O teleskopických součtech a součinech

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Stanovení součtu (součinu) několika čísel (členů číselné posloupnosti vyhovující danému předpisu) a řešení úloh, které s touto problematikou souvisejí, patří v oblasti školské matematiky mezi oblíbené celky jak pro žáky, tak i pro učitele matematiky. Na druhé straně je třeba konstatovat, že se žáci při výuce matematiky hlouběji seznamují pouze se součty několika členů aritmetické či geometrické posloupnosti, což představuje jen velmi omezený celek znalostí z uvedené oblasti.

Tento článek je určen především těm učitelům matematiky, jejich žákům a dalším zájemcům, kteří se chtějí o uvedené problematice dovědět něco navíc. Cílem příspěvku je seznámit čtenáře s *metodou teleskopických součtů a součinů*.

Jak již název napovídá, princip této metody je založen na cíleném rozšíření („prodloužení“) daného součtu (součinu) několika čísel takovým způsobem, aby jej vzápětí bylo možno výrazně zjednodušit, tj. co nejvíce snížit počet jeho sčítanců (činitelů). Toho lze dosáhnout, pokud každý ze sčítanců lze přepsat ve tvaru vhodného rozdílu tak, že většina členů takto upraveného součtu se v závěru navzájem zruší. Takový postup představuje jistou analogii s činností velkého dalekohledu (teleskopu), který je potřeba před vlastním použitím zpravidla prodloužit o určitý počet článků tak, abychom s ním mohli dál efektivně pracovat (odtud název metody). Zájemcům o tuto problematiku je možno doporučit také některé zahraniční zdroje, které jsou zaměřeny především na práci s matematicky talentovanými žáky. Patří mezi ně také obě publikace uvedené na konci článku.

V první části příspěvku je prezentováno využití metody teleskopických součtů při řešení několika konkrétních úloh. Druhá část článku je pak věnována problematice teleskopických součinů.

1. Teleskopické součty

Uveďme nejprve několik snazších úloh.

Příklad 1

Určete hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Řešení. Uvažujme k-tý sčítanec ($k=1,2,\ldots,n$) daného součtu, pro který platí

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\,. \tag{1}$$

V daném součtu nahradíme každý sčítanec rozdílem dvou zlomků podle (1). Dostaneme tak

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Všimněme si, že uvedené řešení je založeno na následující skutečnosti: Každý sčítanec je nahrazen rozdílem dvou zlomků (v podstatě jde o rozšíření daného součtu, přesněji zdvojnásobení počtu jeho členů, s cílem výrazně v závěru zjednodušit upravený tvar součtu).

Poznámka. K rozkladu (1) lze dospět také jinak – využitím *metody neurčitých koeficientů* při rozkladu k-tého sčítance na tzv. parciální zlomky. Jde o nalezení reálných čísel A a B, která pro každé k přirozené vyhovují vztahu

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}\,.$$

Tato úloha vede na řešení snadné soustavy dvou lineárních rovnic $A+B=0$ a $A=1$ o neznámých A, B. Její řešení $A=1$, $B=-1$ vede k výše odvozenému rozkladu (1).

Podobným způsobem lze stanovit např. hodnotu součtu

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\,.$$

Příklad 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n>1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1\,.$$

Řešení. Pro každé k přirozené $k>1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}\,.$$

Využitím této nerovnosti pro $k=2,3,\ldots,n$ a využitím výsledku z příkladu 1 dostaneme postupně

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}<1\,,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3

Dokažte, že pro každé n přirozené platí nerovnost

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}<2\,.$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé přirozené číslo k platí

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}\,,$$

je daná nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}<2\,.$$

Po snadné úpravě však dostáváme přímo nerovnost dokázanou v předešlém příkladu 2.

Příklad 4

Dokažte, že platí následující rovnost

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9\,.$$

Řešení. Usměrníme-li každý sčítanec na levé straně rovnosti, získáme pouhým „teleskopickým zjednodušením“ celého výrazu na levé straně

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9\,,$$

což bylo třeba dokázat.

Příklad 5

Dokažte následující nerovnosti

a) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{2010}{2011!}<1\,,$

b) $\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\dfrac{2011}{2009!+2010!+2011!}<\dfrac{1}{2}\,.$

Řešení.

a) Podobně jako v příkladu 1 upravíme nejprve k-tý sčítanec ($k = 1, 2, \ldots, 2010$) na levé straně nerovnosti následujícím způsobem

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\,.$$

Pak platí

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{99}{100!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2010!} - \frac{1}{2011!}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2011!} < 1\,,$$

což jsme chtěli dokázat.

b) Jednotlivé sčítance na levé straně nerovnosti upravíme pomocí následující identity. Pro všechna $k = 3, 4, \ldots, 2011$ platí

$$\frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} = \frac{k}{k^2(k-2)!} = \frac{1}{k(k-2)!} = \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\,.$$

Pomocí ní upravíme každý sčítanec na levé straně nerovnosti a dostaneme tak

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \ldots + \frac{2011}{2009! + 2010! + 2011!} =$$

$$= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2010!} - \frac{1}{2011!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2011!} < \frac{1}{2}\,.$$

Tím je důkaz i této nerovnosti uzavřen.

Analogickým způsobem (využitím metody teleskopických součtů) lze řešit také následující úlohy. U každé z nich je uveden stručný návod, pomocí něhož se každý ze zájemců o tuto problematiku může samostatně pokusit o její řešení.

Příklad 6

Určete hodnotu součtu

$$\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}\,.$$

[Návod: Využijte rovnost

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}$$

a dále po úpravě jednotlivých sčítanců metodu teleskopických součtů.]

Příklad 7

Určete hodnotu součtu

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx\,.$$

[NÁVOD: Pro využití metody teleskopických součtů vynásobte nejprve každý člen součtu výrazem $2\sin\frac{x}{2}$ a dále využijte vzorec

$$2\sin kx \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{(2k-1)x}{2} - \cos\frac{(2k+1)x}{2}$$

pro $k = 1, 2, \ldots, n$.]

Poznámka. Podobně lze stanovit také hodnotu součtu

$$C_n = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx\,.$$

Příklad 8 (21. USAMO, 1992)

Dokažte rovnost

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}\,.$$

[NÁVOD: Obě strany dokazované rovnosti vynásobte výrazem $\sin 1^\circ$ a dále využijte následující rovnost (argumenty goniometrických funkcí uvažujte ve stupních)

$$\frac{\sin 1}{\cos k \cos(k+1)} = \frac{\sin(k+1)\cos k - \cos(k+1)\sin k}{\cos k \cos(k+1)}$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 88$.]

Příklad 9 (25. USAMO, 1996)

Dokažte rovnost

$$2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \ldots + 178\sin 178^\circ = 90\operatorname{cotg} 1^\circ\,.$$

[NÁVOD: Obě strany dokazované rovnosti vynásobte výrazem $\sin 1^\circ$ a dále využijte identitu (argumenty goniometrických funkcí uvažujte ve stupních)

$$2\sin 2k \sin 1 = \cos(2k-1) - \cos(2k+1)\,.$$

pro $k = 1, 2, \ldots, 89$.]

2. Teleskopické součiny

Ve druhé části se zaměříme na prezentaci metody teleskopických součinů. S uvedenou problematikou se mj. mohli setkat již řešitelé 21. ročníku Matematické olympiády v kategorii A (viz příklady 14 a 15), které ponecháváme čtenářům k samostatnému procvičení.

Příklad 10

Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Řešení. Označme

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} \qquad \text{a} \qquad B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101}.$$

Protože pro všechna n přirozená platí očividně nerovnost

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2},$$

obdržíme využitím „teleskopického zkrácení“ většiny činitelů v čitateli a jmenovateli zlomku (součinu) $A \cdot B$ postupně následující odhady

$$A^2 < A \cdot B < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}, \qquad \text{tj.} \qquad A < \frac{1}{10},$$

což přímo dokazuje danou nerovnost.

Příklad 11

Dokažte nerovnost

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2009 \cdot 2011}\right) < 2.$$

Řešení. Každý z činitelů na levé straně dokazované nerovnosti upravíme následujícím způsobem: Pro každé $k = 2, 3, \ldots, 2010$ platí

$$1 + \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

Uvažovaný součin upravíme pomocí této rovnosti a dále využijeme (stejně jako v předchozím případě) „teleskopické zkrácení“ celého výrazu. Dostaneme tak

$$\frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2010^2}{2009 \cdot 2011} = 2 \cdot \frac{2010}{2011} < 2.$$

Tím je důkaz uzavřen.

Zcela analogicky lze postupovat také při důkazu následující identity. O její snadný důkaz se můžete pokusit samostatně.

Příklad 12.

Dokažte, že pro všechna $n > 1$ přirozená rovnost

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\,.$$

Příklad 13.

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí nerovnost

$$\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3+1}{n^3-1}<\frac{3}{2}\,.$$

Řešení. Využitím vzorců $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, jež platí pro libovolná reálná čísla a, b, dostaneme speciální volbou $a=2,3,\ldots,n$ a $b=1$

$$\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3+1}{n^3-1}=\frac{3\cdot3}{1\cdot7}\cdot\frac{4\cdot7}{2\cdot13}\cdot\frac{5\cdot13}{3\cdot21}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}\,.$$

Protože pro $k=2,3,\ldots,n-1$ platí rovnost

$$(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1\,,$$

lze poslední součin upravit (po teleskopickém zkrácení) do tvaru

$$\frac{3\cdot3}{1\cdot7}\cdot\frac{4\cdot7}{2\cdot13}\cdot\frac{5\cdot13}{3\cdot21}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}<\frac{3}{2}\,.$$

Tím je důkaz nerovnosti uzavřen.

Závěrečné dvě (na sebe navazující úlohy) jsou určeny čtenářům k samostatnému procvičení problematiky této části příspěvku.

Příklad 14 (21. ročník MO, A–II–1a)

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=\frac{(n+1)^2}{4n}\,.$$

Příklad 15. (21. ročník MO, A–III–1)

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí nerovnost

$$\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)>\frac{1}{2}\,.$$

Literatura

[1] *Andreescu, T. – Gelca, R.*: Mathematical Olympiad Challanges. Birkäuser. Boston 2000.

[2] *Larson, L. C.*: Metódy riešenia matematických problémov. Vyd. Alfa, Bratislava 1990.

Příspěvek vznikl za podpory projektu OPVK – CZ.1.07/1.2.12/01.0027.