

Lineární proces vzniku a zániku

Definice: Lineární proces vzniku a zániku je HMR se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (0, 1, 0, \dots)$ a matici

intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(2\lambda + 2\mu) & 2\lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Konstanty $\lambda > 0, \mu > 0$ se

nazývají intenzity vzniku resp. zániku.

Vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku (pro $\lambda \neq \mu$):

a) Je-li k_0 rozsah souboru v čase 0, pak pro střední hodnotu a rozptyl rozsahu souboru

$$\text{v čase } t \text{ platí: } E(X_t) = k_0 e^{(\lambda - \mu)t}, \quad D(X_t) = k_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda - \mu)t} [e^{(\lambda - \mu)t} - 1].$$

b) Pravděpodobnost zániku souboru v čase t je dána vztahem $p_0(t) = \mu \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}$.

Úkol:

Napište v MATLABu funkci, která bude ilustrovat vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku.

Vstupní parametry:

lambda – intenzita vzniku

mi – intenzita zániku

tau – konečný čas

k0 – rozsah souboru v čase $t = 0$

Výstupní parametry:

M – vektor středních hodnot v čase $t = 0$ až tau

S – vektor směrodatných odchylek v čase $t = 0$ až tau

P – vektor pravděpodobností zániku souboru v čase $t = 0$ až tau

Funkce bude graficky znázorňovat závislost parametrů M, S, P na čase $t = 0$ až tau.

Návod:

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
```

```
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku
```

```
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zániku
```

```
% tau je konečný čas, k0 rozsah souboru v čase t=0
```

```
% M je vektor středních hodnot rozsahu souboru v čase t=0 až tau
```

```
% S je vektor směrodatných odchylek rozsahu souboru v čase t=0 až tau
```

```
% P je pravděpodobnost zániku souboru v čase t=0 až tau
```

```
t=[0:tau]';
```

```
M=k0*exp((lambda-mi).*t);
```

```
S=sqrt(k0*((lambda+mi)/(lambda-mi))*exp((lambda-mi).*t).*(exp((lambda-mi).*t)-1));
```

```
P=mi*((1-exp((lambda-mi).*t))./(mi-lambda*exp((lambda-mi).*t)));
```

```
plot(t,M)
```

```
figure
```

```
plot(t,S)
```

```
figure
```

```
plot(t,P)
```

Praktická aplikace:

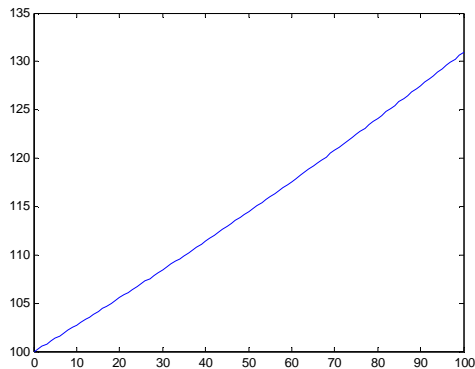
Nechť je dán lineární proces vzniku a zániku, v němž intenzita vzniku odpovídá roční míře porodnosti v ČSSR v r. 1983 ($\lambda = 0,0148$) a intenzita zániku odpovídá roční míře úmrtnosti v ČSSR v r. 1983 ($\mu = 0,0121$). Předpokládáme, že v čase $t = 0$ má soubor rozsah $k_0 = 100$.

a) Pro $t = 0, 1, 2, \dots, 100$ vypočtete a graficky znázorníte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru.

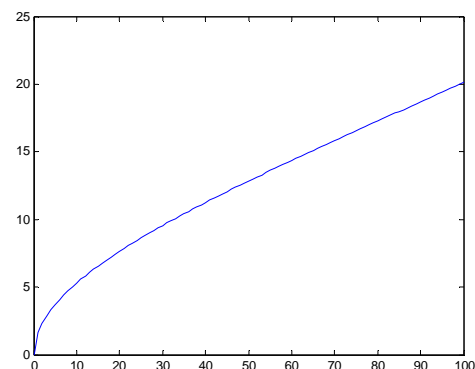
b) Pro $t = 0, 1, 2, \dots, 100$ vypočtete a graficky znázorníte pravděpodobnost vyhynutí.

Výsledek:

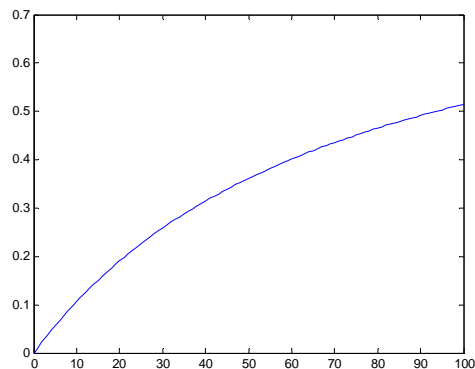
Graf závislosti střední hodnoty rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti směrodatné odchylky rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti pravděpodobnosti vyhynutí na čase



Modifikace: V roce 2009 byla roční míra porodnosti v ČR 8,83 promile, úmrtnosti 10,74 promile. Provedte úkoly (a), (b) s těmito parametry.

Příklad k samostatnému řešení:

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s parametry $\lambda = \frac{1}{100}$, $\mu = \frac{1}{1000}$.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že proces zanikne v čase $t = 100$?
- b) Jaká je limitní pravděpodobnost zániku?
- c) Předpokládejme, že v čase $t = 0$ má soubor 20 objektů. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka rozsahu souboru v čase $t = 100$?

Výsledky: ad a) 0,0619, ad b) 0,1, ad c) 49,1921 a 9,3679.