1}{qs^2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{q}})'[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}{}_{\mathbf{qq}}]^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{q}}) \sim F_{q,n-k}$$

$$T = \frac{\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{s^2\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim t_{n-k}.$$

(Testy odpovídají testování různých obyčejných, či např. parciálních korelačních koeficientů.)

Pomocí ***koeficientu determinace***

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{S_T} = \frac{[(\mathbf{Y}-\overline{Y})'(\widehat{\mathbf{Y}}-\overline{Y})]^2}{\|\mathbf{Y}-\overline{Y}\|^2\|\widehat{\mathbf{Y}}-\overline{Y}\|^2} = \frac{\widehat{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2}$$

lze testovat

H_0 : jen absolutní člen nenulový,

za níž má

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{k-1} \sim F_{k-1,n-k}$$

(ekvivalentní s testem pomocí F s příslušným $\mathbf{q}$).
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.Teo)

10.2. Odvoďte metodou nejmenších čtverců vzorce pro odhady parametrů při lineární regresi.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.2)

K ŘEŠENÍ

10.3. Metodou nejmenších čtverců odhadněte parametry při regresi přímkou procházející počátkem.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.3)

K ŘEŠENÍ

10.4. Metodou nejmenších čtverců odhadněte parametry při regresi křivkou $ax + b + c/x$.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.4)

K ŘEŠENÍ

10.5. Metodou nejmenších čtverců odhadněte parametry při kvadratické regresi.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.5)

10.6. V surovém železe byly při 11 teplotách, 1 300, 1 320, . . . , 1 500, naměřeny procentní obsahy křemíku 0,30, 0,29, 0,35, 0,28, 0,38, 0,42, 0,47, 0,51, 0,62, 0,68, 0,70. Odhadněte parametry předpokládané lineární závislosti a zjistěte, zda obsah na teplotě závisí.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.6)

10.7. Byly zjištěny koncentrace kyseliny mléčné v krvi matek (x_i) a novorozenců (Y_i):

x_i	40	64	34	15	57	45
Y_i	33	46	23	12	56	40

Určete parametry předpokládané lineární závislosti Y_i na x_i.
(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.7)

K ŘEŠENÍ

K ŘEŠENÍ

K ŘEŠENÍ

10.8. Ověřte kvadratickou závislost spotřeby na rychlosti, jestliže při rychlosti 40, 50,…,100 km/h bylo naměřeno 6,1, 5,8, 6,0, 6,5, 6,8, 8,1, 101/100km.

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.8)

K ŘEŠENÍ

10.9. Byly sledovány výdaje rodin za potraviny a nápoje (Y_i) v závislosti na počtu členů domácnosti (x_i) a čistém příjmu (z_i) (v 1 000 Kč). Prozkoumejte závislost.

Y_i	4	3	4	1	6	4	5
x_i	4	2	4	1	5	3	4
z_i	10	8	12	3	15	12	13

(2004-09-03.1y6g0kh6j0d2xr.10.9)

K ŘEŠENÍ