M4140 Vybrané partie z matematické analýzy

Přírodovědecká fakulta MU

jaro 2010

Rozsah 4/2/0. 6 kr. Ukončení: zk.

1) Obyčejné diferenciální rovnice:

1.1. Úvod – základní pojmy, přímé metody řešení některých rovnic 1.řádu
1.2. Lineární systémy
1.3. Lineární rovnice n-tého řádu
1.4. Nelineární systémy - Cauchyova úloha, existence, jednoznačnost a spojitá závislost na změnách počátečních podmínek a parametrů
1.5. Autonomní systémy
1.6. Stabilita
1.7. Lineární rovnice 2. řádu.

2) Základy analýzy v komplexním oboru:

2.1. Komplexní čísla a funkce
2.2. Limita a spojitost
2.3. Posloupností a řady
2.4. Elementární funkce
2.5. Derivace a holomorní funkce
2.6. Křivkový integrál a Cauchyho věta
2.7. Vlastnosti holomorfních funkce a Taylorova řada
2.8. Laurentova řada, izolované singularity a teorie residuí

3) Základy lineární funkcionální analýzy:

3.1. Prostory se skalárním součinem
3.2. Fourierovy řady
3.3. Lineární ohraničené operátory,
3.4. Kompaktní operátory.

Okruhy otázek ke zkoušce:

1. Obyčejné diferenciální rovnice:

1.1 Úvod – základní pojmy, přímé metody řešení některých rovnic 1.řádu - rovnice se separovanými proměnnými, homogenní, lineární /homogenní a homogenní, metoda variace konstanty/, exaktní diferenciální rovnice

1.2 Lineární systémy – Gronwallovo lemma, věta o existenci a jednoznačnosti (Pikardova metoda postupných aproximací), homogenní systém (lin. nezávislost, dimenze prostoru řešení, fundamentální systém, Jacobiho vzorec, věta o řešení ve tvaru řady, nehomogenní systém, metoda variace konstant, systém s konstantními koeficienty

1.3 Lineární rovnice n-tého řádu – a její vztah k lineárním systémům, věta o jednoznačné existenci na intervalu, homogenní rovnice, wronskián, lin.nezávislá řešení, nehomogenní rovnice, obecné řešení, rovnice s konstantními koeficienty

1.4 Nelineární systémy - Cauchyova úloha, lokální a globální vlastnosti řešení, Banachova věta o pevném bodu a věta Pikardova-Lindelofova, (další věty o existenci a jednoznačnosti, závislost řešení na poč. podmínkách a parametrech

1.5 Autonomní systémy – věta o množině řešení, vzájemné poloze trajektorií, klasifikace trajektorií (sing. body, cykly, samy sebe neprotínající trajektorie), typy sing. bodů (střed, ohnisko, uzel) , v rovině – kriterium /determinant, diskriminant, stopa/, sing. body nelineárních autonomních systémů (n=2) – věta o kvazilineárním systému

1.6 Stabilita – Ljapunovská stabilita /lin. systém/, stejnoměrná stabilita /lin. a kvazilin. systém/, asymptotická stabilita /lin. systém, kořeny charakteristické rovnice, Hurwitzovo kriterium, kvazilin. systém/, exponenciální stabilita /lin. a kvazilin. systém/, přímá Ljapunovova metoda – ljapunovská funkce, věta o stejnom. stabilitě triv. řešení autonomního systému

1.7 Lineární rovnice 2. řádu – Borůvkova teorie…

2. Základy analýzy v komplexním oboru:

2.1 Komplexní čísla a funkce - algebr. a goniometr. tvar k.čísla, geometrické interpretace a vzájemné vztahy, pravidla pro počítání s komplex.čísly, stereografická projekce

2.2 Limita a spojitost - okolí bodu, konvergence posloupností, úplnost, topologické charakteristiky v rovině a sféře, nekonečno, komplexní funkce komplexní proměnné a její složky /v alg. i goniom. tvaru/, limita, spojitost /Cauchy, Heine/, pravidla pro počítání, věty o spojitém obrazu kompaktní a souvislé množiny, elementární funkce v k.oboru 1. /polynom, rac.lomená funkce, Arg z a arg z/

2.3 Řady v komplexním oboru - posloupnost část. součtů, konv. a div., Cauchy-Bolzanovo kriterium, nutná podmínka, abs. a relat. konvergence a postačující podmínky, role reál. a imag. složky, posloupnosti a řady funkcí - bodová a stejnoměrná konvergence, C-B podmínka, Weierstrasseovo krit., mocninné řady v komplex.oboru a jejich vlastnosti – poloměr konvergence a Cauchy-Hadamardova věta, vlastnosti, 2.Abelova věta

2.4 Elementární funkce 2. - Arg z a arg z, lineární, lin.lomená, exp. funkce a Eulerův vzorec, sin, cos, tg a cotg a jejich vlastnosti, Ln a ln, obecná mocnina – jednoznačnost a mnohoznačnost, společné a odlišné vlastnosti s takovými funkcemi v R

2.5 Derivace a holomorní funkce – derivace funkce v bodě, C-R podmínky a jejich důsledky /rekonstrukce komplex.funkce/, holomorfní funkce, věta o derivaci mocninné řady, derivace a holomorfnost elementárních funkcí, celé funkce, holom. v nekonečnu

2.6 Křivkový integrál a Cauchyho věta – křivkový integrál a jeho základní vlastnosti, C- věta pro holomorfní funkci a jednoduchou uzavřenou křivklu, C-vzorec, důsledky

2.7 Vlastnosti holomorfních funkce a Taylorova řada – věta o diferencovatelnosti holomorfní funkce, důsledek o polynomu, základní věta algebry, další důsledky C-věty

2.8 Laurentova řada, izolované singularity a teorie residuí – L- řada a její obor konvergence, klasifikace singularit /podle tvaru L-řady, tvrzení o vlastnostech funkce a limit v okolí singularity, integrál přes oblast obsahující singularitu a jeho výpočet, reziduum a jeho výpočet, věta o reziduích její aplikace

3. Základy lineární funkcionální analýzy:

3.1 Prostory se skalárním součinem (lineární vektorový prostor, lineární nezávislost, lineární obal, báze, normovaný prostor, konvergence a cauchyovskost, úplnost, pravidla pro počítání limit posloupností a spojitost normy, prostory se skalárním součinem, Schwarzova nerovnost, indukovaná norma, spojitost sk.součinu, ortogonalita a ortonormalita, Besselova nerovnost, hustá podmnožina a separabilita, Riesz-Fischerova věta a Fourierovy koeficienty, věta o projekci a její důsledky, Parcevalova identita, Gramm-Smithův ortogonalizační proces, Gilbertův prostor)

3.2 Fourierovy řady (prostor L2… a v něm funkce exp(inx) – jejich ortogonalita, ortonormální systém a F-koeficienty, F-koeficienty v reálném oboru, amplitudově fázový tvar F-řady, věta o konvergenci F-řady, Gibbsonův jev)

3.3 Lineární operátory (lineární operátor v lineárním prostoru, jeho spojitost v metrickém prostoru, lineární operátor v normovaném prostoru, lineární prostor a okruh lineárních operátorů, pravý a levý inverzní operátor, inverzní operátor a věta o jeho existenci, ohraničený operátor a věta o sp. a ohr., věta o spojitosti lin.operátoru v konečně dimenzionálním B-prostoru, norma operátoru a věty o úplnosti prostoru lin. operátorů a normě součinu operátorů, věta o existenci inverzního operátoru a konvergenci Neumannovy řady, Fredholmovost)

3.4 Kompaktní operátory (kompaktní operátor, věta o konečnědimenzionálních množinách nulových bodů mocnin operátoru a její důsledky)

Literatura

Ráb, Miloš *Diferenciální rovnice*

1. vyd. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980. 196 s.

Ráb, Miloš - Kalas, Josef *Obyčejné diferenciální rovnice*

1. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 1995, 207 s. ISBN 80-210-1130-0.
2. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 2001, 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

Novák,Vítězslav *Analýza v komplexním oboru*

1.vyd. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1984,103 s.

Kalas, Josef *Analýza v komplexním oboru.*

1. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 2006. 202 s. ISBN 80-210-4045-9.

…..

OBSAH

Obsah