Erlangův proces

Definice: Erlangův proces je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …, m}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …, 0) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda+(m-1)\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}.$$

Věta: Stacionární rozložení Erlangova procesu je dáno vzorcem:

$$a_j = \frac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}, \text{ j = 0, 1, …, m}$$

Úkol:
Napište v MATLABu funkci, která bude počítat stacionární rozložení Erlangova procesu.
Vstupní parametry:
m … nejvyšší pořadové číslo v množině stavů J = {0, 1, …, m}
lambda … intenzita vstupu
mi … intenzita výstupu
Výstupní parametr:
vektor **a** … stacionární vektor

Návod:
```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% Stacionarni rozlozeni Erlangova procesu
a0=1/sum(((lambda/mi).^(0:m)).*(1./(factorial(0:m))));
a=((lambda/mi).^(1:m)).*(1./(factorial(1:m)))*a0;
a=[a0 a];
```

Příklad 1.: Benzínová stanice má dvě čerpadla. U každého čerpadla může čerpat benzín jenom jedno auto. Když jsou obě čerpadla obsazena, další přijíždějící auta nečekají a odjíždějí. Průměrná doba čerpání benzínu je 2 min a průměrně přijíždí 40 aut za 1 h.

a) Kolik procent doby bude benzínová stanice nevyužitá?
b) S jakou pravděpodobností nebude přijíždějící auto obslouženo?
c) Jaká je střední hodnota počtu obsazených čerpadel?

Řešení: Zavedeme Erlangův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t je počet obsazených čerpadel v okamžiku t, X_t = 0, 1, 2. Dále $\lambda = 40, \mu = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30, m = 2$.

ad a) $a_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \dfrac{1}{1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}} = \dfrac{9}{29} = 0{,}31$

Benzínová stanice je nevyužitá asi po 31% doby.

ad b) $a_2 = \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{9}{29} = \dfrac{8}{29} = 0{,}28$

Přijíždějící auto nebude obslouženo s pravděpodobností asi 28%.

ad c) Abychom stanovili střední hodnotu počtu obsazených čerpadel, musíme ještě vypočítat složku a_1 stacionárního vektoru **a**.

$a_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} a_0 = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{29} = \dfrac{12}{29}$

Střední hodnota = $0\cdot a_0 + 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 = \dfrac{12}{29} + 2\cdot\dfrac{8}{29} = 0{,}97$

Příklad 2.: Vstupní kontrola do zábavního parku je prováděna třemi stejně zdatnými pracovníky ochranky. Návštěvník je kontrolován v případě, že některý z pracovníků ochranky je volný, jinak prochází bez kontroly. Předpokládejme, že všichni tři pracovníci dohromady zvládnou zkontrolovat během hodiny 9 návštěvníků. Dále předpokládejme, že návštěvníci chodí jednotlivě a během hodiny přijdou v průměru 4. Vypočtěte pravděpodobnost, že návštěvník vstoupí do parku bez kontroly.

Řešení: Zavedeme Erlangův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t je počet těch pracovníků ochranky, kteří v okamžiku t provádějí kontrolu, X_t = 0, 1, 2, 3. Dále $\lambda = 4, \mu = 9, m = 3$.

$$a_3 = \dfrac{\frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \ldots = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{64}{729}\cdot\dfrac{2187}{3407} = 0{,}0094$$

S pravděpodobností asi 0,9% nebude návštěvník při vstupu do parku kontrolován.

Příklad k samostatnému řešení: Kolik linek by minimálně měla mít telefonní ústředna, aby pravděpodobnost, že telefonní účastník zastihne všechny linky obsazené, byla nanejvýš $\dfrac{1}{2}$?

Přitom za 1 min se vyskytne průměrně 5 požadavků na zprostředkování hovoru a jeden hovor trvá v průměru 2 min.

Návod: Zavedeme Erlangův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t je počet obsazených linek v okamžiku t, X_t = 0, 1, …, m. Dále $\lambda = 5, \mu = \dfrac{1}{2}$. Hledáme m tak, aby $a_m \leq \dfrac{1}{2}$.

Minimální počet linek je 6, neboť pro m = 1 je $a_1 = 0{,}\overline{9}$, pro m = 2 je $a_2 = 0{,}8197$, pro m = 3 je $a_3 = 0{,}7321$, pro m = 4 je $a_4 = 0{,}6447$, pro m = 5 je $a_5 = 0{,}564$, pro m = 6 je $a_6 = 0{,}4845$.