Department of Mathematics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava

4th International Conference
APLIMAT 2005

LIMITNÍ CYKLUS V MODELU REKLAMY

PRAŽÁK Pavel, (CZ)

Abstrakt. V článku je popsán spojitý model pro intenzitu opakovaného prodeje jistého typu zboží, který je ovlivněn propagací značky výrobce.
Uvažujeme firmu, která vyrábí a na trhu prodává výrobek označený její značkou. Podobný výrobek vyrábějí i jiné firmy a prodávají je pod svými značkami. To, zda si vybraná firma udrží svůj podíl na trhu závisí na kvalitě nabízeného výrobku, která ovlivňuje jeho oblíbenost a také na firemní propagaci daného výrobku a značky.
Zde se předpokládá, že výrobce provádí takovou reklamu, jejíž intenzita je přímo úměrná objemu prodaného zboží.

LIMIT CYCLES IN AN ADVERTISING MODEL

Abstract. We describe a continuous model of repeated sales of a certain type of goods. The model is enriched by including an effect of an advertising strategy of the producer. We assume that the firm of the producer sells and advertises its product (signed by a producer's mark) on a market where similar products of various producers are available. Here we assume that the producer advertises in such a way that the intensity of advertising expenditure is proportional to the amount of sold goods.

1 Popis modelu

Při formulaci modelu budeme vycházet z cvičení 25.4 knihy [3] a článku [2]. Označme $N_1 = N_1(t)$ počet potenciálních kupců vybrané značky. To jsou všichni, kteří v čase $t \in [0, \infty)$ uvažovanou značku nepoužívají, ale jsou účastníky trhu. Dále označme $N_2 = N_2(t)$ počet uživatelů značky v čase t. Implicitně budeme předpokládat, že hodnoty N_1 a N_2 jsou dostatečně velké tak, že lze uvažovat $N_1, N_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Počet potenciálních zákazníků, kteří si v čase t koupí vybranou značku a stanou se tak jejími novými uživateli, je přímo úměrný počtu uživatelů značky N_2 v čase t a počtu potenciálních zákazníků N_1 v čase t. Koeficient přímé úměrnosti, který označíme $a = a(t)$, se nazývá *kontaktní míra.* Obecně je závislý na čase a lze ho ovlivnit propagací značky. Úbytek uživatelů značky v čase t je přímo úměrný počtu těchto uživatelů N_2 v čase t. Díky migraci a přirozené úmrtnosti z nich část trh opustí (přestane zboží daného typu používat), označme tuto míru $\varepsilon > 0$. Část z nich přejde ke konkurenčním značkám a stanou se z nich potenciální zákazníci, označme tuto míru $\beta > 0$. Uživatelé značky v čase t tedy ubývají mírou $\delta = \varepsilon + \beta$. Předchozí předpoklady lze stručně zapsat pomocí rovnice

$$\dot{N}_2 = a(t)N_1N_2 - \delta N_2.$$

Předpokládejme dále, že díky přirozenému růstu příjmu obyvatelstva roste počet nových potenciálních zákazníků značky konstantní rychlostí $k > 0$. Ti, kteří se podle předchozího odstavce stali novými uživateli uvažované značky, představují úbytek potenciálních zákazníků a ti, kteří přestali být uživateli značky a koupili si značku konkurenční, představují přírůstek potenciálních zákazníků. Stručně tedy můžeme psát

$$\dot{N}_1 = k - a(t)N_1N_2 + \beta N_2.$$

Uvažujme, že kontaktní míra je rostoucí funkcí reklamních nákladů. Ty mají za následek rostoucí počet uživatelů značky, takže náklady na reklamu lze považovat přímo úměrné počtu uživatelů značky. Budeme tedy předpokládat, že $a(t) = \alpha N_2(t)$, kde $\alpha > 0$ je konstanta úměrnosti. Celkem získáme soustavu

$$\begin{array}{ll} \dot{N}_1 = k - \alpha N_1 N_2^2 + \beta N_2, & N_1(0) \geq 0, \\ \dot{N}_2 = \alpha N_1 N_2^2 - \delta N_2, & N_2(0) \geq 0. \end{array} \tag{1}$$

Stacionární bod soustavy (1) je

$$(N_1^\circ, N_2^\circ) = \left(\frac{\delta\varepsilon}{\alpha k}, \frac{k}{\varepsilon} \right).$$

Označíme-li dále $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ celkový počet účastníků trhu, pak podle (1) platí $\dot{N} = k - \varepsilon N_2$. V závislosti na okamžitém počtu uživatelů značky N_2 může nastat $\dot{N} > 0$, resp. $\dot{N} < 0$. To znamená, že počet účastníků trhu se v průběhu času může zvětšovat nebo zmenšovat.

2 Transformace modelu

Abychom určili kvalitativní chování řešení soustavy (1), položme

$$\tau = \delta t, \; x_1(\tau) = \frac{\alpha k}{\delta\varepsilon} N_1\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - 1, \text{ a } x_2(\tau) = \frac{\varepsilon}{k} N_2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - 1. \tag{2}$$

Vzhledem k významu N_1 a N_2 je $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$ a tedy $x_1 \geq -1$ a $x_2 \geq -1$. Použijeme-li (2), lze soustavu (1) psát ve tvaru

$$\begin{array}{l} x'_1 = \gamma(-x_1 + (\phi - 2)x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - x_1x_2^2) \\ x'_2 = x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2^2 \end{array}, \tag{3}$$

kde $'$ znamená derivaci podle proměnné τ a $\gamma = \alpha k^2/\delta\varepsilon^2$, $\phi = \beta/\delta$. Stacionární bod soustavy (3) je

$$(x_1^\circ, x_2^\circ) = (0, 0).$$

3 Podmínky stability stacionárního bodu

Při vyšetřování stability stacionárního bodu soustavy (3) budeme vycházet z věty, srv. [5, str. 116]

Věta 3.1 *Předpokládejme, že složky zobrazení f z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $x^\circ \in \mathbb{R}^2$ a že $f(x^\circ) = 0$. Nechť* $\det Df(x^\circ) \neq 0$. *Pak je bod x° izolovaným stacionárním bodem systému*

$$x' = f(x). \tag{4}$$

Přitom je bod x° uzel, ohnisko nebo sedlo pro systém (4), je-li počátek singulárním bodem stejného typu pro lineární systém

$$z' = Df(x^\circ)\, z, \tag{5}$$

kde $z = x - x^\circ$. Je-li však počátek střed pro systém (5), je bod x° buď bod rotace nebo ohnisko pro systém (4).

Bodem rotace se přitom rozumí takový stacionární bod x° rovnice (4) v jehož libovolném okolí existuje alespoň jeden cyklus, který odpovídá nekonstantnímu periodickému řešení. Jeho grafem ve fázovém prostoru je uzavřená křivka, která ve svém vnitřku obsahuje bod x°. Připomeňme také, že řešení $\varphi(x_0, t)$ rovnice (4) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ je periodické s minimální periodou T, jestliže pro všechna t platí $\varphi(x_0, t + T) = \varphi(x_0, t)$ a přitom $\varphi(x_0, t + s) \neq \varphi(x_0, t)$ pro libovolné $s \in (0, T)$.

Označme

$$f(x_1, x_2) = (\gamma(-x_1 + (\phi - 2)x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - x_1x_2^2), x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2^2),$$

pak

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \gamma(-1 - 2x_2 - x_2^2) & \gamma((\phi - 2) - 2x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2) \\ 1 + 2x_2 + x_2^2 & 1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Matice linearizované soustavy (3) ve stacionárním bodě $(x_1^\circ, x_2^\circ) = (0,\, 0)$ je

$$\mathbf{A} = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma(\phi - 2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\gamma - \lambda & \gamma(\phi - 2) \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\gamma - 1)\lambda + \gamma(1 - \phi) = 0, \tag{6}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice.

Hledejme řešení kvadratické rovnice (6). V závislosti na znaménku diskriminantu

$$D(\gamma) = \gamma^2 + 2(2\phi - 3)\gamma + 1, \tag{7}$$

rozlišíme hodnoty vlastních čísel matice $\mathbf{A}$. Připomeňme také, že $\gamma > 0$ a $0 \leq \phi < 1$, pak

$$\lambda_1\lambda_2 = \gamma(1 - \phi) > 0 \text{ a } \lambda_1 + \lambda_2 = -(\gamma - 1). \tag{8}$$

Je-li $D(\gamma) > 0$, má rovnice (6) dva různé reálné kořeny a matice $\mathbf{A}$ má dvě různá reálná vlastní čísla:

$$\lambda_{1,2}(\gamma) = \frac{-(\gamma - 1) \pm \sqrt{D(\gamma)}}{2}. \tag{9}$$

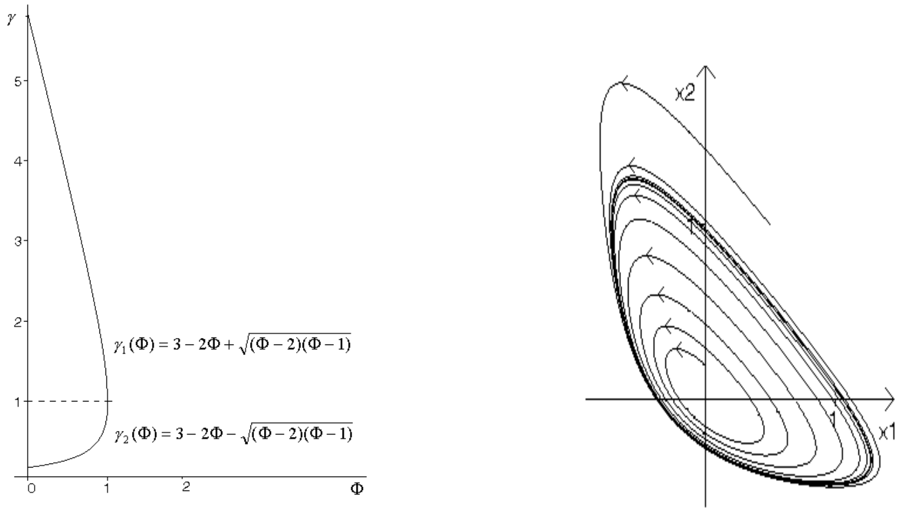
Hledejme nyní podmínky, za kterých dané kořeny existují. Diskriminant kvadratické nerovnice

$$D(\gamma) = \gamma^2 + 2(2\phi - 3)\gamma + 1 > 0 \tag{10}$$

je $\Delta = 16(\phi - 2)(\phi - 1)$ a vzhledem k podmínkce $0 \leq \phi < 1$ platí vždy $\Delta > 0$. To znamená, že vždy existují dva nulové body kvadratického trojčlenu $D(\gamma)$ a platí pro ně

$$\gamma_1(\phi) = 3 - 2\phi - 2\sqrt{(\phi - 2)(\phi - 1)},\ \gamma_2(\phi) = 3 - 2\phi + 2\sqrt{(\phi - 2)(\phi - 1)}. \tag{11}$$

Lze ukázat, že pro $\phi \in [0,\ 1)$ je $0 < \gamma_1(\phi) < 1$ a $1 < \gamma_2(\phi)$. Ilustraci těchto vztahů znázorňuje obr. 1.



Obr. 1: V levé části jsou zobrazeny kořeny $\gamma_1(\phi)$ a $\gamma_2(\phi)$ jako funkce proměnné ϕ. V pravé části je fázový obraz soustavy (3) pro $\gamma = 0,92$ a $\phi = 0,1$.

Odtud nyní máme, že nerovnice (10) platí pro $\gamma \in [0, \gamma_1(\phi)) \cup (\gamma_2(\phi), \infty)$.

Využijme nyní (8) a hledejme znaménka vlastních čísel (9). Pro $\gamma < 1$ je $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Podle druhého ze vztahů v (8) je tedy $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$ a stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0,\ 0)$ soustavy (3) je nestabilní uzel. Naopak, pro $\gamma > 1$ je $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Potom však $\lambda_1 < 0$ i $\lambda_2 < 0$ a stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0,\ 0)$ soustavy (3) je stabilní uzel.

Je-li $D(\gamma) < 0$, má rovnice (6) dva komplexně sdružené kořeny a matice $\mathbf{A}$ má dvě koplexně sdružená vlastní čísla. Podobně jako v předcházejícím odstavci bychom zjistili, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ linearizované soustavy (3) jsou pro $\gamma \in (\gamma_1(\phi), \gamma_2(\phi))$ dány

$$\lambda_{1,2}(\gamma) = \frac{-(\gamma - 1) \pm i\sqrt{-D(\gamma)}}{2}. \tag{12}$$

Je-li $\gamma < 1$, je $\Re(\lambda_{1,2}) = -(\gamma - 1)/2 > 0$ a stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0, 0)$ soustavy (3) je nestabilní ohnisko. Naopak pro $\gamma > 1$ je $\Re(\lambda_{1,2}) = -(\gamma - 1)/2 < 0$ a stacionární bod

$(x^{\circ}, y^{\circ}) = (0, 0)$ soustavy (3) je stabilní ohnisko. Pro $\gamma = 1$ je $\Re(\lambda_{1,2}) = 0$ a stacionární bod je ohnisko nebo bod rotace.

Dosud provedené úvahy týkající se lokálního chování soustavy (3) nyní shrneme.

Věta 3.2 *Soustava (3) má jediný stacionární bod* $(0, 0)$ *a existují hodnoty* γ_1, γ_2 *parametru* γ *dané (11), pro které* $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$ *takové, že stacionární bod je*

(i) nestabilní uzel pro $\gamma \in [0, \gamma_1)$,

(ii) nestabilní ohnisko pro $\gamma \in (\gamma_1, 1)$,

(iii) ohnisko nebo bod rotace pro $\gamma = 1$,

(iv) stabilní ohnisko pro $\gamma \in (1, \gamma_2)$,

(v) stabilní uzel pro $\gamma \in (\gamma_2, \infty)$.

4 Periodické řešení

V soustavě (1) je možné vhodnou reklamou ovlivnit hodnotu parametru α. Tento parametr ovlivňuje hodnotu parametru γ v soustavě (3). V dalším budeme předpokládat, že parametr ϕ v soustavě (3) je konstatní. Takto můžeme připustit, že soustava (3) je citlivá především na změnu hodnoty parametru γ, která je však ovlivněna dalšími parametry α, k, δ a ε soustavy (1). Z věty 3.2 je zřejmé, že při přechodu parametru γ přes hodnotu $\gamma_0 = 1$ dochází ke změně stability stacionárního bodu soustavy (3). To nás přivádí k myšlence, že hodnota γ_0 může být bifurkačním bodem soustavy (3). Zabývejme se tedy dále řešením soustavy (3) pro hodnoty γ z blízkého okolí bodu γ_0.

Nyní přistoupíme k formulaci věty, která zaručuje existenci periodického řešení, srv. [1, str. 406]. Větu formulujeme ve zjednodušeném tvaru tak, abychom ji mohli přímo použít na soustavu (3).

Věta 4.1 Hopfova bifurkace. *Nechť* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ *a nechť zobrazení* f *z* $\Lambda \times \mathbb{R}^2$ *do* $\mathbb{R}^2$ *je alespoň dvakrát spojitě diferencovatelné a takové, že* $f(\cdot, 0) = 0$.

(i) Předpokládejme, že pro nějaké $\gamma_0 \in \Lambda$ *a* $\omega_0 > 0$ *má matice* $D_2 f(\gamma_0, 0)$, *vlastní čísla* $i\omega_0, -i\omega_0$.

(ii) Nechť dále $\lambda(\gamma)$ *je spojitě diferencovatelná funkce proměnné* γ *na okolí* U *bodu* γ_0, *pro kterou platí*

  (a) $\lambda(\gamma_0) = i\omega_0$,

  (b) $\lambda(\gamma)$ *je vlastním číslem matice* $D_2 f(\gamma, 0)$ *na* U.

Jestliže

$$\frac{d}{d\gamma}[\Re\lambda(\gamma_0)] \neq 0,$$

pak lze nalézt okolí $(\gamma_0, 0)$, *na kterém existuje nekonstatní periodické řešení rovnice* $x' = f(\gamma, x)$, *jehož trajektorie je uzavřená křivka, a jehož amplituda pro* $\gamma \to \gamma_0$ *konverguje k nule.*

Pro soustavu (3) položme $\gamma_0 = 1$. Pro tuto hodnotu splňuje soustava (3) předpoklady věty 4.1, přičemž

$$\frac{d}{d\gamma}[\Re\lambda(\gamma_0)] = -\frac{1}{2}.$$

Existuje tedy nějaké okolí bodu $\gamma_0 = 1$, ve kterém v závislosti na volbě parametru γ existují periodická řešení soustavy (3).

Chceme-li uvažovat o stabilním periodickém řešení, je třeba předpokládat, že stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0, 0)$ je nestabilní. To nastává pro $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_0)$. Důkaz toho, že periodické řešení vzniká právě v okolí (γ_3, γ_0) bodu γ_0, kde $\gamma_3 > \gamma_1$, lze provést převedením soustavy (3) na normální formu, srv. [4]. Tento výpočet zde pro jeho rozsáhlost provádět nebudeme. Uvažujme pouze ilustraci fázového obrazu a trajektorie pro hodnoty parametrů $\gamma = 0,92$ a $\phi = 0,1$, srv. obr. 1. Pro dané hodnoty je stacionární bod nestabilní ohnisko a existuje stabilní periodické řešení, jehož amplituda závisí na hodnotě parametru γ.

5 Závěr

Reklamní strategie, založená na tom, že investice do reklamy jsou přímo úměrné objemu prodeje, může vést k periodickým oscilacím objemu prodeje výrobků dané značky. Tento výsledek je možné interpretovat takto: Je-li počet uživatelů výrobku v daném čase malý, firma má malý příjem a nemůže si dovolit rozsáhlou reklamní kampaň. Nicméně na trhu je mnoho potenciálních zákazníků, takže i malé investice do reklamy vedou ke zvětšení objemu firemního prodeje. Tak jak roste objem prodaných výrobků, zvyšují se i výdaje na reklamu. Tento růst však po čase převýší růst objemu prodejů, protože potenciální zákazníci tím, jak se stávají uživateli, ubývají. Reklama přestává být účinná. Nicméně stále dochází k přirozenému odlivu uživatelů a protože nových uživatelů v této fázi cyklu přibývá málo, dochází k poklesu objemu prodejů. Proces se tak může opakovat.

V článku není uveden důkaz toho, že nalezené periodické řešení je stabilní. Na jeho přehledné podobě autor pracuje.

Literatura

[1] AMANN, H.: *Ordinary Differential Equation,* de Gruyter, Berlin, 1990

[2] FEICHTINGER, G.: *Hopf bifurcation in an advertising diffusion model,* Journal of Economic Behaviour and Organization 17 (1992), str. 401-411

[3] GANDOLFO, G.: *Economic Dynamic,* 3^{rd} Edition, Springer, Berlin 1997

[4] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P.: *Nonliear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields,* Springer, New York, 1983

[5] KALAS, J., RÁB, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice,* MU Brno, 1995

Kontaktní adresa

Mgr. Pavel Pražák , Katedra informatiky a kvantitativních metod, Fakulta informatiky a managementu, Univerzita Hradec Králové, nám. Svobody 331, 500 02 Hradec Králové, e-mail: pavel.prazak@uhk.cz