

2. Prednáška

Tok tekutín

Tekutina: **kvapalina** (vlastnosti - má objem, nemá tvar, málo stlačiteľná, hustota závisí od teploty málo o tlaku...)

plyny (nemajú ani objem, ani tvar, sú stlačiteľné, P - V - T vlastnosti – zákony plynov ...)

Hydrodynamika – opis dejov v mikromerítke (štruktúra turbulencie..)

Hydraulika – opis makrosystémov (priemyselné zariadenia, potrubia...)

Cieľ:

kvantitatívny opis prúdenia

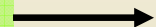
Fyzikálny model

Matematický model

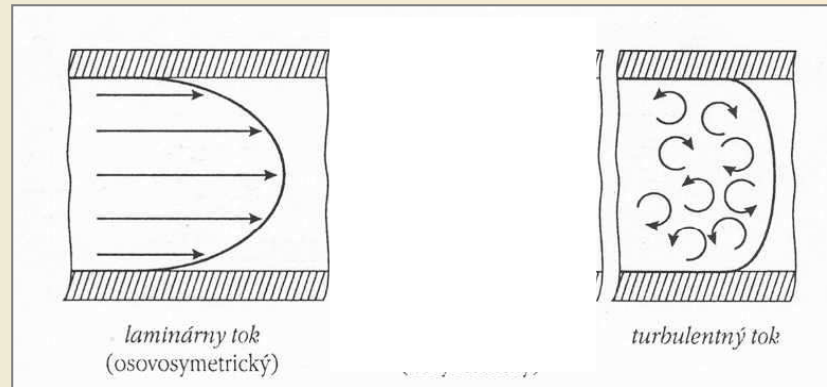
*Bilancie
hmotnosti
energie
hybnosti*

*Konštitutívne rovn.
Fickov zákon
Fourierova rovnica
Newtonov zákon*

*Empirické vzťahy,
Kriteriálne rovnice*



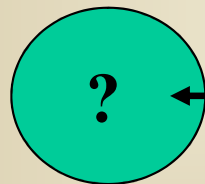
Štruktúra toku



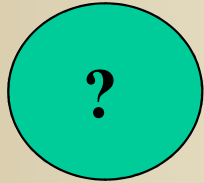
Laminárny tok – pohyb tekutiny vo vrstvách, v smere prúdenia, ktoré sa vzájomne nemiešajú

Turbulentný tok – vznik vírov rôznej veľkosti, pohyb častíc vo všetkých smeroch

Prechodný tok – náhodné zmeny medzi laminárnym a turbulentným tokom



Viskózne a zotrvačné sily



$$Re = \frac{l v \rho}{\mu}$$

Reynoldsovo číslo (kritérium)– miera podobnosti zotrvačných a viskózných síl

l – charakteristický rozmer zariadenia, *v* – rýchlosť prúdenia tekutiny, ρ , μ – hustota a dynamická viskozita tekutiny

***Re* číslo - charakter toku:**

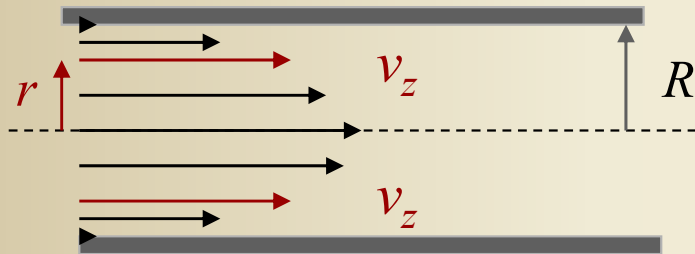
***Re* < 2000 laminárny tok (2300)**

***Re* > 4000 turbulentný tok (10 000)**

2000 < *Re* < 4000 prechodný tok (2300 < *Re* < 10 000)

Kvapaliny rôznej kvality (ρ , μ) prúdiace rôznou rýchlosťou v potrubí rôzneho priemeru (*d*) majú rovnaký charakter toku, ak sa zhodujú v hodnote Reynoldsového kritéria

Výpočet rychlostního profilu laminárního toku tekutiny v potrubí



R – polomer potrubia

r – vzdialenosť od osi potrubia

v_z – lokálna rýchlosť, rýchlosť častíc v prúdnici

Stokesov vzťah

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\Delta P}{L} \right) (R^2 - r^2)$$

Poznámka: z bilancie hybnosti

na stene potrubia $r = R$

$$v_z = 0$$

v osi potrubia $r = 0$, $v_z = v_{z,max}$

$$v_{z,max} = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\Delta P}{L} \right) R^2$$

$$v_z = v_{z,max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Priemerná rýchlosť tekutiny v potrubí

$$w = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\int_0^R 2\pi r v_z dr}{\int_0^R 2\pi r dr}$$

$$w = \frac{(-\Delta P)R^2}{8L\mu} = \frac{(-\Delta P)d^2}{32L\mu}$$

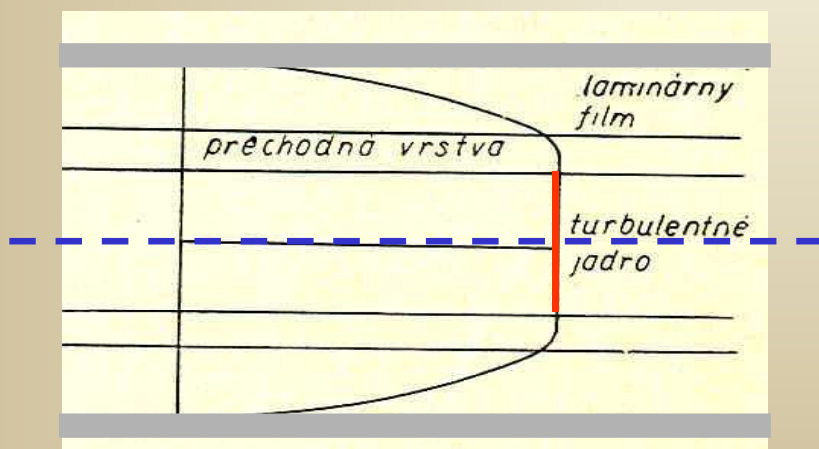
Vzťah medzi rýchlosťou v osi laminárneho toku $v_{z,max}$ a priemernou rýchlosťou v potrubí w

$$w = \frac{v_{z,max}}{2}$$

Poiseuilov vzťah – strata tlaku v potrubí pri laminárnom toku tekutiny

$$-\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{32L\mu w}{d^2 \rho}$$

Rozdelenie rýchlostí pri turbulentnom toku tekutiny v potrubí



laminárny film

(!!! určenie hrúbky)

prechodná vrstva

turbulentné jadro – rýchlosť častíc už nezávisí od vzdialenosti od osi potrubia

Karmánov vzťah

$$\frac{v_z}{v_{z,\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}$$

Vzťahy medzi priemernou a osovou rýchlosťou

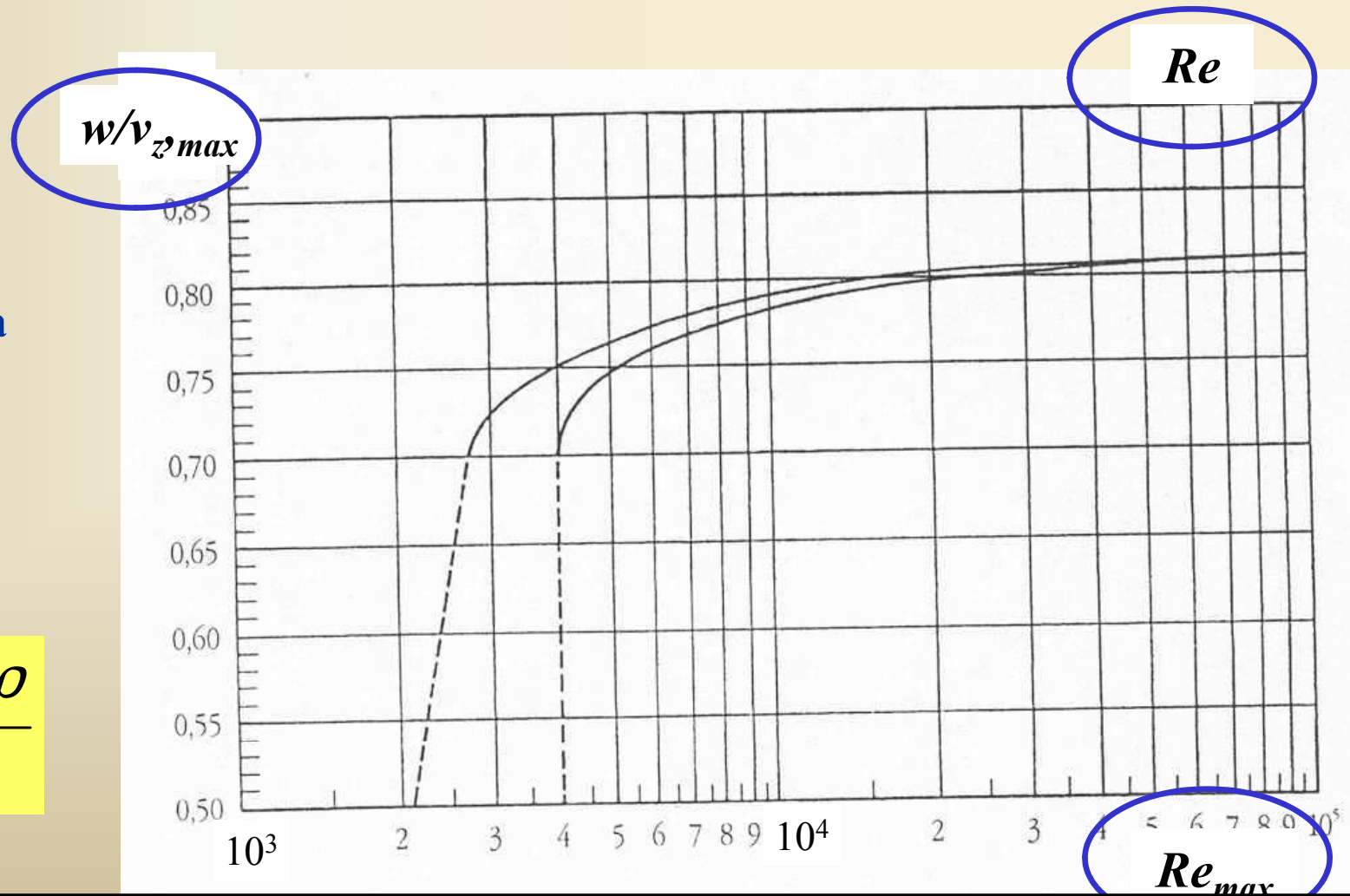


$$\frac{w}{v_{z,\max}} = 0.82 \quad Re > 10^5$$

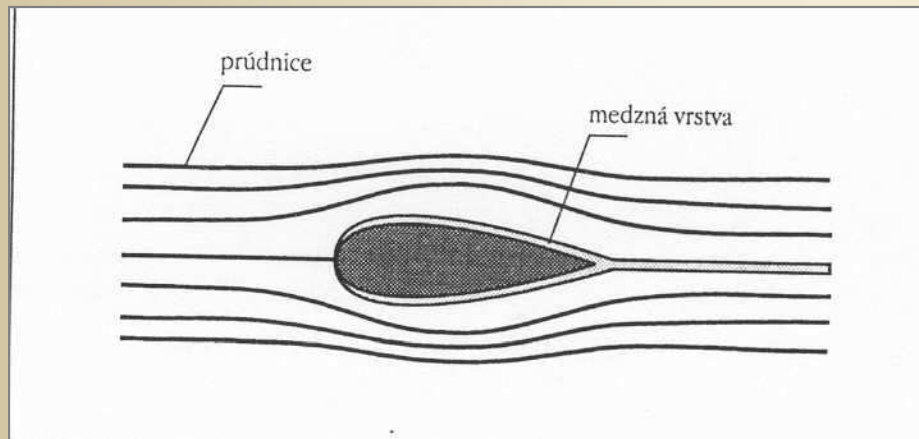
Závislosť pomeru $w/v_{z,\max}$ od Re čísla

$$Re = \frac{dw\rho}{\mu}$$

$$Re_{\max} = \frac{dv_{z,\max}\rho}{\mu}$$



Poznámka: Medzná vrstva, obtekanie tuhých telies



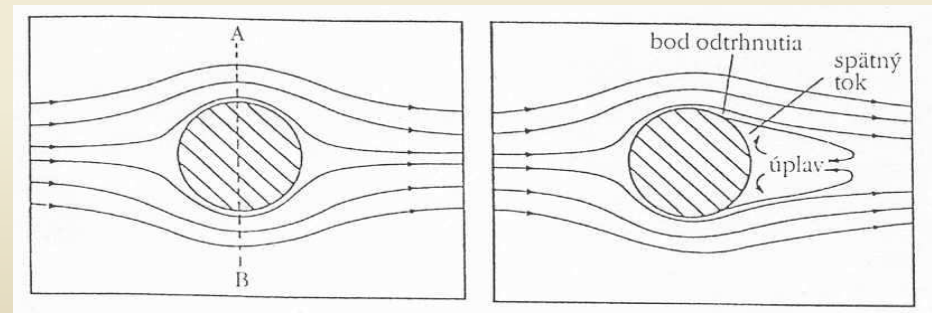
Medzná vrstva

- vytvára sa pri tuhom povrchu
- prevláda v nej vplyv viskózných síl
- spôsobuje zmenšenie lokálnych rýchlostí tekutiny

Medzná vrstva má rozhodujúci vplyv na rýchlosť prenosu hybnosti, tepla a látky

- laminárna medzná vrstva
- turbulentná medzná vrstva (odtrhnutie medznej vrstvy – úplav)

Charakter prúdenia v medznej vrstve nad povrchom tuhého telesa \leftrightarrow sila, ktorou pôsobí tekutina na povrch tuhého telesa - **odpor prostredia**



Tok nad povrchom priečne obtekaného valca, prúdnice pri laminárnom a turbulent. obtekaní

Aplikácie — **snaha, na základe charakteru prúdenia v medznej vrstve, zmenšiť hydrodynamický odpor** – konštrukcie automobilov, lietadiel...

Bilancia hmotnosti v mikrosústave v 1. prednáške

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Rovnica kontinuity

\mathbf{v} - lokálna rýchlosť spojitého prostredia $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$

ρ - objemová hmotnosť, $(\rho \mathbf{v})$ - objemová hybnosť

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Divergencia vektora
lokálnej rýchlosti
prúdenia tekutiny

Nestlačiteľná tekutina $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

Dôsledok
priestorovej
nehomogenity

Priestorovo homogénne pole $\rightarrow \nabla \rho = 0$

Dôsledok
neustálenosti
poľa hustoty

Ustálené pole $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$

Aplikácia - potrubie \rightarrow

vyvinutý ustálený tok tekutiny v smere osi potrubia z

Bilancia hmotnosti - rovnica kontinuity

Ustálený tok tekutiny v potrubí

$$\overset{\circ}{m}_1 = \overset{\circ}{m}_2$$

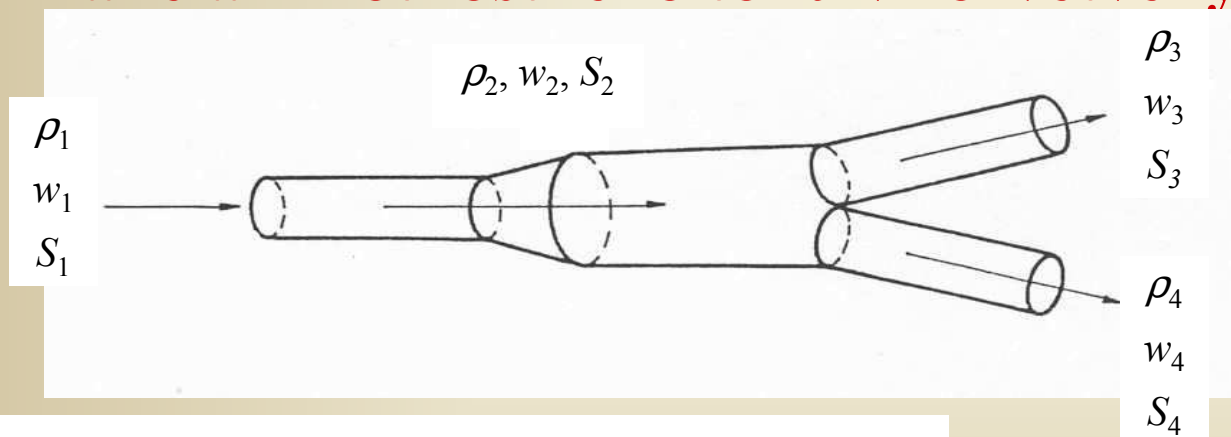
Ravnica kontinuity pre potrubie

$$\rho_1 w_1 S_1 = \rho_2 w_2 S_2$$

Ak hustota je konštantná

$$w_1 S_1 = w_2 S_2$$

Bilancia hmotnostného toku v rozvetvených potrubíach



$$\overset{\circ}{m}_1 = \overset{\circ}{m}_2 = \overset{\circ}{m}_3 + \overset{\circ}{m}_4$$

Obr. Tok tekutiny v rozvetvenom potrubí

Ravnica kontinuity pre rozvetvené potrubie má tvar

$$\rho_1 w_1 S_1 = \rho_2 w_2 S_2 = \rho_3 w_3 S_3 + \rho_4 w_4 S_4$$




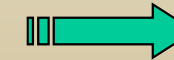
$$w_1 S_1 = w_2 S_2 = w_3 S_3 + w_4 S_4$$

Bilancia mechanickej energie ideálnej tekutiny

Pri praktických aplikáciách prúdenia tekutín potrebujeme zvyčajne určiť :

- energiu potrebnú na prepravu tekutiny
- prepravnú kapacitu daného potrubného systému
- pre dané miesto v systéme určiť - tlak tekutiny
- rýchlosť prúdiacej tekutiny

Predpoklady pre odvodenie

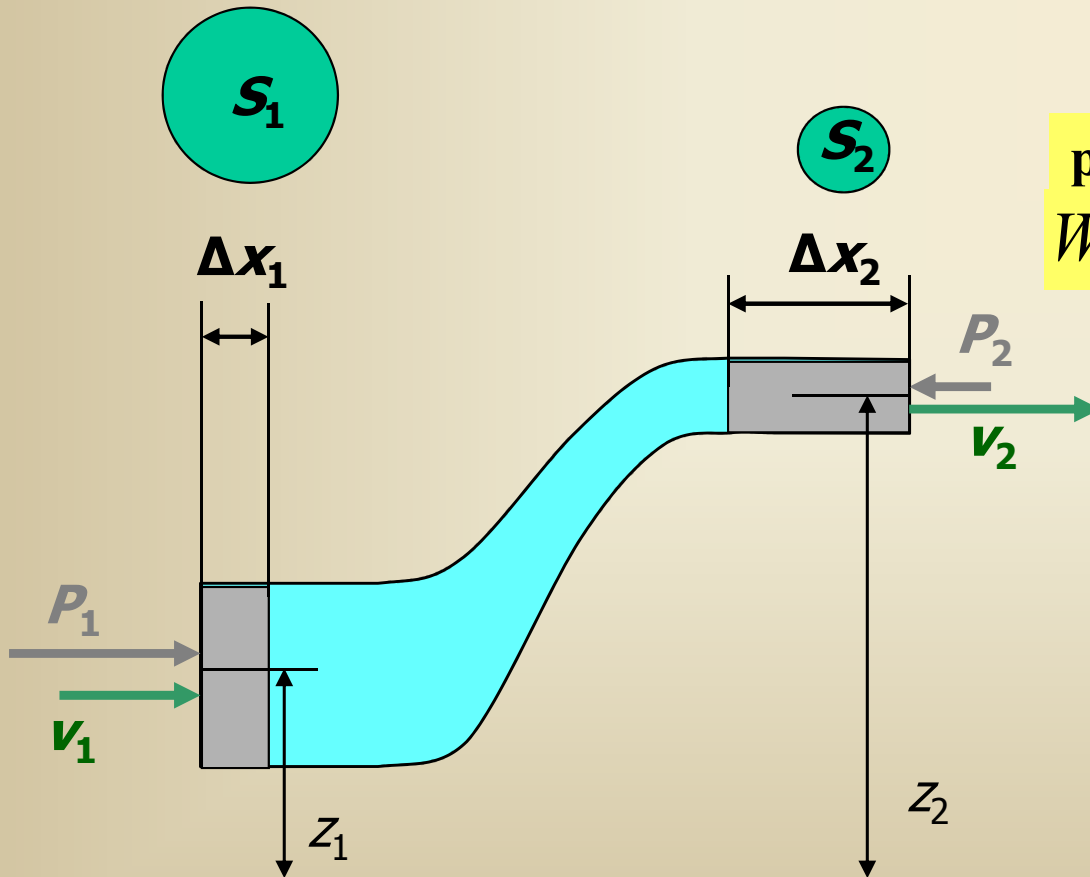
- ustálené prúdenie  systém bez akumulácie
- tekutina je nestlačiteľná  konštantná hustota
- nevírové  usporiadané prúdenie
- neviskózna  nevytvára sa profil rýchlosti

Bilancia mechanickej energie ideálnej tekutiny

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta V \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta V \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \Delta V \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E_p = \Delta V \rho g h_2 - \Delta V \rho g h_1 = \Delta V \rho g (z_2 - z_1)$$

$$W = (P_2 - P_1) \cdot \Delta V$$



práca konaná okolím na tekutine:

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 S_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \cdot \Delta V$$

práca, konaná tekutinou proti okoliu:

$$W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = P_2 S_2 \cdot \Delta x_2 = P_2 \cdot \Delta V$$

Bilancia mechanickej energie ideálnej tekutiny

po jednoduchej úprave:

Bernoulliho rovnica

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2$$



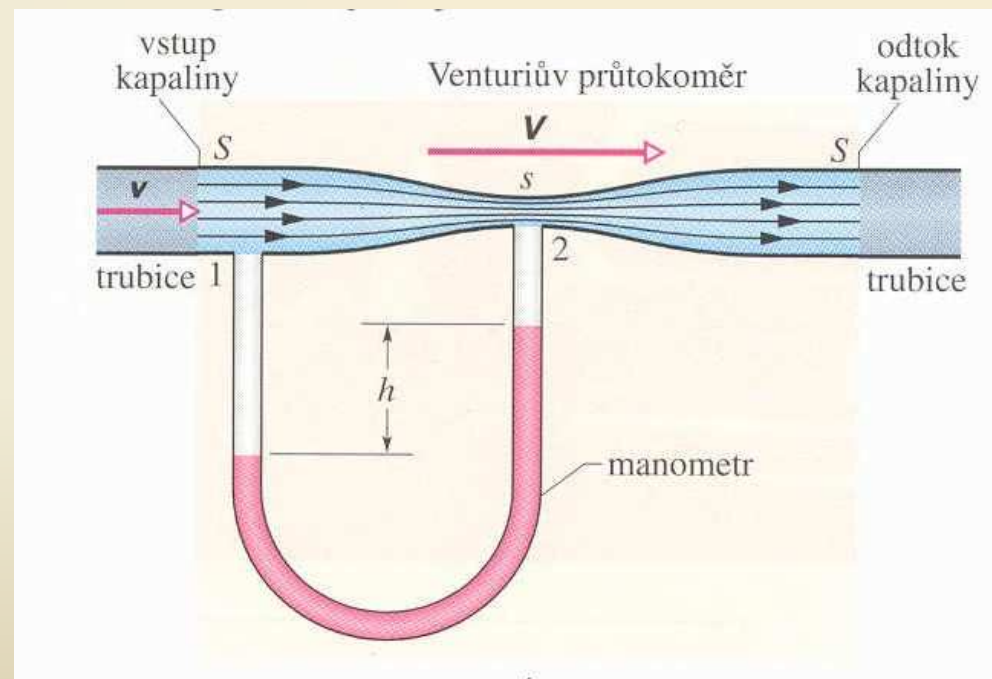
Roku 1738 rovnicu odvodil Daniel Bernoulli

Súčet kinetickej, tlakovej a polohovej energie v ľubovoľnom mieste ustáleného toku ideálnej tekutiny je konštantný.

Bilancia mechanickej energie ideálnej tekutiny

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = konst$$

Ukážka jednoduchej aplikácie Bernoulliho rovnice

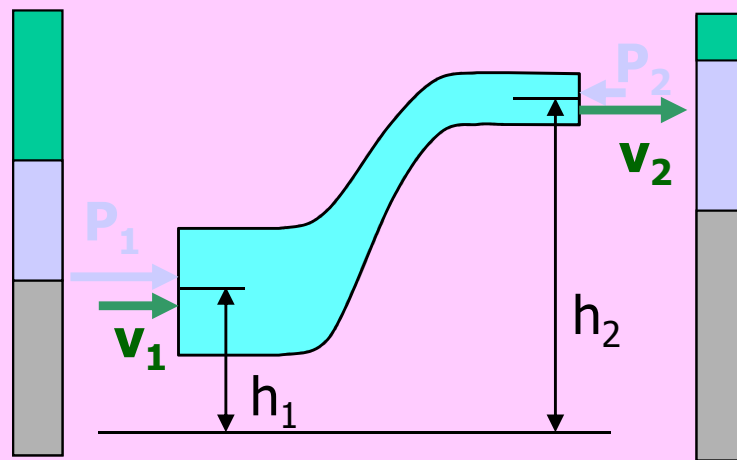


Bilancia mechanickej energie reálnej tekutiny

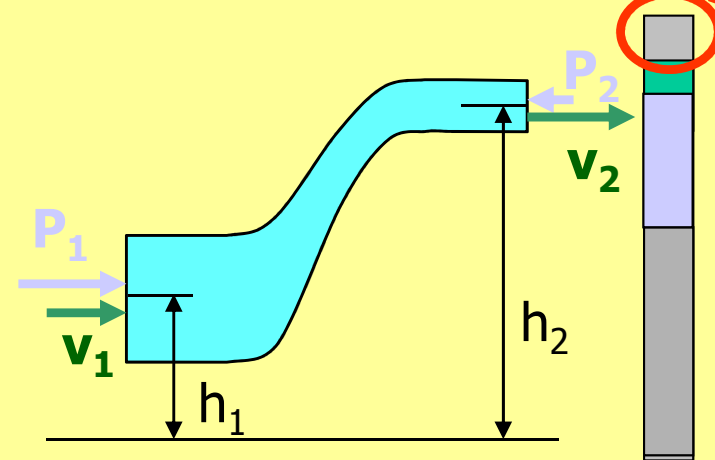
$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

pri prúdení reálnej tekutiny došlo k nevratnej premene mechanickej energie na vnútornú - disipácia

Prúdenie ideálnej tekutiny



Prúdenie reálnej tekutiny



kinetická energia

potenciálna energia

tlaková energia

Bilancia mechanickej energie reálnej tekutiny

Prúdenie ideálnej tekutiny

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

Prúdenie reálnej tekutiny

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + \frac{\dot{E}_{dis}}{\dot{V}}$$

Lenže v reálnej tekutine v dôsledku viskozity sa vytvorí rýchlostný profil, akú rýchlosť dosadzovať ?

Bilancia mechanickej energie reálnej tekutiny

Dosadzuje sa priemerná rýchlosť

$$w = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2}$$

A ešte sa robí korekcia na charakter prúdenia daný hodnotou Re

$$Re = \frac{lw\rho}{\mu}$$

laminárne prúdenie

$$\alpha = 0,5$$

turbulentné prúdenie

$$\alpha = 1$$

Prúdenie reálnej tekutiny s korekciou na charakter prúdenia

$$P_1 + \frac{\rho w_1^2}{2\alpha_1} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho w_2^2}{2\alpha_2} + \rho g z_2 + \frac{\dot{E}_{dis}}{\dot{V}}$$

Bilancia mechanickej energie reálnej tekutiny

Spôsoby vyjadrenia rovnice:

Bilancia vzťahnutá na jednotku objemu – [Pa]

$$P_1 + \frac{\rho w_1^2}{2\alpha_1} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho w_2^2}{2\alpha_2} + \rho g z_2 + \frac{\dot{E}_{dis}}{\dot{V}}$$

Bilancia vzťahnutá na jednotku hmotnosť [J]

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2\alpha_1} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2\alpha_2} + g z_2 + \frac{\dot{E}_{dis}}{\dot{m}}$$

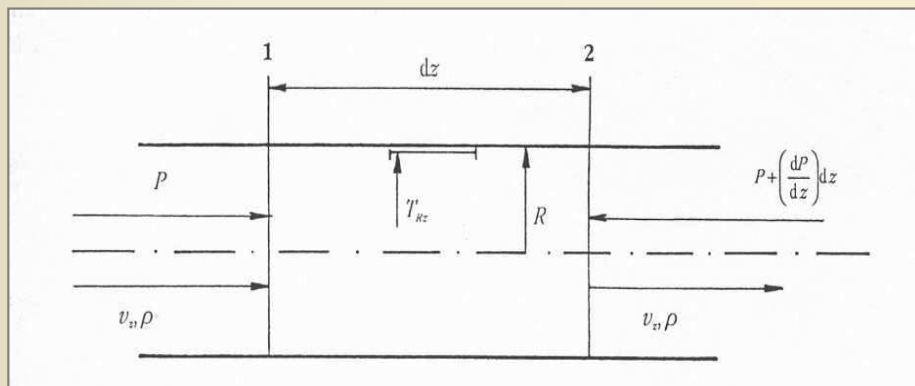
Výškový tvar [m]

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g\alpha_1} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g\alpha_2} + z_2 + \frac{\dot{E}_{dis}}{g\dot{m}}$$

Bilancia hybnosti toku v potrubí - informačne

Výpočet disipovanej energie a rýchlostných profilov toku

Reálna kvapalina ↔ sily trenia ↔ práca ↔ teplo ↔ **disipácia mechanickej energie**



1. Vtok hybnosti cez medzikružie $dS=2\pi r dr$ a šírky dr :

$$\left(v_z d\dot{m} \right) = v_z (\rho v_z) 2\pi r dr$$

2. Výtok hybnosti cez medzikružie $dS=2\pi r dr$ a šírky dr vzdialený o dz : ! totožný s vtokom

3. Celková sila trenia v tekutine – sila trenia T_{Rz} na vnútornej stene rúrky o ploche $2\pi R dz$:

$$dF = T_{Rz} 2\pi R dz$$

4. Zdroj hybnosti – tlak P : v priereze 1 sila pôsobí v smere toku $(P\pi R^2)$

v priereze 2 proti smeru toku $((P+dP)\pi R^2)$

$$dF = -\pi R^2 dP$$

Bilancia hybnosti toku v potrubí

Výpočet rychlostního profilu **laminárního toku** tekutiny v potrubí

$$T_{Rz} 2\pi R dz = -\pi R^2 dP$$

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{2T_{Rz}}{R}$$

Newtonov vzťah (konštitutívna rovnica)
Prenos hybnosti na molekulárnej úrovni

$$T_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

$$dv_z = -\frac{1}{2\mu} \left(-\frac{dP}{dz} \right) r dr$$

$$r < r ; R >$$
$$v_z < v_z ; 0 >$$

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dz} \right) (R^2 - r^2)$$

Bilancia hybnosti toku v potrubí

Vyjadrenie disipovanej energie (ako dôsledok trenia)

$$T_{Rz} 2\pi R dz = -\pi R^2 dP \longrightarrow -\frac{dP}{dz} = \frac{2T_{Rz}}{R}$$

Po integrácii z : $\langle 0; L \rangle$
 P : $\langle P_1; P_2 \rangle$

$$-(P_2 - P_1) = \frac{2T_{Rz} L}{R}$$

ε_{dis} – disipovaná energia

$$\varepsilon_{dis} = -\frac{\Delta P}{\rho}$$

$$\frac{2T_{Rz} L}{\rho R} = \varepsilon_{dis}$$

T_{Rz} - šmykové napätie na stene potrubia - závisí od vlastností tekutiny, charakteru prúdenia, od vlastnosti povrchu rúrky

$$T_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

Experimentálne zistená závislosť

$$\frac{T_{Rz}}{\rho w^2} = f(Re, n)$$

$$\frac{\lambda}{8} = \frac{T_{Rz}}{\rho w^2}$$

Darcyho rovnica

$$\varepsilon_{dis} = -\frac{\Delta P}{\rho} = \lambda \frac{L w^2}{d 2}$$

bezrozmerné šmykové napätie
 λ – súčiniteľ trenia

Bilancia hybnosti toku v potrubí

Vyjadrenie disipovanej energie (ako dôsledok trenia) - pokračovanie

Darcyho rovnica

$$\varepsilon_{dis} = \lambda \frac{L}{d} \frac{w^2}{2}$$

$$w = \frac{(-\Delta P)d^2}{32L\mu}$$

$$Re = \frac{dw\rho}{\mu}$$

Pre laminárny tok v potrubí kruhového prierezu

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Pre turbulenty tok – zložitejšia situácia. (rôzne empirické vzťahy a závislosti, zohľadňujúce závislosti λ od Re a relatívnej drsnosti stien n , $\lambda=f(Re,n)$)

(Blaziusova rovnica, Nikuradzeho...- hydraulicky hladké potrubie

Roundova rovnica, Chenova ...- hydraulicky drsné potrubie)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.8 \left(\log \frac{Re}{0.135Ren + 6.5} \right)$$

$$4000 \leq Re \leq 10^7 \quad 0 \leq n \leq 10^{-2}$$

Závislosť koeficienta trenia λ od Re a relatívnej drsnosti stien n

Oblasti: λ

laminárna:

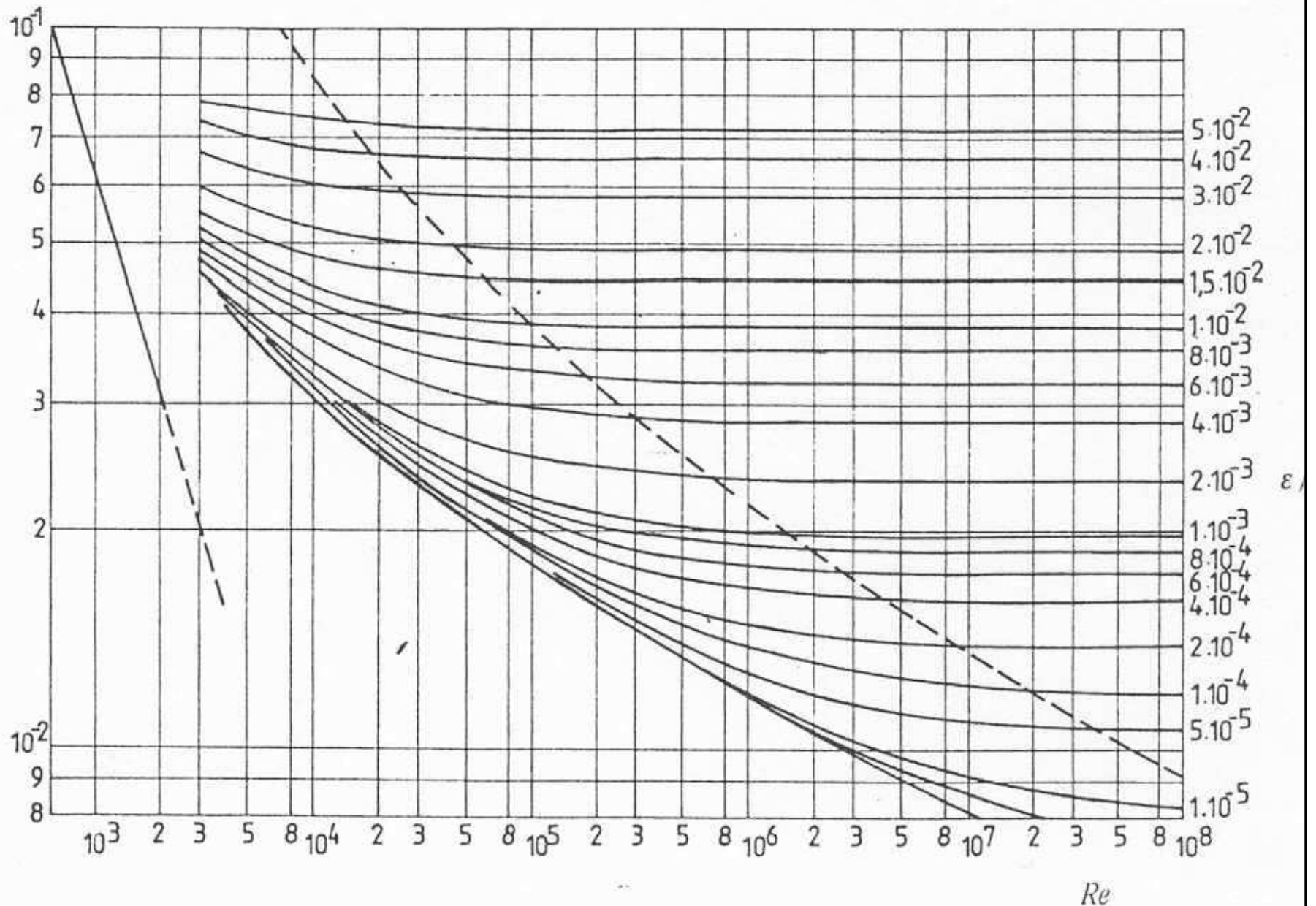
$$\lambda = f(Re)$$

prechodná a
turbulentná:

$$\lambda = f(Re, n)$$

vysoko-
turbulentná:

$$\lambda = f(n)$$



Rozšírenie Darcyho rovnice pre potrubia nekrhového prierezu

$$\varepsilon_{dis} = \lambda \frac{L}{d} \frac{w^2}{2}$$



$$d_e = 4 \frac{S_{živý}}{O_{zmáčmáč}}$$

Charakteristický rozmer:
ekvivalentný priemer - d_e

$$\varepsilon_{dis} = \lambda \frac{L}{d_e} \frac{w^2}{2}$$

Príklady :

Tvar rezu potrubia	Ekvivalentný priemer	λ (pre LT)
Štvorec so stranou a	a	57
Obdĺžnik so stranami a, b	$2ab/(a+b)$	62
Medzikružie, priemer D, d	$(D-d)$	96
Koryto-kanál, šírka koryta h , výška hladiny v	$4(hv)/(h+2v)$	(62)

Poznámka

Disipácia mechanickej energie v dôsledku miestnych odporov

Miestne odpory – **prekážky** – ohyb armatúr, kolená, spojky, ventily, vtok do rúrky a výtok z rúrky, náhle zúženie, resp. rozšírenie, sací kôš...

Vyjadrenie disipácie mechanickej energie (miestnej)

Koeficient miestneho odporu

$$\mathcal{E}_{dis,m} = \xi \frac{w^2}{2}$$

Ekvivalentná dĺžka priameho potrubia

$$\mathcal{E}_{dis,m} = \lambda \frac{L_{ek}}{d} \frac{w^2}{2}$$

Celková disipácia mechanickej energie v potrubí

$$\mathcal{E}_{dis} = \mathcal{E}_{dis,tr} + \mathcal{E}_{dis,m}$$

$$\mathcal{E}_{dis} = \left(\lambda \frac{L}{d} + \sum_i \xi_i \right) \frac{w^2}{2}$$

$$\mathcal{E}_{dis} = \lambda \frac{(L + L_{ek})}{d} \frac{w^2}{2}$$

Návrhové výpočty potrubí

Výpočet objemového prietoku (rýchlosti) v zadanom potrubí

$$\frac{w_1^2}{2\alpha_1} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 = \frac{w_2^2}{2\alpha_2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \varepsilon_{dis}$$

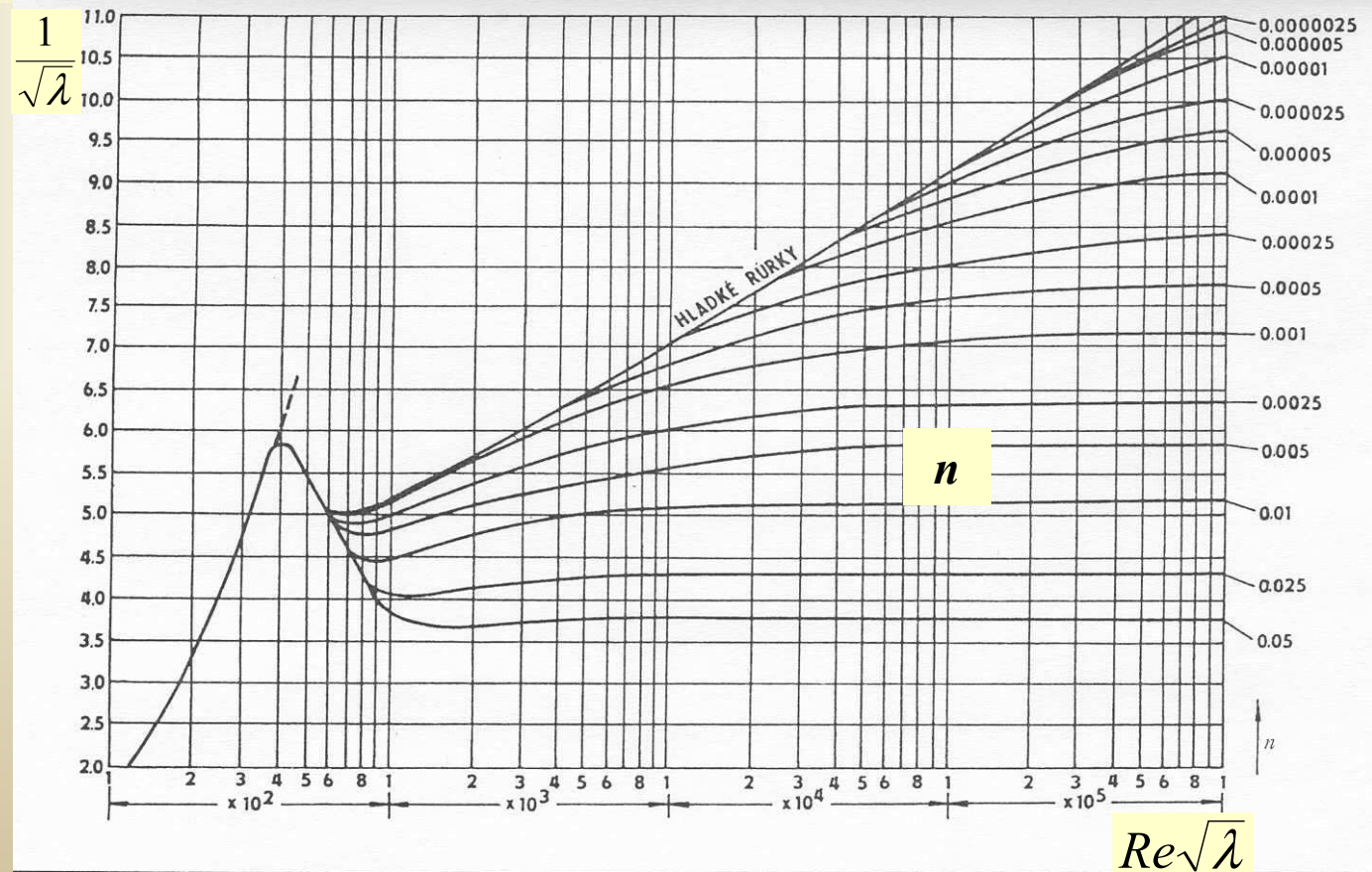
Poznámka: nakresliť Obr.

Výpočet: **iteračný**, pre zvolenú hodnotu rýchlosti (vysvetliť)

orientačný rýchlovýpočet (odvodiť)

$$Re\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{dis} d^3 \rho^2}{(L + \sum L_{ek}) \mu^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = f(Re\sqrt{\lambda}, n)$$



Návrhové výpočty potrubí

Výpočet priemeru potrubia pre zadaný objemový prietok

$$\frac{w_1^2}{2\alpha_1} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 = \frac{w_2^2}{2\alpha_2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \epsilon_{dis}$$

Poznámka: nakresliť Obr.

Výpočet: **iteračný**, pre zvolenú hodnotu priemeru (vychádzať z rýchlosti - vysvetliť)
orientačný rýchlovýpočet (odvodit')

$$Re^{\sqrt[5]{\lambda}} = \sqrt[5]{\frac{128\epsilon_{dis} \dot{V}^3 \rho^5}{(L + \sum L_{ek}) \pi^3 \mu^5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{\lambda}} = f(Re^{\sqrt[5]{\lambda}}, Re/n)$$

$$\frac{Re}{n} = \frac{4\dot{V}\rho}{\pi\mu\epsilon_{výč}}$$

