Optimalizační úlohy v systémech hromadné obsluhy

Optimalizace systému M/M/1/∞/FIFO

Hledáme μ tak, aby funkce nákladů a ztrát $F(\mu) = c_1\mu + c_2 \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$ nabývala svého minima:

$\mu = \lambda + \sqrt{\dfrac{c_2}{c_1}\lambda}$, kde c_1 jsou náklady na obsluhu jednoho požadavku a c_2 jsou náklady na údržbu prázdného systému.

Příklad 1.: Sledujeme činnost výdejny nářadí ve strojírenském závodě. Náklady na obsluhu jednoho požadavku činí 2 Kč, ztráty z prostoje jednoho požadavku jsou 10 Kč/h. Průměrně má výdejna 8 požadavků za 1 h. Najděte

a) optimální intenzitu obsluhy
b) hodnotu funkce nákladů a ztrát pro tuto optimální intenzitu obsluhy.

Řešení:

ad a) $\lambda = 8, c_1 = 2, c_2 = 10, \mu = \lambda + \sqrt{\dfrac{c_2}{c_1}\lambda} = 8 + \sqrt{\dfrac{10}{c2}8} = 8 + 2\sqrt{10} = 14{,}32$

Výdejna tedy musí obsloužit průměrně 14,32 požadavku za 1 h provozu.

ad b) $F(\mu) = c_1\mu + c_2 \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = 2 \cdot 14{,}32 + 10 \cdot \dfrac{8}{14{,}32 - 8} = 41{,}30$

Celkové náklady a ztráty za 1 h provozu výdejny činí 41,30 Kč.

Návod na řešení v MATLABu:

```
lambda=8;c1=2;c2=10;
[mi,F]=opt_neomezeny_1(lambda,c1,c2)
```

Dostaneme:

mi=14,3246
Fi=41,2982

Optimalizace systému M/M/n/∞/FIFO

Hledáme počet linek n tak, aby kriteriální funkce $C(n) = c_1E(N_Q) + c_2[n - E(N_S)]$ nabývala svého maxima, přičemž c_1 jsou náklady na čekajícího zákazníka a c_2 jsou náklady na nevyužitou linku obsluhy.

Příklad 2.: V nově otevřené pobočce České spořitelny bylo rozhodnuto rezervovat pro operace se sporožirovým účtem 3 přepážky. Klienti pro tyto operace, kteří do pobočky přicházejí, se řadí do jedné fronty a po uvolnění libovolné z přepážek mohou být obsluhováni. Po otevření pobočky bylo zjištěno, že klienti přicházejí s průměrnou intenzitou 68 osob za 1 h s tím, že intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba potřebná k obsloužení jednoho zákazníka je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 min 24 s. Za předpokladu, že náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h jsou 120 Kč a náklady na provoz jedné přepážky za 1 h jsou 300 Kč, najděte optimální počet přepážek.

Řešení:

$\lambda = 68, \mu = \frac{60}{2,4} = 25, \beta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{68}{25} = 2,72, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{2,7}{n}(<1), c_1 = 120, c_2 = 300$

n=3: $\rho = \frac{2,72}{3} = 0,90\overline{6}, a_0 = 0,0231, a_3 = 0,0774, E(N_Q) = 8,0638, E(N_S) = 2,72$

$C(3) = 120 \cdot 8,0638 + 300(3 - 2,72) = 1050,2$

n=4: $\rho = \frac{2,72}{4} = 0,68, a_0 = 0,0559, a_4 = 0,1274, E(N_Q) = 0,8461, E(N_S) = 2,72$

$C(4) = 120 \cdot 0,8461 + 300(4 - 2,72) = 485,53$

n=5: $\rho = \frac{2,72}{3} = 0,544, a_0 = 0,0231, a_5 = 0,0787, E(N_Q) = 0,2058, E(N_S) = 2,72$

$C(3) = 120 \cdot 0,2058 + 300(5 - 2,72) = 708,69$

Optimální jsou 4 přepážky.

Návod na řešení v MATLABu:

n=3;lambda=68;mi=25;c1=120;c2=300;
C=opt_neomezeny_n(n,lambda,mi,c1,c2)
Dostaneme C = 1050,2
Dále:
n=4;
C=opt_neomezeny_n(n,lambda,mi,c1,c2)
Dostaneme C = 485,5302
Dále:
n=5;
C=opt_neomezeny_n(n,lambda,mi,c1,c2)
Dostaneme C = 708,6919
Odtud vidíme, že optimální jsou 4 přepážky.

Příklad 3.: Pro zadání příkladu 2 vypočtěte, jak by se musely snížit náklady c_1 na pobyt klienta v pobočce, aby byl optimální původně uvažovaný systém se třemi přepážkami.

Řešení: c_1 vypočteme z nerovnice $C(3) < C(4)$, tj.

$c_1 \cdot 8,0638 + 300(3 - 2,72) < c_1 \cdot 0,8461 + 300(4 - 2,72)$

$7,2177 c_1 < 300 \Rightarrow c_1 < \frac{300}{7,2177} = 41,56$

Náklady na pobyt jednoho klienta v pobočce po dobu 1 h by se musely snížit pod 41,56 Kč.