K a p i t o l a 3

Stejnoměrně nejsilnější nestranné testy

3.1. Nestranné testy a podobné testy

V předcházející kapitole jsme viděli, že v jednoparametrickém exponenciálním systému s hustotami $p_\theta(x) = \exp\{c(\theta) . T(x) + A(\theta) + B(x)\}$, $c(\theta)$ rostoucí v θ, existuje stejnoměrně nejsilnější test jednostranné hypotézy $H_1 : \theta \leq \theta_0$ proti $K_1 : \theta > \theta_0$ a oboustranné hypotézy $H_2 : \theta \leq \theta_1$ nebo $\theta \geq \theta_2$ proti $K_2 : \theta_1 < \theta < \theta_2$, ale neexistuje stejnoměrně nejsilnější test hypotézy $H_3 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ proti $K_3 : \theta < \theta_1$ nebo $\theta > \theta_2$ a $H_4 : \theta = \theta_0$ proti $K_4 : \theta \neq \theta_0$. Jestliže neexistují stejnoměrně nejsilnější testy hypotéz H_3 a H_4 a přesto je potřebujeme testovat, jaké testy pak máme pokládat za vhodné ?

Podobná situace nastane, závisí-li rozdělení pozorování na více parametrech a chceme testovat hypotézu pouze o jednom z nich. Stejnoměrně nejsilnější test nemusí existovat ze dvou základních důvodů:

(a) množina všech α-testů, mezi kterými kledáme optimum, je příliš bohatá na to, aby obsahovala test, stejnoměrně maximalizující silofunkci;

(b) alternativa, tj. množina všech rozdělení X za platnosti alternativy, je příliš bohatá na to, aby existoval test, maximalizující silofunkci stejnoměrně přes tuto množinu.

Z tohoto hlediska se nabízejí tři možnosti, jak tento problém zvládnout : (i) omezit třídu testů a hledat test, optimální jen na vhodné podmnožině testů; (ii) omezit alternativu (např. požadovat, aby test maximalizoval silofunkci stejnoměrně na určitém okolí hypotézy nebo aby maximalizoval minimum silofunkce vypočtené přes celou alternativu apod.); (iii) kombinovat způsoby (i) a (ii).

Jedna z možností, jak omezit třídu testů, je uvažovat pouze tzv. nestranné testy a hledat stejnoměrně nejsilnější nestranný test. Ukazuje se, že nestrannost je přirozený požadavek na test; v řadě situací, ve kterých neexistuje stejnoměrně nejsilnější α-test, existuje stejnoměrně nejsilnější nestranný α-test a kromě toho, pokud existuje stejnoměrně nejsilnější α-test, je nutně nestranný.

Pokud hypotéza a alternativa vykazují určitou symetrii nebo invarianci, je vhodné omezit se na testy, vykazující podobnou symetrii nebo invarianci. Důležitou třídou testů, invariantních vzhledem k určité grupě transformací výběrového prostoru na sebe, jsou pořadové testy, o kterých pojednává samostatný učební text [4] .

Kapitola 3 bude věnována nestranným testům a hledání stejnoměrně nejsilnějších nestranných testů v řadě konkrétních situací.

Nejprve definujeme nestranný test.

Definice. Nechť rozdělení náhodného vektoru X tvoří systém $\mathcal{P} : \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Řekneme, že α-test Φ hypotézy $H : \theta \in \Theta_H$ proti alternativě $K : \theta \in \Theta_K$ je nestranný, jestliže jeho silofunkce $\beta_\Phi(\theta)$ vyhovuje podmínce

$$(3.1) \qquad \begin{array}{lll} \beta_\Phi(\theta) \leq \alpha & \text{pro} & \theta \in \Theta_H \\ \beta_\Phi(\theta) \geq \alpha & \text{pro} & \theta \in \Theta_K . \end{array}$$

Jestliže existuje stejnoměrně nejsilnější α-test H proti K, pak je nutně nestranný, o čemž se přesvědčíme, srovnáme-li jej s testem $\Phi(x) \equiv \alpha$. Jestliže neexistuje stejnoměrně nejsilnější α-test, může existovat test, nejsilnější na množině nestranných testů, tedy stejnoměrně nejsilnější nestranný α-test. Uvidíme, že takový test existuje např. pro hypotézy H_3 a H_4 o parametru jednoparametrického exponenciálního systému i pro hypotézy o jednom parametru viceparametrického exponenciálního systému, kde ostatní parametry vystupují jako rušivé.

V řadě situací mají množiny Θ_H a Θ_K společnou hranici Θ^*. Jestliže silofunkce $\beta_\Phi(\theta)$ testu Φ je spojitá v θ a test Φ je nestranný, musí platit

$$(3.2) \qquad \beta_\Phi(\theta) = \alpha \qquad \text{pro vš. } \theta \in \Theta^* .$$

Testy, vyhovující podmínce (3.2), nazveme testy podobné na hranici H a K. Protože podmínka (3.2) je jednodušší než (3.1), bylo by vhodné vědět, za jakých okolností je stejnoměrně nejsilnější nestranný α-test shodný s testem, stejnoměrně nejsilnějším mezi testy vyhovujícími (3.2). Odpověď na tuto otázku dává následující lemma.

Lemma 3.1. Nechť systém $\mathcal{P}$ rozdělení vektoru X je takový, že silofunkce libovolného testu je spojitá v Θ. Pak, je-li Φ_0 test, stejnoměrně nejsilnější mezi všemi testy vyhovujícími (3.2) a je-li α-testem hypotézy H, je Φ_0 i stejnoměrně nejsilnějším nestranným α-testem H proti K.

Důkaz : Protože třída testů vyhovujících (3.2) obsahuje všecky nestranné α-testy, je ~~test~~ Φ_0 alespoň tak silný jako libovolný nestranný α-test. Φ_0 je také alespoň tak silný jako test $\Phi(x) \equiv \alpha$ (který též vyhovuje (3.2); to znamená, že Φ_0 je nestranný a je stejnoměrně nejsilnějším nestranným α-testem. Q.E.D.

3.2. Testy hypotézy H_3 a H_4 v jednoparametrickém exponenciálním systému

VĚTA 3.1. Nechť náhodný vektor $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ má rozdělení pravděpodobnosti s hustotami

$$(3.3) \qquad p_\theta(\underset{\sim}{x}) = \exp\left\{\theta . T(\underset{\sim}{x}) + A(\theta) + B(\underset{\sim}{x})\right\}$$

vzhledem k míře μ. Pak

(1) existuje stejnoměrně nejsilnější nestranný α-test hypotézy $H_3 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ proti alternativě $K_3 : \theta < \theta_1$ nebo $\theta > \theta_2$, který má tvar

$$(3.4)\qquad \Phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \text{když} \quad T(\underset{\sim}{x}) < c_1 \quad \text{nebo} \quad T(\underset{\sim}{x}) > c_2 \\ \gamma_i & \text{když} \quad T(\underset{\sim}{x}) = c_i, \quad i=1,2 \\ 0 & \text{když} \quad c_1 < T(\underset{\sim}{x}) < c_2 \end{cases}$$

kde $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ jsou určena tak, aby platilo

$$(3.5)\qquad E_{\theta_1}\Phi(\underset{\sim}{X}) = E_{\theta_2}\Phi(\underset{\sim}{X}) = \alpha ;$$

(2) existuje stejnoměrně nejsilnější nestranný α-test hypotézy $H_4 : \theta \doteq \theta_0$ proti $K_4 : \theta \neq \theta_0$, který má tvar (3.4), kde $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ jsou určena tak, aby platilo

$$(3.6)\qquad E_{\theta_0}\Phi(\underset{\sim}{X}) = \alpha$$

a

$$(3.7)\qquad E_{\theta_0}\left[T(\underset{\sim}{X})\,\Phi(\underset{\sim}{X})\right] = \alpha E_{\theta_0}\left[T(\underset{\sim}{X})\right] .$$

Důkaz: Použijeme-li nerovnost

$$\left| \frac{1}{z}(e^{az}-1) \right| \leq \frac{1}{\delta} e^{\delta|a|} \qquad \text{pro} \quad |z| \leq \delta$$

na $\beta_\Phi(\theta)\, e^{-A(\theta)} = \int \Phi(x) \exp\{\theta\, T(x) + B(x)\}\, d\mu$, zjistíme, že silofunkce $\beta_\Phi(\theta)$ libovolného testu Φ je diferencovatelná, a tedy i spojitá. Pro důkaz části (1) můžeme tedy použít lemma 3.1 a hledat test, nejsilnější mezi testy vyhovujícími (3.2), kde $\Theta^* = \{\theta_1, \theta_2\}$. Zvolme nějaké $\theta' \notin \langle\theta_1, \theta_2\rangle$ a hledejme test, který maximalizuje $E_{\theta'}\Phi(\underset{\sim}{X})$ mezi všemi testy vyhovujícími (3.5). Jestliže položíme $\Phi'(\underset{\sim}{x}) = 1 - \Phi(\underset{\sim}{x})$, plyne z věty 2.4 a věty 2.5, že řešením je právě test vyhovující (3.4) a (3.5). Z lemmatu 3.1 pak dále plyne, že tento test je také SN nestranným α-testem H_3 proti K_3.

(2) Stačí hledat mezi testy, závislými na postačující statistice $T(\underset{\sim}{x})$. Podle důsledku věty 1.5 má $T(x)$ hustotu

$$p_\theta(t) = \exp\left\{\theta\, t + A(\theta)\right\}$$

vzhledem k nějaké míře ν, což je opět exponenciální systém; tedy silofunkce $\beta_\psi(\theta)$ libovolného testu $\psi(t)$ je diferencovatelná. Z nestrannosti dále plyne, že $E_{\theta_0}\psi(T) = \alpha$ a silofunkce $\beta_\psi(\theta)$ dosahuje v bodě $\theta = \theta_0$ minima. Protože je $\beta_\psi(\theta)$ diferencovatelná, musí pro nestranný test platit $\beta'_\psi(\theta_0) = 0$ a z věty o derivaci integrálu podle parametru vyplývá, že integrál $\beta_\psi(\theta) = \int \psi(t) \exp\left\{\theta t + A(\theta)\right\} d\nu(t)$ lze derivovat podle θ za integračním znaménkem, tedy pro libovolný nestranný test $\psi(t)$ platí

$$(3.8) \qquad \beta'_\psi(\theta) = E_\theta\left[T\,\psi(T)\right] + A'(\theta)\,.\,E_\theta\left[\psi(T)\right] .$$

Tento vztah musí platit i pro $\psi(t) \equiv \alpha$, což znamená

$$0 = E_\theta(T) + A'(\theta),$$

to po dosazení do (3.8) dává

$$\beta'_\psi(\theta) = E_\theta\left[T.\,\psi(T)\right] - E_\theta(T)\,.\,E_\theta\left[\psi(T)\right] ,$$

a po dosazení $\theta = \theta_0$ dostáváme , že libovolný nestranný test musí vyhovovat (3.6) i (3.7).

Zvolme $\theta' \neq \theta_0$. Pomocí věty 2.4 budeme hledat test $\psi(t)$, který maximalizuje $E_{\theta'}\psi(T)$ za podmínek (3.6) a (3.7). Uvažujme množinu

$$M = \left\{\left(E_{\theta_0}[\psi(T)],\ E_{\theta_0}[T\,\psi(T)]\right);\ \psi \in \mathcal{D}\right\}$$

kde $\mathcal{D}$ je množina všech testových funkcí. Snadno se přesvědčíme, že bod $(\alpha, \alpha E_{\theta_0}(T))$ je vnitřním bodem M. Podle (iii) věty 2.4 odtud plyne, že existují konstanty k_1 a k_2 a test ψ splňující (3.6) a (3.7) (pro $\Phi(\underset{\sim}{x}) = \psi(T(\underset{\sim}{x})))$ takový, že

$\psi(t) = 1$ když $(k_1+k_2t)\exp\left\{\theta_0 t+A(\theta_0)\right\} < \exp\left\{\theta' t + A(\theta')\right\}$,

a tedy

$$(3.9) \qquad \psi(t) = 1 \quad \text{když} \quad a_1+a_2t < e^{bt}.$$

Kritický obor testu (3.9) je buď polopřímka nebo doplněk intervalu. Polopřímka nepřichází v úvahu; podle věty 2.2 je silofunkce jednostranného testu ryze monotonní, tedy $\beta'_{\psi}(\theta_0) \neq 0$ a test nemůže splňovat (3.7). Řešením je tedy test (3.4) vyhovující podmínkám (3.6) a (3.7). Tento test je i nestranný, což plyne ze srovnání s testem $\psi(t) \equiv \alpha$. Q.E.D.

Důsledek. Předpokládejme, že rozdělení statistiky T je za platnosti $\theta = \theta_0$ symetrické kolem bodu Δ. Pak stejnoměrně nejsilnějším nestranným testem hypotézy $H_4: \theta = \theta_0$ proti $K_4: \theta \neq \theta_0$ je test (3.4), kde konstanty $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ jsou dány vztahy

$$(3.10) \qquad P_{\theta_0}(T<c_1) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T=c_1) = \frac{\alpha}{2}$$

$$(3.11) \qquad c_2 = 2\Delta - c_1, \quad \gamma_2 = \gamma_1.$$

Důkaz. Jestliže rozdělení T je symetrické kolem Δ, platí $P_{\theta_0}(T<\Delta-t) = P_{\theta_0}(T>\Delta+t)\ \forall t$ a $E_{\theta_0}T = \Delta$;

kritický obor testu $\psi(T)$ vyhovujícího (3.4), (3.10) a (3.11) je symetrický kolem Δ a test splňuje i (3.6) a (3.7), neboť

$$E_{\theta_0}\left[T.\psi(T)\right] = E_{\theta_0}\left[(T-\Delta)\,\psi(T)\right] + \Delta.E_{\theta_0}\psi(T) = \alpha.E_{\theta_0} T.$$

Příklad 1. Nechť X má Poissonovo rozdělení s parametrem λ, tj.

$$P_\lambda(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots \quad . \tag{3.12}$$

Chceme testovat hypotézu $H: \lambda = \lambda_0$ proti $K: \lambda \neq \lambda_0$. (3.12) tvoří jednoparametrický exponenciální systém, kde $\theta = \log \lambda$ a $T(x) = x$. Podle věty 3.1 má stejnoměrně nejsilnější α-test hypotézy $H: \lambda = \lambda_0$ proti $K: \lambda \neq \lambda_0$ tvar

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \dots \quad x < C_1 \quad \text{nebo} \quad x > C_2 \\ \gamma_i & \dots \quad x = C_i, \quad i=1,2 \\ 0 & \dots \quad C_1 < x < C_2 \end{cases}$$

kde C_1, C_2 jsou celá kladná čísla a $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$ jsou čísla taková, že platí (3.6) a (3.7). Podmínka (3.6) dostává v našem případě tvar

$$e^{-\lambda_0}\left[\sum_{k=C_1+1}^{C_2-1}\frac{\lambda_0^k}{k!} + \sum_{i=1}^{2}(1-\gamma_i)\frac{\lambda_0^{C_i}}{C_i!}\right] = 1-\alpha$$

a podmínka (3.7) tvar

$$e^{-\lambda_0}\left[\sum_{k=C_1}^{C_2-2}\frac{\lambda_0^k}{k!} + \sum_{i=1}^{2}(1-\gamma_i)\frac{\lambda_0^{C_i-1}}{(C_i-1)!}\right] = 1-\alpha \ .$$

Příklad 2. Nechť $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Chceme testovat $H : \sigma = \sigma_0$ proti $K : \sigma \neq \sigma_0$. Rozdělení X má hustotu

$$\sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\},$$

která tvoří jednoparametrický exponenciální systém s parametrem $\theta = -\frac{1}{2\sigma^2}$; postačující statistika $T(x)$ je rovna $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Kritický obor stejnoměrně nejsilnějšího nestranného α-testu hypotézy H tedy podle věty 3.1 můžeme psát ve tvaru

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \text{ jestliže buď } \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < c_1 \text{ nebo } \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > c_2,$$

kde c_1 a c_2 musí vyhovovat (3.6) a (3.7).
Protože $\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ má za platnosti H rozdělení χ^2 o n-stupních volnosti (s hustotou $f_n(y)$), dostáváme podmínku (3.6) ve tvaru

$$\int_{c_1}^{c_2} f_n(y)\,dy = 1 - \alpha \qquad (3.13)$$

a podmínku (3.7) ve tvaru

$$\int_{c_1}^{c_2} y\, f_n(y)\,dy = (1-\alpha) E_{\sigma_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2/\sigma_0^2\right) = n(1-\alpha)$$

což dále s využitím identity $y.f_n(y)=n.f_{n+2}(y)$ můžeme přepsat v obecném tvaru

$$\int_{c_1}^{c_2} f_{n+2}(y)\,dy = 1-\alpha\,. \qquad (3.14)$$

Konstanty c_1 a c_2 pak určíme z podmínek (3.13) a (3.14) s pomocí tabulek rozdělení χ^2.

3.3. Testy hypotéz v exponenciálním systému za přítomnosti rušivého parametru

Předpokládejme, že rozdělení náhodného vektoru $\underset{\sim}{X}$ tvoří systém $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, kde $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ (θ_1 a θ_2 mohou být i vektory). Chceme testovat hypotézu $H : \theta \in \Theta_H$ proti $K : \theta \in \Theta_K$, kde hypotéza i alternativa jsou závislé jen na θ_1, tj. existují množiny Θ_{1H}, Θ_{1K} takové, že

$$\Theta_H = \{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta : \theta_1 \in \Theta_{1H}\}$$

$$\Theta_K = \{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta : \theta_1 \in \Theta_{1K}\} \quad .$$

Jinak řečeno, chceme testovat hypotézu o parametru θ_1, zatímco θ_2 je rušivým parametrem.

V takovém případě obecně neexistuje stejnoměrně nejsilnější α-test H proti K, ale může existovat stejnoměrně nejsilnější nestranný α-test. Problémem je, jak takový test nalézt. Nabízí se myšlenka nahradit rušivý parametr vhodným odhadem. Z teorie odhadu je známo, že vhodný odhad (tj. nejlepší nestranný odhad) rušivého parametru existuje tehdy, existuje-li úplná postačující statistika pro tento parametr. Z věty 1.5 a věty 1.6 vyplývá, že úplná postačující statistika existuje, je-li $\mathcal{P}$ exponenciální systém rozdělení.

Uvažujme tedy exponenciální systém rozdělení s hustotami

$$(3.15) \qquad p_\theta(x) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(\underset{\sim}{x}) + A(\underset{\sim}{\theta}) + B(\underset{\sim}{x})\right\}$$

vzhledem k míře μ. Budeme hledat stejnoměrně nejsilnější nestranné α-testy hypotéz

$H_1 : \theta_1 \leq \theta_1^{(0)}$ proti $K_1 : \theta_1 > \theta_1^{(0)}$

$H_2 : \theta_1 \leq \theta_1^{(1)}$ nebo $\theta_1 \geq \theta_1^{(2)}$ proti $K_2 : \theta_1^{(1)} < \theta_1 < \theta_1^{(2)}$

$H_3 : \theta_1^{(1)} \leq \theta_1 \leq \theta_1^{(2)}$ proti $K_3 : \theta_1 < \theta_1^{(1)}$ nebo $\theta_1 > \theta_1^{(2)}$

$H_4 : \theta_1 = \theta_1^{(o)}$ proti $K_4 : \theta_1 \neq \theta_1^{(o)}$,

kde $\underset{\sim}{\vartheta} = (\theta_2, \ldots, \theta_k)$ vystupuje jako rušivý parametr.

Následující věta ukáže, že SN nestranné α-testy hypotéz H_1, H_2, H_3 a H_4 existují pro taková rozdělení exponenciálního typu, pro která lze nalézt tzv. <u>ancilární statistiku</u>, tj. statistiku, která je za platnosti $\theta_1 = \theta_1^{(o)}$ u H_1 a H_4 a $\theta_1 = \theta_1^{(1)}$ a $\theta_1 = \theta_1^{(2)}$ u H_2 a H_3 stochasticky nezávislá na úplné postačující statistice pro rušivý parametr $\underset{\sim}{\vartheta}$. Ancilární statistika je pak i testovým kriteriem. Z následujících příkladů uvidíme, že taková statistika skutečně existuje pro řadu problémů.

<u>VĚTA 3.2.</u> <u>Nechť rozdělení náhodného vektoru</u> $\underset{\sim}{X}$ <u>tvoří exponenciální systém s hustotami</u> (3.15). <u>Nechť</u> $V(\underset{\sim}{x}) = h(T_1(\underset{\sim}{x}), \ldots, T_k(\underset{\sim}{x}))$ <u>je statistika taková, že při</u> $\theta_1 = \theta_1^o$ <u>rozdělení</u> $V(\underset{\sim}{x})$ <u>nezávisí na parametru</u> $\underset{\sim}{\vartheta} = (\theta_2, \ldots, \theta_k)$.

(i) <u>Jestliže funkce</u> $h(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ <u>je rostoucí v</u> t_1 <u>při pevných</u> $t_2, \ldots, t_k$, <u>pak existuje</u> SN <u>nestranný</u> α<u>-test</u> H_1 <u>proti</u> K_1 <u>a má tvar</u>

$$(3.16) \qquad \Phi_1(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \underline{\text{když}} \quad V(\underset{\sim}{x}) > C_o \\ \gamma & \underline{\text{když}} \quad V(\underset{\sim}{x}) = C_o \\ 0 & \underline{\text{když}} \quad V(\underset{\sim}{x}) < C_o \end{cases}$$

<u>kde</u> C_o a γ <u>jsou určena podmínkou</u>

$$(3.17) \qquad E_{\theta_1^{(o)}} \Phi_1(\underset{\sim}{x}) = \alpha .$$

(ii) Jestliže

(3.18) $h(t_1,\dots,t_k) = t_1 a(t_2,\dots,t_k) + b(t_2,\dots,t_k)$

kde $a(t_2,\dots,t_k) > 0$, existuje SN nestranný α-test H_4 proti K_4 a má tvar

$$(3.19)\quad \Phi_4(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \text{když } V(\underset{\sim}{x}) < C_1 \text{ nebo } V(\underset{\sim}{x}) > C_2 \\ \gamma_i & \text{když } V(\underset{\sim}{x}) = C_i, \quad i=1,2 \\ 0 & \text{když } C_1 < V(\underset{\sim}{x}) < C_2, \end{cases}$$

kde konstanty C_1, C_2, γ_1 a γ_2 jsou určeny podmínkami

$$(3.20)\quad E_{\theta_1^{(0)}} \Phi_4(\underset{\sim}{x}) = \alpha$$

a

$$(3.21)\quad E_{\theta_1^{(0)}}\left[V(x)\, \Phi_4(\underset{\sim}{x})\right] = \alpha \,.\, E_{\theta_1^{(0)}} V(\underset{\sim}{x}).$$

Důkaz: (i) Vzhledem k lemmatu 3.1 stačí hledat test Φ_1 mezi podobnými testy, tj. mezi testy vyhovujícími

$$(3.22)\quad E_\theta \Phi(\underset{\sim}{x}) = \alpha \quad \text{pro} \quad \theta \in \Theta^* = \left\{(\theta_1,\dots,\theta_k) : \theta_1 = \theta_1^0\right\} .$$

Podle věty 1.6 je statistika $(T_2(\underset{\sim}{x}),\dots,T_k(\underset{\sim}{x})) = T^*(\underset{\sim}{x})$ ohraničeně úplnou postačující statistikou na Θ^*, tedy (viz def. 1.6) pro libovolný test vyhovující (3.22) platí

$$(3.23)\quad E_\theta\left[\Phi(x) \mid T^*(x)\right] = \alpha \text{ s.j. } [P_\theta] \quad \forall \theta \in \Theta^*.$$

Obráceně, každý test vyhovující (3.23) vyhovuje (3.22) a je tedy podobný na Θ^*, neboť

$$E_\theta \Phi(x) = E_\theta(E_\theta[\Phi(x) \mid T^*(x)]) = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta^*.$$

SN test bude tedy shodný s testem, nejsilnějším mezi všemi testy vyhovujícími (3.23) (o takových testech se říká, že mají Neymanovu strukturu). Hledejme tedy nejsilnější test vyhovující (3.23).

Podmíněná rozdělení statistiky $T_1(\underset{\sim}{X})$ při daném $T^*(\underset{\sim}{X}) = t^*$ tvoří opět exponenciální systém s hustotami

$$p_\theta(t_1|t^*) = \exp\left\{\theta_1 t_1 + A_1(\theta_1,t^*)\right\}$$

vzhledem k nějaké míře ν_{t^*}. Podle věty 2.3 v této podmíněné situaci existuje SN test tvaru

$$(3.24)\qquad \Phi_1(t_1,t^*) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } t_1 > c(t^*) \\ \gamma(t^*) & t_1 = c(t^*) \\ 0 & t_1 < c(t^*) \end{cases}$$

kde funkce $c(t^*)$ a $\gamma(t^*)$ jsou určeny tak, aby platilo

$$E_{\theta_1^0}\left[\Phi_1(T_1,T^*)|T^* = t^*\right] = \alpha \quad \forall t^* .$$

Jestliže $V(x) = h(t_1,t^*)$ je rostoucí v t_1, lze test Φ_1 ekvivalentně vyjádřit

$$\Phi_1(V,t^*) = \begin{cases} 1 \;\ldots\; V > c_0(t^*) \\ \gamma_0(t^*) \ldots V = c_0(t^*) \\ 0 \;\ldots\; V < c_0(t^*) \end{cases}$$

kde

$$P_{\theta_1^0}\left\{V > c_0(T^*)|T^*=t^*\right\} + \gamma_0(t^*).P_{\theta_1^0}\left\{V=c_0(T^*)|T^*=t^*\right\} = \alpha \quad \forall t^*.$$

Test Φ_1 je třeba chápat jako podmíněný při daném $T^*=t^*$. Ukážeme však, že za našich předpokladů, kdy rozdělení V za platnosti $\theta_1=\theta_1^0$ nezávisí na $\underset{\sim}{\vartheta} = (\theta_2,\ldots,\theta_k)$, test Φ_1 ve skutečnosti nezávisí na T^*. Za těchto podmínek totiž platí

$$E_\theta\, \Phi_1(V,T^*) = \text{konst.} \quad \forall \theta \in \Theta^*(=\left\{(\theta_1,\ldots,\theta_k):\theta_1=\theta_1^0\right\})$$

a protože T^* je ohraničeně úplná postačující statistika pro $\underset{\sim}{\vartheta} = (\theta_2,\ldots,\theta_k)$, plyne odtud i

$$E_\theta\left[\Phi_1(V,T^*)\,|\,T^*=t^*\right] = \text{konst. sj. } [P_\theta] \quad \forall \theta \in \Theta^*.$$

To znamená, že $c_o(t^*)$ a $\gamma_o(t^*)$ nezávisí na t^* a výsledný test je tvaru (3.16).

(ii) Podobně jako v (i), SN test podmíněný jevem $T^*=t^*$ odvodíme pomocí věty 3.1 ve tvaru

$$(3.25) \quad \Phi_4(t_1,t^*) = \begin{cases} 1 & \ldots \quad t_1 < c_1(t^*) \text{ nebo } t_1 > c_2(t^*) \\ \gamma_i(t^*) & \ldots \quad t_1 = c_i(t^*), \quad i=1,2 \\ 0 & \ldots \quad c_1(t^*) < t_1 < c_2(t^*) \end{cases}$$

kde $c_i(t^*)$ a $\gamma_i(t^*)$, $i=1,2$, jsou určena tak, aby platilo

$$E_{\theta_1^o}\left[\Phi_4(T_1,T^*)\,|\,T^* = t^*\right] = \alpha \qquad \forall t^*$$

$$E_{\theta_1^o}\left[T_1 \cdot \Phi_4(T_1,T^*)\,|\,T^* = t^*\right] = \alpha \cdot E_{\theta_1^o}(T_1\,|\,T^* = t^*).$$

Vzhledem ke (3.18) můžeme Φ_4 ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\Phi_4(V,t^*) = \begin{cases} 1 & \ldots \quad V < c_1'(t^*) \quad \text{nebo} \quad V > c_2'(t^*) \\ \gamma_i'(t^*) & \ldots \quad V = c_i'(t^*), \quad i=1,2 \\ 0 & \ldots \quad c_1'(t^*) < V < c_2'(t^*) \end{cases}$$

kde $c_i'(t^*)$ a $\gamma_i'(t^*)$ jsou určena vztahy

$$E_{\theta_1^o}\left[\Phi_4(V,T^*)\,|\,T^*=t^*\right] = \alpha \quad \forall t^*$$

a

$$E_{\theta_1^o}\left[\Phi_4(V,T^*) \cdot \frac{V-b(T^*)}{a(T^*)}\,\Big|\, T^*=t^*\right] = \alpha \cdot E_{\theta_o}\left[\frac{V-b(T^*)}{a(T^*)}\,\Big|\, T^*=t^*\right]$$

neboli

$$E_{\theta_1^o}\left[V \cdot \Phi_4(V,T^*)\,|\,T^*=t^*\right] = \alpha \cdot E_{\theta_1^o}(V\,|\,T^*=t^*).$$

Protože opět rozdělení V nezávisí na $\theta_2,\ldots,\theta_k$ při $\theta_1=\theta_1^o$ a statistika T^* je ohraničeně úplná postačující statistika, jsou c_i' a γ_i' nezávislé na t^* a výsledný test je tvaru (3.19). Q.E.D.

Analogicky se dokáže následující věta o testech hypotéz H_2 a H_3:

VĚTA 3.3. Nechť rozdělení náhodného vektoru X tvoří exponenciální systém s hustotami (3.15). Nechť $V(\underset{\sim}{x}) = (h(T_1(\underset{\sim}{x}),\ldots,T_k(\underset{\sim}{x}))$ je statistika taková, že rozdělení $V(\underset{\sim}{X})$ nezávisí na parametru $\underset{\sim}{\vartheta} = (\theta_2,\ldots,\theta_k)$ při $\theta_1=\theta_1^{(1)}$ a $\theta_1=\theta_1^{(2)}$ a že funkce $h(t_1,\ldots,t_k)$ je rostoucí v t_1 při daných $t_2,\ldots,t_k$.

(i) Pak existuje SN nestranný α-test H_2 proti K_2 tvaru

$$\Phi_2(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \ldots \quad c_1 < V(\underset{\sim}{x}) < c_2 \\ \gamma_i & \ldots \quad V(\underset{\sim}{x}) = c_i, \quad i=1,2 \\ 0 & \ldots \quad V(\underset{\sim}{x}) < c_1 \quad \text{nebo} \quad V(\underset{\sim}{x}) > c_2 \end{cases}$$

kde $E_{\theta_1^{(1)}} \Phi_2(\underset{\sim}{X}) = E_{\theta_1^{(2)}} \Phi_2(\underset{\sim}{X}) = \alpha$;

(ii) existuje SN nestranný α-test H_3 proti K_3 tvaru

$$\Phi_3(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \ldots \quad V(\underset{\sim}{x}) < c_1 \quad \text{nebo} \quad V(\underset{\sim}{x}) > c_2 \\ \gamma_i & \ldots \quad V(\underset{\sim}{x}) = c_i, \quad i=1,2 \\ 0 & \ldots \quad c_1 < V(\underset{\sim}{x}) < c_2 \end{cases}$$

kde

$$E_{\theta_1} \Phi_4(\underset{\sim}{X}) = E_{\theta_2} \Phi_4(\underset{\sim}{X}) = \alpha .$$

3.4. Testy hypotéz o rozptylu normálního rozdělení

(1) Nechť $X_1,\ldots,X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\xi, \sigma^2)$. V odstavci 2.7 jsme odvodili SN α-test hypotézy $H_1: \sigma \leq \sigma_0$ proti $K_1: \sigma > \sigma_0$ a ukázali jsme, že

neexistuje SN α-test hypotézy $H_2: \sigma \geq \sigma_0$ proti $K_2: \sigma < \sigma_0$. Pomocí věty 3.1 nyní dokážeme, že existuje SN nestranný α-test H_2 proti K_2 a tento test sestrojíme.

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ má hustotu

$$(3.26) \quad (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\xi}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\xi^2}{2\sigma^2} \right\},$$

což je exponenciální hustota (3.15), kde

$$\theta_1 = -\frac{1}{2\sigma^2}, \qquad \theta_2 = \frac{n\xi}{\sigma^2}$$

$$T_1(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad T_2(x) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

H_2 a K_2 přepišme ve tvaru: $H_2: \theta_1 \geq \theta_1^0$; $K_2: \theta_1 < \theta_1^0$, kde $\theta_1^0 = -\frac{1}{2\sigma_0^2}$. Uvažujme statistiku

$$V = h(T_1, T_2) = T_1 - n\,T_2^2, \text{ neboli}$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Funkce $h(T_1, T_2)$ je rostoucí v T_1 a za platnosti $\theta_1 = \theta_1^0$, má V/σ_0^2 rozdělení $\chi^2(n-1)$, tedy nezávislé na θ_2. Podle věty 3.2 existuje SN nestranný α-test H_2 proti K_2 s kritickým oborem

$$(3.27) \quad \Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \ldots \quad V(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \leq c_0$$

kde c_0 je určeno podmínkou

$$\int_0^{c_0/\sigma_0^2} f_{n-1}(x)\,dx = \alpha$$

kde $f_{n-1}(x)$ značí hustotu rozdělení χ^2 o $(n-1)$ stupních volnosti.

(2) Zcela analogicky odvodíme podle věty 3.3 SN nestranný α -test hypotézy H_3: $\sigma \leq \sigma_1$ nebo $\sigma \geq \sigma_2$ proti K_3: $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ s kritickým oborem

$$\Phi_3(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \dots \quad c_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \leq c_2$$

kde

$$\int_{c_1/\sigma_1^2}^{c_2/\sigma_1^2} f_{n-1}(x)\,dx = \int_{c_1/\sigma_2^2}^{c_2/\sigma_2^2} f_{n-1}(x)\,dx = \alpha .$$

(3) Uvažujme hypotézu H_4: $\sigma = \sigma_0$ proti alternativě K_4: $\sigma \neq \sigma_0$. Protože funkce $h(T_1, T_2) = T_1 - nT_2^2$ je lineární v T_1, dostáváme z věty 3.2 SN nestranný α-test ve tvaru

$$\Phi_4(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \leq c_1 \quad \text{nebo} \quad \geq c_2$$

kde

$$\int_{c_1/\sigma_0^2}^{c_2/\sigma_0^2} f_{n-1}(x)\,dx = \int_{c_1/\sigma_0^2}^{c_2/\sigma_0^2} f_{n+1}(x)\,dx = 1 - \alpha .$$

Ve všech těchto případech dovedeme jednoduše vyjádřit i sílu testu: např. silofunkce jednostranného testu (3.27) je rovna

$$\beta(\sigma) = P_\sigma\left\{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \leq \frac{c_0}{\sigma^2}\right\} = \int_0^{c_0/\sigma^2} f_{n-1}(x)\,dx .$$

3.5. Testy hypotéz o průměru normálního rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je opět náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\xi, \sigma^2)$. Uvažujme nejprve hypotézy H_1: $\xi \leq \xi_0$ proti K_1: $\xi > \xi_0$ a H_2: $\xi = \xi_0$ proti K_2: $\xi \neq \xi_0$. Bez újmy obecnosti můžeme položit $\xi_0=0$ (jinak použijeme transformace $X_i' = X_i - \xi_0$, $i=1,\dots,n$). $(X_1,\dots,X_n)$ má hustotu (3.26), ve které položíme

$$(3.28)\qquad \theta_1 = \frac{n\xi}{\sigma^2},\quad \theta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2},\quad T_1(x)=\bar{x},\quad T_2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Uvažujme statistiku

$$V(\underset{\sim}{x}) = h(T_1,T_2) = \frac{T_1}{\sqrt{T_2-nT_1^2}} .$$

Protože $V(\underset{\sim}{x}) = V(x_1,\dots,x_n) = V(\frac{x_1}{\sigma},\dots,\frac{x_n}{\sigma})$ pro lib. $\sigma>0$, je rozdělení $V(\underset{\sim}{X})$ za platnosti $\theta_1=0$ nezávislé na $\theta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$; kromě toho je funkce $h(t_1,t_2)$ rostoucí v t_1. Podle věty 3.2 tedy eistuje SN nestranný α-test $H_1: \xi \leq 0$ proti $K_1: \xi>0$ s kritickým oborem

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \dots \quad V(\underset{\sim}{x}) \geq c_0'$$

neboli

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \dots \quad t(\underset{\sim}{x}) \geq c_0$$

kde
$$t(\underset{\sim}{x}) = \frac{\sqrt{n}\ \bar{x}}{\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2\right]^{1/2}}$$

a c_0 je určeno tak, aby platilo

$$\int_{c_0}^{\infty} t_{n-1}(y)\,dy = \alpha ,$$

kde $t_{n-1}(y)$ je hustota t-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

Nahradíme-li statistiku $V(\underset{\sim}{x})$ statistikou $W(\underset{\sim}{x}) = \bar{x}/(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$, vidíme, že rozdělení $W(\underset{\sim}{X})$ rovněž nezávisí na σ při $\xi=0$ a že kromě toho je W lineární v $T_1=\bar{X}$. Podle věty 3.2 pak existuje SN nestranný test hypotézy

$H_2: \xi_j = 0$ proti $K_2: \xi_j \neq 0$ s kritickým oborem (rozdělení W je symetrické kolem 0, je-li $\xi_j = 0$)

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \dots \quad |W(\underset{\sim}{x})| > c'$$

kde $P_{\xi_j=0}(|W| \geq c') = \alpha$.

$W(\underset{\sim}{x})$ a $t(\underset{\sim}{x})$ jsou ve vztahu

$$t(\underset{\sim}{x}) = \frac{\sqrt{(n-1)n}\; W(x)}{\sqrt{1-n\, W^2(x)}} ,$$

což znamená, že $|t(\underset{\sim}{x})|$ je rostoucí funkcí $|W(\underset{\sim}{x})|$, SN nestranný α-test lze tedy přepsat ve tvaru

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \quad \dots \quad |t(\underset{\sim}{x})| \geq c$$

kde $\int_c^{\infty} t_{n-1}(y)\,dy = \frac{\alpha}{2}$.

Píšeme-li hypotézy ve tvaru $\xi_j \leq \xi_o$ (resp. $\xi_j = \xi_o$), musíme $t(\underset{\sim}{x})$ přepsat

$$t(\underset{\sim}{x}) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \xi_o)}{\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2\right]^{1/2}} .$$

Z reprezentace (3.28) plyne, že podobně lze sestrojit SN nestranný α-test $H_3: a = \frac{\xi}{\sigma^2} \leq b$, nikoli však SN nestranný test hypotézy $H: a \leq \xi_j \leq b$ nebo $a \leq \frac{\xi}{\sigma} \leq b$.

3.6. Srovnání rozptylů dvou normálních rozdělení

Nechť $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_m)$ a $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ jsou nezávislé náhodné výběry ze dvou nezávislých normálních populací $N(\xi_1, \sigma_1^2)$ a $N(\xi_2, \sigma_2^2)$. Uvažujme hypotézy $H_1: \sigma_2^2/\sigma_1^2 \leq a$ proti $K_1: \sigma_2^2/\sigma_1^2 > a$ a $H_2: \sigma_2^2/\sigma_1^2 = a$ proti $K_2: \sigma_2^2/\sigma_1^2 \neq a$,

$a > 0$.

Sdružená hustota (X,Y) má tvar

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \frac{m\xi_1}{\sigma_1^2}\bar{x} + \frac{n\xi_2}{\sigma_2^2}\bar{y} + A(\xi_1, \xi_2, \sigma_1, \sigma_2)\right\}$$

a tvoří exponenciální systém s parametry

$$\theta_1 = -\frac{1}{2\sigma_2^2} + \frac{1}{2a\sigma_1^2}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2\sigma_1^2}, \quad \theta_3 = \frac{n\xi_2}{\sigma_2^2},$$

$$\theta_4 = \frac{m\xi_1}{\sigma_1^2}$$

a s postačujícími statistikami

$$T_1 = \sum_{j=1}^{n} Y_j^2, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} Y_j^2, \quad T_3 = \bar{Y}, \quad T_4 = \bar{X}.$$

Hypotézy H_1 a H_2 přepíšeme ve tvaru $H_1': \theta_1 \leq 0$ proti $K_1': \theta_1 > 0$ a $H_2': \theta_1 = 0$ proti $K_2': \theta_1 \neq 0$. Uvažujme statistiku

$$V(\underset{\sim}{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2/a}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = h(T_1, T_2, T_3, T_4) = \frac{(T_1 - nT_3^2)/a}{T_2 - \frac{T_1}{a} - mT_4^2} .$$

Pak h je rostoucí v T_1 a rozdělení $V(x)$ je za platnosti $\sigma_2^2 = a\,\sigma_1^2$ nezávislé na θ_2, θ_3 a θ_4. Podle věty 3.2 existuje SN nestranný test hypotézy H_1 s kritickým oborem

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \;\ldots\; \frac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2/a(n-1)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(m-1)} \geq C \;;$$

C vyhovuje podmínce

$$\int_{C}^{\infty} f_{n-1,m-1}(y)\,dy = \alpha ,$$

kde $f_{n-1,m-1}(y)$ je hustota F rozdělení o $(n-1)$ a $(m-1)$ stupních volnosti.

Abychom mohli použít větu 3.2 i na hypotézu $H_2: \sigma_2^2 = a\sigma_1^2$ proti $K_2: \sigma_2^2 \neq a\sigma_1^2$, nahraďme statistiku V statistikou W, která je lineární v T_1:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{n} (Y_j-\bar{Y})^2/a}{\sum_{i=1}^{m} (X_i-\bar{X})^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2} = \frac{(T_1 - n\,T_3^2)/a}{T_2 - m\,T_4^2 - \frac{n}{a}\,T_3^2} = \frac{V}{1+V} .$$

Pak rozdělení W je za platnosti $\sigma_2^2 = a\sigma_1^2$ nezávislé na θ_2, θ_3 a θ_4 s stejnoměrně nejsilnější nestranný test H_2 proti K_2 má kritický obor

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = 1 \;\dots\; W(\underset{\sim}{x}) \leq C_1 \quad \text{nebo} \quad W(\underset{\sim}{x}) \geq C_2 \tag{3.29}$$

kde C_1 a C_2 jsou určena tak, aby platilo

$$P_{\sigma_2^2=a\sigma_1^2}\left\{C_1 < W(\underset{\sim}{X}) < C_2\right\} = 1 - \alpha$$

a

$$E_{\sigma_2^2=a\sigma_1^2}\left\{W(\underset{\sim}{X})\,.\,\Phi(X)\right\} = \alpha\, E_{\sigma_2^2=a\sigma_1^2}\, W(\underset{\sim}{X}) .$$

Dá se ukázat, že W má za platnosti $\sigma_2^2 = a\sigma_1^2$ betarozdělení s hustotou

$$B_{\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}}(w) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, w^{\frac{n-3}{2}}(1-w)^{\frac{m-3}{2}} , \quad 0<w<1$$

a že platí

$$w\, B_{\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}}(w) = \frac{n-1}{m+n-2}\, B_{\frac{n+1}{2},\frac{m-1}{2}}(w) .$$

SN nestranný test pro H_2 proti K_2 má tedy kritický obor (3.29), kde C_1 a C_2 jsou určena podmínkami

$$\int_{c_1}^{c_2} B_{\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}}(w)\,dw = \int_{c_1}^{c_2} B_{\frac{n+1}{2},\frac{m-1}{2}}(w)\,dw = 1-\alpha .$$

3.7. Srovnání průměrů dvou normálních rozdělení

Nechť $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)$ a $\underset{\sim}{Y} = (Y_n,\dots,Y_n)$ jsou náhodné výběry ze dvou nezávislých normálních populací $N(\xi_1,\sigma_1^2)$ a $N(\xi_2,\sigma^2)$. Hypotéza o rovnosti průměrů ξ_1 a ξ_2 při nestejných neznámých rozptylech je tzv. Behrens-Fisherův problém a nedá se řešit metodami této kapitoly. Proto předpokládejme, že $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Sdružená hustota $p(x,y,\xi_1,\xi_2,\sigma)$ má pak tvar

$$(3.30)\quad C(\xi_1,\xi_2,\sigma).\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) + \frac{\xi_1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} x_i + \frac{\xi_2}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} y_j\right\} .$$

Uvažujme hypotézy :

$H_1: \xi_2 - \xi_1 \leq 0$ proti $K_1: \xi_2 - \xi_1 > 0$

a $H_2: \xi_1 = \xi_2$ proti $K_2: \xi_1 \neq \xi_2$.

Je vhodné provést reparametrizaci

$$\theta_1 = \frac{\xi_2-\xi_1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^{-1}, \quad \theta_2 = \frac{m\xi_1+n\xi_2}{(m+n)\sigma^2}, \quad \theta_3 = -\frac{1}{2\sigma^2} .$$

Použijeme-li identity

$$\frac{m\xi_1\bar{x} + n\xi_2\bar{y}}{\sigma^2} = \frac{(\bar{y}-\bar{x})(\xi_2-\xi_1)}{\sigma^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{(m\bar{x}+n\bar{y})(m\xi_1+n\xi_2)}{(m+n)\sigma^2},$$

můžeme hustotu (3.30) přepsat ve tvaru

$$C(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\ \exp\left\{\sum_{i=1}^{3} \theta_i\ T_i(x,y)\right\}$$

kde

$$T_1=\bar{Y}-\bar{X}, \quad T_2=m\bar{X}+n\bar{Y}, \quad T_3=\sum_{i=1}^{m} X_i^2+\sum_{j=1}^{n} Y_j^2$$

a hypotézy H_1 a H_2 pak dostávají tvar

$$H_1:\ \theta \leq 0 \quad : \quad K_1:\ \theta>0$$

$$H_2:\ \theta = 0 \qquad K_2:\ \theta\neq 0.$$

Uvažujme statistiku

$$V = \frac{\bar{Y}-\bar{X}}{\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right]^{1/2}} = T_1.\left(T_3-\frac{T_2^2}{m+n}-\frac{mn}{m+n}\,T_1^2\right)^{-1/2}.$$

Za platnosti $\xi_1=\xi_2$ rozdělení statistiky V nezávisí na společné hodnotě ξ_1, ξ_2 a na σ a kromě toho je V rostoucí v T_1. Podle věty 3.2 tedy existuje SN nestranný α-test H_1 proti K_1 s kritickým oborem

$$\Phi(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = 1 \quad \ldots \quad V \geq c_0$$

neboli

$$\Phi(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = 1 \quad \ldots \quad t(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) \geq C$$

kde

$$t(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = \frac{(\bar{y}-\bar{x})\ \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}{\left\{\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2\right]/(m+n-2)\right\}^{1/2}}$$

a C je určeno vztahem

$$\int_C^\infty f_{m+n-2}(x)\,dx = \alpha, \quad \text{kde } f_{m+n-2} \text{ je hustota rozdělení}$$

t o $(m+n-2)$ stupních volnosti.

Statistika V však není lineární v T_1; proto uvažujme jinou statistiku

$$W = (\bar{Y}-\bar{X})\left[\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \sum_{j=1}^{n} Y_j^2 - \frac{(m\bar{X}+n\bar{Y})^2}{m+n}\right]^{-1/2} = \frac{T_1}{(T_3 - T_2^2/(m+n))^{1/2}} .$$

Pak V a W jsou ve vzájemném vztahu

$$V = W\left[1 - \frac{mn}{m+n} W^2\right]^{-1/2} ,$$

odkud plyne, že $|V|$ je rostoucí funkcí $|W|$ a že rozdělení W za platnosti $\xi_1 = \xi_2$ nezávisí na ξ_1 a σ. Kromě toho je W lineární v T_1 a rozdělení W je za platnosti $\xi_1 = \xi_2$ symetrické kolem 0. Podle věty 3.2 a jejího důsledku, SN pak existuje nestranný α-test H_2 proti K_2 tvaru

$$\Phi(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = 1 \quad \dots \quad |W| > c_0$$

neboli

$$\Phi(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = 1 \quad \dots \quad |t(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})| > c,$$

kde

$$\int_c^{\infty} f_{m+n-2}(x)\,dx = \frac{\alpha}{2} .$$

3.8. Testy nezávislosti ve dvourozměrném normálním rozdělení

Nechť $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení s hustotou

$$\frac{1}{(\sigma_1 \sigma_2 2\pi\sqrt{1-\rho^2})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_1)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_1)(y_i - \xi_2) + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \xi_2)^2\right]\right\} \qquad (3.31)$$

Uvažujme hypotézy

H_1: $\rho \leq 0$ proti K_1: $\rho > 0$

H_2: $\rho = 0$ proti K_2: $\rho \neq 0$.

Hypotéza H_2 je hypotézou nezávislosti X a Y; hypotéza

H_1 znamená, že X a Y jsou buď nezávislé nebo záporně závislé. Hustota (3.31) tvoří exponenciální systém s parametry

$$\theta_1 = \frac{\varrho}{\sigma_1 \sigma_2(1-\varrho^2)}, \quad \theta_2 = \frac{-1}{2\sigma_1^2(1-\varrho^2)}, \quad \theta_3 = \frac{-1}{2\sigma_2^2(1-\varrho^2)}$$

$$\theta_4 = \frac{1}{1-\varrho^2} \cdot \left(\frac{\xi_1}{\sigma_1^2} - \frac{\xi_2 \varrho}{\sigma_1 \sigma_2}\right), \quad \theta_5 = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{\xi_2}{\sigma_2^2} - \frac{\xi_1 \varrho}{\sigma_1 \sigma_2}\right)$$

a s postačujícími statistikami

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad T_3 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2, \quad T_4 = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_5 = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Hypotézy H_1 a H_2 lze pak psát v ekvivaletním tvaru

$$H_1: \theta_1 \leq 0, \qquad K_1: \theta_1 > 0$$

$$H_2: \theta_1 = 0, \qquad K_2: \theta_1 \neq 0.$$

Uvažujme výběrový korelační koeficient

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right]^{1/2}} = \frac{T_1-(T_4 T_5/n)}{\left[\left(T_2-\frac{T_4^2}{n}\right)\left(T_2-\frac{T_5^2}{n}\right)\right]^{1/2}}.$$

Vidíme, že R je lineárně rostoucí v T_1 a za platnosti $\varrho=0$ rozdělení R nezávisí na $\xi_1, \xi_2, \sigma_1, \sigma_2$, a tedy nezávisí na $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$. Z věty 3.2 pak vyplývá SN nestranný α-test H_1 proti K_1 ve tvaru

$$\Phi_1(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = 1 \qquad \text{jestliže} \qquad R > c_0$$

neboli

$$\Phi_1(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = 1 \qquad \text{jestliže} \qquad \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2} > c$$

kde $\int_{c}^{\infty} f_{n-2}(x)\,dx = \alpha$; f_{n-2} je hustota rozdělení t o (n-2) stupních volnosti.

Protože R je lineární v T_1 a za platnosti $\rho=0$ je rozdělení R symetrické kolem 0, dostáváme z věty 3.2 a jejího důsledku SN nestranný α-test H_2 proti K_2 ve tvaru

$$\Phi_2(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = 1 \quad \text{jestliže} \quad \frac{|R|}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2} > c_1$$

kde $$\int_{c_1}^{\infty} f_{n-2}(x)\,dx = \alpha/2.$$

Protože rozdělení R závisí jen na ρ a nezávisí na $\xi_1, \xi_2, \sigma_1, \sigma_2$, je i silofunkce testů Φ_1 a Φ_2 závislá pouze na ρ.

3.9. Srovnání dvou binomických populací

Nechť X a Y jsou dvě nezávislé binomické náhodné veličiny se sdruženým rozdělením

$$P(X=x,Y=y) = \binom{m}{x}\binom{n}{y} p_1^x\, p_2^y (1-p_1)^{m-x}(1-p_2)^{n-y}, \tag{3.32}$$

$$x=0,1,\dots,m$$
$$y=0,1,\dots,n$$
$$0\le p_1,p_2\le 1.$$

Chceme testovat hypotézu

$$H: p_2 \le p_1 \quad \text{proti} \quad K: p_2 > p_1.$$

(3.32) přepíšeme jako hustotu exponenciálního systému ve tvaru

$$\binom{m}{m}\binom{n}{y}(1-p_1)^m(1-p_2)^n \exp\left\{y\left[\ln\frac{p_2}{1-p_2} - \ln\frac{p_1}{1-p_1}\right] + (x+y)\ln\frac{p_1}{(1-p_1)}\right\}$$

LITERATURA

[1] J.Anděl: Matematická statistika. SNTL 1978.

[2] P.J.Bickel and K.A. Doksum: Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics. Holden-Day, San Francisco 1977.

[3] H. Büning, G. Trenkler: Nichtparametrische statistische Methoden. W.de.Gruyter,W.Berlin 1978.

[4] J. Jurečková: Pořadové testy (skripta). SPN 1982.

[5] A.M.Kagan, Ju.V.Linnik,C.R.Rao: Charakterizacionnyje zadači matematičeskoj statistiki. Nauka,Moskva 1972.

[6] E.L.Lehmann: Testing Statistical Hypotheses. J.Wiley, New York 1959.

[7] J.Likeš-J.Laga: Základní statistické tabulky. SNTL 1978.