F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2010 - 2011

VII.
Neutronová interferometrie II.
cvičení

KOTLÁŘSKÁ 13. DUBNA 2011

Intensita na výstupu interferometru I: stacionární monochromatická vlna

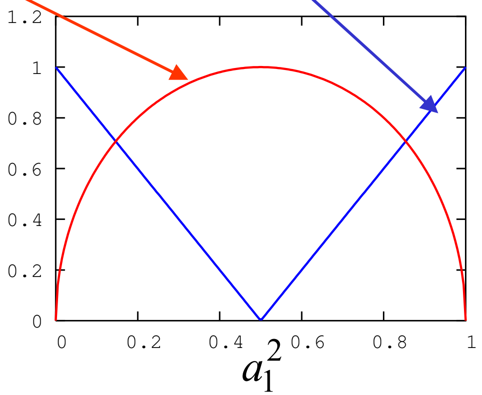
$a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0$

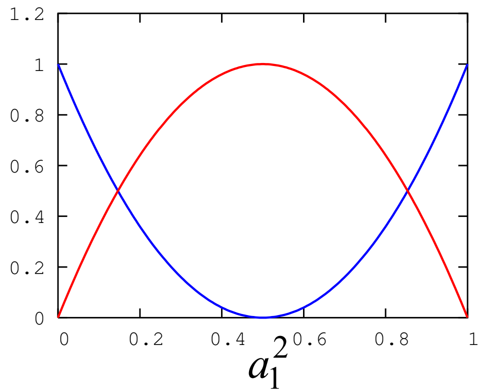
$a_1^2 + a_2^2 = 1$

kontrast *visibility* a výběr cesty *which way* *welcher Weg*

$\boxed{V = 2a_1 a_2}$ $\boxed{W = |a_1^2 - a_2^2|}$

$V^2 + W^2 = 1$



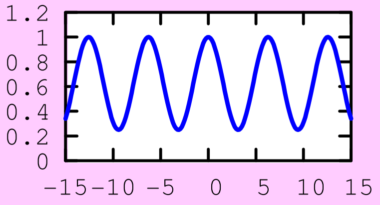


Kontrast je největší pro symetrické rozdělení svazků, když volba cesty jedním anebo druhým ramenem je neurčitá

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1 + 2a_1 a_2 \cdot \cos \Delta\Phi}{1 + 2a_1 a_2}$$

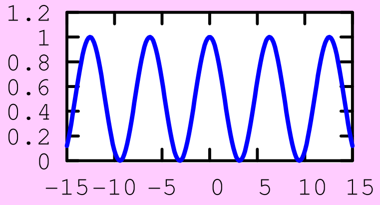
$a_1^2 = 0.9, a_2^2 = 0.1$

$V = 0.6, W = 0.8$



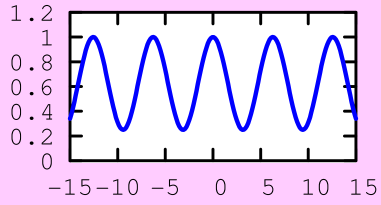
$a_1^2 = 0.5, a_2^2 = 0.5$

$V = 1.0, W = 0.0$



$a_1^2 = 0.1, a_2^2 = 0.9$

$V = 0.6, W = 0.8$

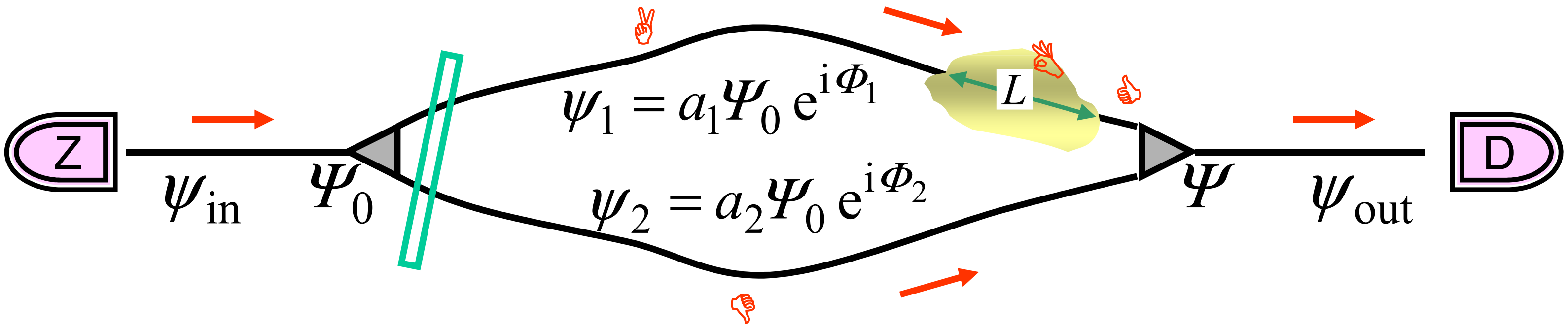


Výpočet fáze pro optický potenciál neutronů v PL

index lomu $n(\boldsymbol{r}) \approx 1 - V_{\mathrm{OPT}}(\boldsymbol{r})/2E$

$$n(\mathbf{r}) \approx 1 - \lambda_0^2 \times \bar{b} \cdot N / 2\pi$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 = \frac{h^2}{2m} \cdot \frac{1}{\lambda_0^2}$$



$$\Phi_2 = \int_{\mathbf{D}} \mathrm{d}s \cdot k_0 = k_0 s_2$$

$$\Phi_1 = \int_{\mathbf{A}} \mathrm{d}s \cdot k_0 + \int_{\mathbf{B}} \mathrm{d}s \cdot k_0 \cdot n + \int_{\mathbf{C}} \mathrm{d}s \cdot k_0$$

$$= k_0 s_1 - k_0 \cdot \lambda_0^2 \times \bar{b} \cdot N / 2\pi \cdot L = k_0 s_1 - \lambda_0 \cdot \bar{b} \cdot L \cdot N$$

$$\boxed{\Delta\Phi = \cancel{k_0 (s_1 - s_2)} - \lambda_0 \bar{b} \, L N}$$

Numerický příklad pro **Al** $\Delta\Phi = .23 \times 10^{-9} \cdot 3.5 \times 10^{-15} \cdot 1 \times 10^{-3} \cdot 60.3 \times 10^{27}$

$$= 48.5 = 15.5\pi$$

$L = \ 1\ \mathrm{mm}$ volíme

II. krok
Interference reálného svazku:
Čisté a smíšené stavy v kvantové fyzice

Intensita na výstupu interferometru II: stacionární smíšený stav

Dopadající svazek není monochromatická vlna.

Nekoherentní směs vln o různých energiích: **Smíšený stav** **realistický případ**

Intensity od jednotlivých vln ve směsi se sčítají: vlny nejsou navzájem koherentní.

Záleží na tom, jak rozdíl fází $\Delta\Phi$ závisí na energii vlny nebo lépe na vlnovém vektoru:

$$\boxed{I = I_0 \int \mathrm{d}k\, w(k) \cdot (1 + V \cdot \cos \Delta\Phi(k)),} \quad \int \mathrm{d}k\, w(k) = 1$$

vážený průměr

Intensita na výstupu interferometru II: stacionární smíšený stav

Dopadající svazek není monochromatická vlna.

Nekoherentní směs vln o různých energiích: **Smíšený stav** **realistický případ**

Intensity od jednotlivých vln ve směsi se sčítají: vlny nejsou navzájem koherentní.

Záleží na tom, jak rozdíl fází $\Delta\Phi$ závisí na energii vlny nebo lépe na vlnovém vektoru:

$$\boxed{I = I_0 \int \mathrm{d}k \; w(k) \cdot (1 + V \cdot \cos \Delta\Phi(k)),} \quad \int \mathrm{d}k \; w(k) = 1$$

EXPERIMENTÁLNÍ POHLED

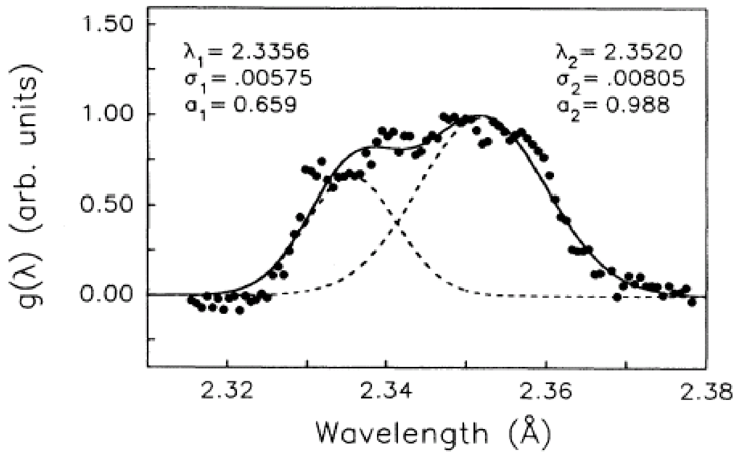


FIG. 3. Measured wavelength spectrum $g(\lambda)$ for the phase-echo experiment, and the double-Gaussian fit to it.

REÁLNÝ PŘÍKLAD

Dvojitý gaussovský profil

$$w(k) = 2\pi g(2\pi / k) \cdot k^{-2}$$

$$\boxed{\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{0.02}{2.34} \sim 0.01}$$

Převod jedné formule na druhou

$$w(k) = 2\pi g(2\pi / k) \cdot k^{-2}$$

$$\boxed{\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{0.02}{2.34} \simeq 0.01}$$

základní identita $g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = w(k)\,\mathrm{d}k$

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\lambda = -\dfrac{2\pi}{k^2}\mathrm{d}k$ ale co znaménko?

$$\int_{k_{\mathrm{MIN}}}^{k} \mathrm{d}k\, w(k) = \int_{\lambda}^{\lambda_{\mathrm{MAX}}} \mathrm{d}\lambda\, g(\lambda) = \int_{k}^{k_{\mathrm{MIN}}} \left(-\frac{2\pi}{k^2}\mathrm{d}k\right) g\left(\frac{2\pi}{k}\right) = \int_{k_{\mathrm{MIN}}}^{k} \left(+\frac{2\pi}{k^2}\mathrm{d}k\right) g\left(\frac{2\pi}{k}\right)$$

Intensita na výstupu interferometru II: stacionární smíšený stav

Dopadající svazek není monochromatická vlna.

Nekoherentní směs vln o různých energiích: **Smíšený stav** **realistický případ**

Intensity od jednotlivých vln ve směsi se sčítají: vlny nejsou navzájem koherentní.

Záleží na tom, jak rozdíl fází $\Delta\Phi$ závisí na energii vlny nebo lépe na vlnovém vektoru:

$$\boxed{I = I_0 \int \mathrm{d}k\; w(k) \cdot (1 + V \cdot \cos \Delta\Phi(k)),} \quad \int \mathrm{d}k\; w(k) = 1$$

$$I = I_0 \int \mathrm{d}k\; w(k) \cdot \left(1 + V \cdot \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k)}\right)\right)$$

Intensita na výstupu interferometru II: stacionární smíšený stav

Dopadající svazek není monochromatická vlna.

Nekoherentní směs vln o různých energiích: **Smíšený stav** **realistický případ**

Intensity od jednotlivých vln ve směsi se sčítají: vlny nejsou navzájem koherentní.

Záleží na tom, jak rozdíl fází $\Delta\Phi$ závisí na energii vlny nebo lépe na vlnovém vektoru:

$$\boxed{I = I_0 \int \mathrm{d}k\, w(k) \cdot (1 + V \cdot \cos \Delta\Phi(k)),} \quad \int \mathrm{d}k\, w(k) = 1$$

$$I = I_0 \int \mathrm{d}k\, w(k) \cdot \left(1 + V \cdot \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k)}\right)\right)$$

$$I = I_0 \cdot \left(1 + V \cdot \mathrm{Re} \int \mathrm{d}k\, w(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k)}\right)$$

ekvivalentní, ale velmi produktivní přepis

Intensita na výstupu interferometru II: stacionární smíšený stav

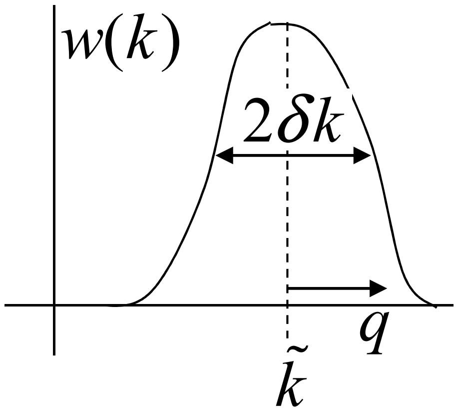
Dopadající svazek není monochromatická vlna.

Nekoherentní směs vln o různých energiích: **Smíšený stav** **realistický případ**

Intensity od jednotlivých vln ve směsi se sčítají: vlny nejsou navzájem koherentní.

Záleží na tom, jak rozdíl fází $\Delta\Phi$ závisí na energii vlny nebo lépe na vlnovém vektoru:

$$\boxed{I = I_0 \int \mathrm{d}k\, w(k)\cdot(1 + V\cdot\cos\Delta\Phi(k)),} \quad \int \mathrm{d}k\, w(k) = 1$$



$$I = I_0\cdot\left(1 + V\cdot\mathrm{Re}\int \mathrm{d}k\, w(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k)}\right)$$

Pro úzké rozdělení

$$\int \mathrm{d}k\, w(k)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k)} = \int \mathrm{d}q\, w(\tilde{k}+q)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\Phi(\tilde{k}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot q)}$$

$$\boxed{I = I_0\Big(1 + V\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(\tilde{k})}\underbrace{\int \mathrm{d}q\, w(\tilde{k}+q)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot q}}_{W(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}))}\big)\Big)}$$

Intensita na výstupu interferometru II: stacionární smíšený stav

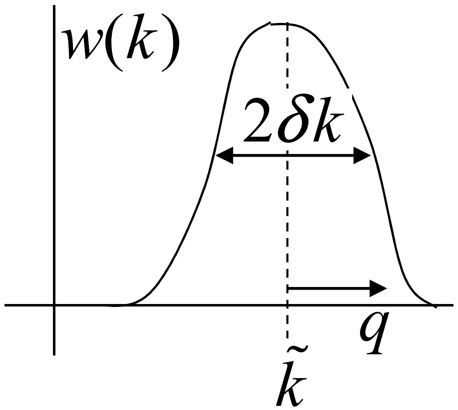
Dopadající svazek není monochromatická vlna.

Nekoherentní směs vln o různých energiích: **Smíšený stav** **realistický případ**

Intensity od jednotlivých vln ve směsi se sčítají: vlny nejsou navzájem koherentní.

Záleží na tom, jak rozdíl fází $\mathit{\Delta\Phi}$ závisí na energii vlny nebo lépe na vlnovém vektoru:

$$\boxed{I = I_0 \int \mathrm{d}k\; w(k)\cdot(1 + V\cdot\cos\mathit{\Delta\Phi}(k)),} \quad \int \mathrm{d}k\; w(k) = 1$$



$$\boxed{I = I_0\Big(1 + V\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathit{\Delta\Phi}(\tilde{k})}\underbrace{\int \mathrm{d}q\, w(\tilde{k}+q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathit{\Delta\Phi}(\tilde{k})\cdot q}}_{W(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathit{\Delta\Phi}(\tilde{k}))}\big)\Big)}$$

Čistý stav jako limita (ve spojitém spektru)

$$w(k) \to \delta(k - \tilde{k}) \quad \Rightarrow \quad w(\tilde{k}+q) \to \delta(q),\, W(x) \to 1$$

$$I \to I_0\big(1 + V\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathit{\Delta\Phi}(\tilde{k})})\big)$$

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

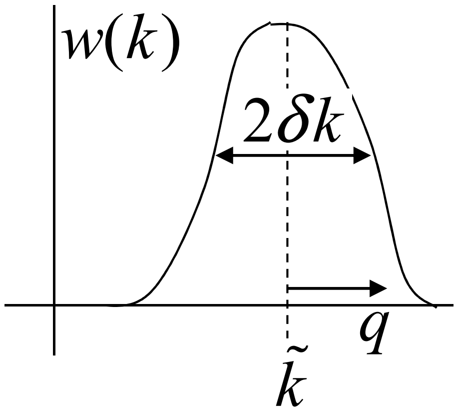
Dopadající svazek není monochromatická vlna.

Nekoherentní směs vln o různých energiích: **Smíšený stav** **realistický případ**

<u>Intensity</u> od jednotlivých vln ve směsi se sčítají: vlny nejsou navzájem koherentní.

Záleží na tom, jak rozdíl fází $\Delta\Phi$ závisí na energii vlny nebo lépe na vlnovém vektoru:

$$\boxed{I = I_0\int \mathrm{d}k\; w(k)\cdot\left(1+V\cdot\cos\Delta\Phi(k)\right),}\qquad \int \mathrm{d}k\; w(k)=1$$



$$\boxed{\begin{aligned} I &= I_0\left(1+V\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(\tilde{k})}\,W\!\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})\right)\right]\right)\\ W(x) &= \int \mathrm{d}q\; w(\tilde{k}+q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot q}\end{aligned}}$$

Gaussovo rozdělení

$$w(\tilde{k}+q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta k}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\delta k}\right)^2},\quad W(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta s}\right)^2}$$

$$I = I_0\left(1+V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})/\delta s\right)^2}\right)\qquad \boxed{\delta s=\frac{1}{\delta k}}$$

FT Gausse

$$I = I_0\left(1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(\tilde{k})}\,W(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}))]\right)$$

$$W(x) = \int \mathrm{d}q\, w(\tilde{k} + q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot q}$$

Gaussovo rozdělení

$$w(\tilde{k} + q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\delta k}\right)^2},\; W(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta s}\right)^2}$$

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})/\delta s\right)^2}\right) \qquad \boxed{\delta s = \frac{1}{\delta k}}$$

$$\int \mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\delta k}\right)^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot q} = \delta k \int \mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\delta k\cdot u} =$$

$$-\tfrac{1}{2}u^2 + \mathrm{i}x\delta k\cdot u = -\tfrac{1}{2}(u - \mathrm{i}x\delta k)^2 - \tfrac{1}{2}(x\delta k)^2$$

$$\int \mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u-\mathrm{i}a)^2} = a\int \mathrm{d}v\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2(v-\mathrm{i})^2} \equiv I$$

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})/\delta s\right)^2}\right)$$

$$\boxed{\delta s = \frac{1}{\delta k}}$$

$$\Delta\Phi(\tilde{k}) = -\tilde{k}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))/2\tilde{E} = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}) = +\frac{1}{\tilde{k}^2}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s)) = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\Delta\Phi(\tilde{k})$$

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})/\delta s\right)^2}\right)$$

$$\boxed{\delta s = \frac{1}{\delta k}}$$

$$\Delta\Phi(\tilde{k}) = -\tilde{k}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))/2\tilde{E} = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}) = +\frac{1}{\tilde{k}^2}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s)) = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\Delta\Phi(\tilde{k})$$

Konečný výraz pro intenzitu na výstupu

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi(\tilde{k})\frac{\delta\tilde{k}}{\tilde{k}}\right)^2}\right)$$

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})/\delta s\right)^2}\right) \qquad \boxed{\delta s = \frac{1}{\delta k}}$$

$$\Delta\Phi(\tilde{k}) = -\tilde{k}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))/2\tilde{E} = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}) = +\frac{1}{\tilde{k}^2}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s)) = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\Delta\Phi(\tilde{k})$$

Konečný výraz pro intenzitu na výstupu

závisí na dvou parametrech svazku

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi(\tilde{k})\frac{\delta\tilde{k}}{\tilde{k}}\right)^2}\right)$$

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k})/\delta s\right)^2}\right) \qquad \boxed{\delta s = \frac{1}{\delta k}}$$

$$\Delta\Phi(\tilde{k}) = -\tilde{k}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))/2\tilde{E} = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}) = +\frac{1}{\tilde{k}^2}\cdot\frac{m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}s\cdot V(\mathbf{r}(s)) = -\frac{1}{\tilde{k}}\cdot\Delta\Phi(\tilde{k})$$

Konečný výraz pro intenzitu na výstupu

závisí na dvou parametrech svazku

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi(\tilde{k})\frac{\delta\tilde{k}}{\tilde{k}}\right)^2}\right)$$

a jediné fázové proměnné

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos \Delta\Phi(\tilde{k}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi(\tilde{k})\frac{\delta\tilde{k}}{\tilde{k}}\right)^2}\right)$$

EXPLICITNÍ VÝRAZY (nám již známé)

I. PRO POHYB V GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ

$$\Delta\Phi = LH\sin\varphi \times g\frac{m^2}{\hbar^2} \times k^{-1}$$

II. PRO OPTICKÝ POTENCIÁL V LÁTCE

$$\Delta\Phi = -\lambda_0 \overline{b}\, LN = -2\pi\overline{b}\, LN \times k^{-1}$$

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos \Delta\Phi(\tilde{k}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi(\tilde{k})\,\frac{\delta\tilde{k}}{\tilde{k}}\right)^2}\right)$$

EXPLICITNÍ VÝRAZY (nám již známé)

I. PRO POHYB V GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ

$$\Delta\Phi = LH\sin\varphi \times g\,\frac{m^2}{\hbar^2} \times k^{-1}$$

II. PRO OPTICKÝ POTENCIÁL V LÁTCE

$$\Delta\Phi = -\lambda_0 \overline{b}\, LN = -2\pi \overline{b}\, LN \times k^{-1}$$

… vrátíme se k interpretaci COW experimentu
v neutronové gravimetrii

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi(\tilde{k})\frac{\delta\tilde{k}}{\tilde{k}}\right)^2}\right)$$

EXPLICITNÍ VÝRAZY (nám již známé)

I. PRO POHYB V GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ

$$\Delta\Phi = LH\sin\varphi \times g\frac{m^2}{\hbar^2}\times k^{-1}$$

II. PRO OPTICKÝ POTENCIÁL V LÁTCE

$$\Delta\Phi = -\lambda_0 \overline{b}\, LN = -2\pi\overline{b}\, LN \times k^{-1}$$

… vrátíme se k interpretaci COW experimentu
v neutronové gravimetrii

Intensita na výstupu interferometru II: Gaussovo rozdělení

$$I = I_0\left(1 + V\cos\Delta\Phi(\tilde{k})\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi(\tilde{k})\frac{\delta\tilde{k}}{\tilde{k}}\right)^2}\right)$$

EXPLICITNÍ VÝRAZY (nám již známé)

I. PRO POHYB V GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ

$$\Delta\Phi = LH\sin\varphi \times g\frac{m^2}{\hbar^2}\times k^{-1} \equiv C\sin\varphi$$

II. PRO OPTICKÝ POTENCIÁL V LÁTCE

$$\Delta\Phi = -\lambda_0\overline{b}\,LN = -2\pi\overline{b}\,LN\times k^{-1}$$

… vrátíme se k interpretaci COW experimentu
v neutronové gravimetrii

III. krok
Nestacionární popis interferometru:
Průlet vlnových klubek

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Popis svazku pomocí klubek je vlastně propoj mezi částicemi v reaktoru a vlnami v interferometru. Klubko se hodí tak nějak do obojích míst.

TŘI KROKY (1D klubka)

krok 1. stojící klubko

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot a(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

krok 2. klubko s nenulovou hybností

$$\psi(x) = \varphi(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot a(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_0)x} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot \underbrace{a(k-k_0)}_{c(k)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

krok 3. klubko uvedeme do pohybu

$$\Psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot c(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}$$

Toto platí pro každou volbu počáteční vlnové funkce.

Co je "klubko"? Má omezený rozsah v *k*-prostoru

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Pak můžeme provést běžnou klubkovou transformaci

$$\Psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot c(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)}$$

$$\boxed{\omega(k) = \varepsilon(\hbar k)/\hbar = \frac{\hbar}{2m} \cdot k^2}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot c(k_0 + q) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}((k_0+q)x - \omega(k_0+q)t)}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q(x - v_0 t) - \cancel{\omega(q)}t)}$$

zanedbáme rozplývání: linearisace v (malém) q

$$\approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x - v_0 t)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x - v_0 t)}$$

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Pak můžeme provést běžnou klubkovou transformaci

$$\omega(k) = \varepsilon(\hbar k)/\hbar = \frac{\hbar}{2m}\cdot k^2$$

$$\Psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\cdot c(k)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot c(k_0+q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}((k_0+q)x-\omega(k_0+q)t)}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}\int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q(x-v_0t)-\cancel{\omega(q)}t)}$$

zanedbáme rozplývání: linearisace v (malém) q

$$\approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}\int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x-v_0t)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}\times\varphi(x-v_0t)}$$

nosná vlna	$\times$	obálka klubka
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(x-u_0t)}$	$\times$	$\varphi(x-\upsilon_0t)$
$u_0 = \dfrac{\omega(k_0)}{k_0} = \dfrac{\hbar}{2m}k_0$		$\upsilon_0 = \dfrac{\mathrm{d}\omega(k_0)}{\mathrm{d}k_0} = \dfrac{\hbar}{m}k_0 = 2u_0$
fázová rychlost		grupová rychlost

Interference vlnových klubek: zpožděné klubko ve vnějším potenciálu

Známe $\Delta\Phi(k)$; ***k*** snadno přepočteme na energii pomocí

$$\omega(k) = \varepsilon(\hbar k)/\hbar = \frac{\hbar}{2m}\cdot k^2$$

$$\Psi_1(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x - v_0 t)$$

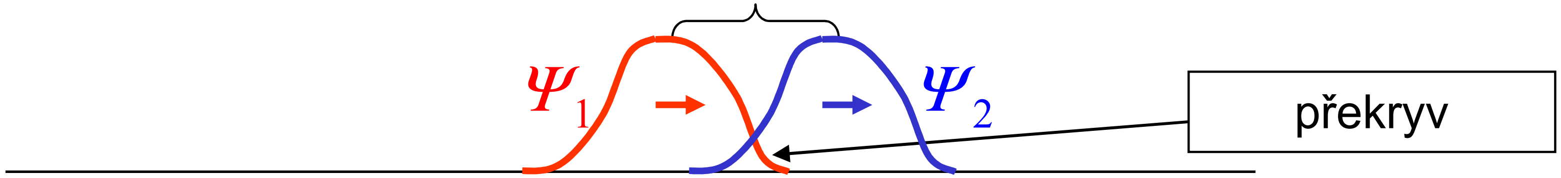
$$\Psi_2(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\cdot c(k)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx + \Delta\Phi(k) - \omega(k)t)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot c(k_0+q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}((k_0+q)x + \Delta\Phi(k_0+q) - \omega(k_0+q)t)}$$

$$\approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \Delta\Phi(k_0) - \omega(k_0)t)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}$$

$$\Psi_2(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \Delta\Phi(k_0) - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)$$

DRÁHOVÝ POSUN Δx



Interference vlnových klubek: výpočet intensity

Časově závislá intensita

$$I(t) = |\Psi_1(t) + \Psi_2(t)|^2 = |\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

Po vystředování po časech (to odpovídá pozorování)

$$I \propto 1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\,\Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \tfrac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |c(k_0 + q)|^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$

spektrální intensita klubka

TO ODVODÍME

Interference vlnových klubek: výpočet intenzity

$$I(t)=|a_1\Psi_1(t)+a_2\Psi_2(t)|^2=\underbrace{|a_1\Psi_1(t)|^2+|a_2\Psi_2(t)|^2}_{\int \mathrm{d}x|\Psi_{1,2}(t)|^2=1}+\underbrace{2a_1a_2}_{V}\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

$$\int \mathrm{d}t\left|\Psi_1(x_{\mathrm{OBS}},t)\right|^2=\int \mathrm{d}t\left|\varphi(x_{\mathrm{OBS}}-\upsilon_0 t)\right|^2=\upsilon_0^{-1}\int \mathrm{d}\xi\left|\varphi(\xi)\right|^2$$

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\varphi^*(x-v_0t)\varphi(x+\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)-v_0t)]$$

$$=\int \mathrm{d}t\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\int\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q(x-v_0t)}\int\frac{\mathrm{d}\bar{q}}{2\pi}\cdot a(\bar{q})\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}(x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)-v_0t)}]$$

$$=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\int\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot\int\frac{\mathrm{d}\bar{q}}{2\pi}\cdot a(\bar{q})\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)}\boxed{\int\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q-\bar{q})(x-v_0t)}}]\quad \frac{2\pi}{\upsilon_0}\delta(q-\bar{q})$$

$$=\frac{1}{\upsilon_0}\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\int\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot\left|a(q)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)}$$

Interference vlnových klubek: výpočet intenzity

$$I(t) = |a_1\Psi_1(t) + a_2\Psi_2(t)|^2 = \underbrace{|a_1\Psi_1(t)|^2 + |a_2\Psi_2(t)|^2}_{\int \mathrm{d}x |\Psi_{1,2}(t)|^2 = 1} + \underbrace{2a_1a_2}_{V}\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

$$\int \mathrm{d}t \left|\Psi_1(x_{\mathrm{OBS}}, t)\right|^2 = \int \mathrm{d}t \left|\varphi(x_{\mathrm{OBS}} - \upsilon_0 t)\right|^2 = \upsilon_0^{-1} \int \mathrm{d}\xi \left|\varphi(\xi)\right|^2$$

$$\int \mathrm{d}t\, \mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)] = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \varphi^*(x - v_0 t)\varphi(x + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)]$$

$$= \int \mathrm{d}t\, \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q(x - v_0 t)} \int \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}]$$

$$= \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \int \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)} \boxed{\int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q - \bar{q})(x - v_0 t)}}] \qquad \frac{2\pi}{\upsilon_0}\delta(q - \bar{q})$$

$$= \frac{1}{\upsilon_0} \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot \left|a(q)\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &I \propto 1 + V\, \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\, \Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))] \\ &\Gamma(x) = \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |c(k_0 + q)|^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \end{aligned}}$$

Interference vlnových klubek: výpočet intensity

Časově závislá intensita

$$I(t) = |\Psi_1(t) + \Psi_2(t)|^2 = |\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

Po vystředování po časech (to odpovídá pozorování)

$$I \propto 1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\,\Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |c(k_0+q)|^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$

$$I = I_0\left(1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(\tilde{k})}\,W(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}))]\right)$$

$$W(x) = \int \mathrm{d}q\, w(\tilde{k}+q) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$

SROVNEJME

střední intensita proudu náhodně přiletujících totožných klubek

intensita stacionární směsi rovinných vln

náhodný proud klubek a nehomogenní směs rovinných vln o stejné šířce jsou dva ekvivalentní popisy stejného stavu

Interference vlnových klubek: výpočet intensity

Časově závislá intensita

$$I(t) = |\Psi_1(t)+\Psi_2(t)|^2 = |\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

Po vystředování po časech (to odpovídá pozorování)

$$I \propto 1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\,\Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot|c(k_0+q)|^2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$

$$I = I_0\left(1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(\tilde{k})}\,W(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(\tilde{k}))]\right)$$

$$W(x) = \int \mathrm{d}q\,w(\tilde{k}+q)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$

$$\delta k \times \delta s = 1$$

klubko	neurčitost hybnosti	velikost klubka
svazek	spektr. šířka svazku	koherenční délka

SROVNEJME

střední intensita proudu náhodně přiletujících totožných klubek

intensita stacionární směsi rovinných vln

náhodný proud klubek a nehomogenní směs rovinných vln o stejné šířce jsou dva ekvivalentní popisy stejného stavu

Interference vlnových klubek: výpočet intensity

Časově závislá intensita

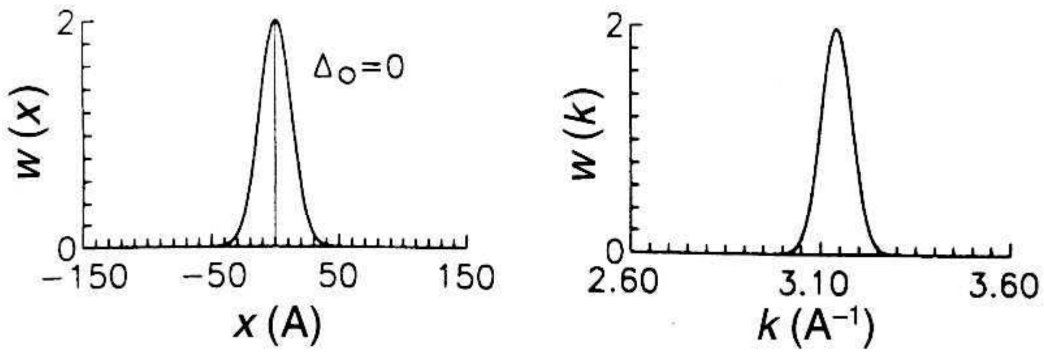
$$I(t) = |\Psi_1(t) + \Psi_2(t)|^2 = |\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

Po vystředování po časech (to odpovídá pozorování)

$$I \propto 1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\,\Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |c(k_0 + q)|^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$

GAUSSOVSKÉ KLUBKO



Interference vlnových klubek: výpočet intensity

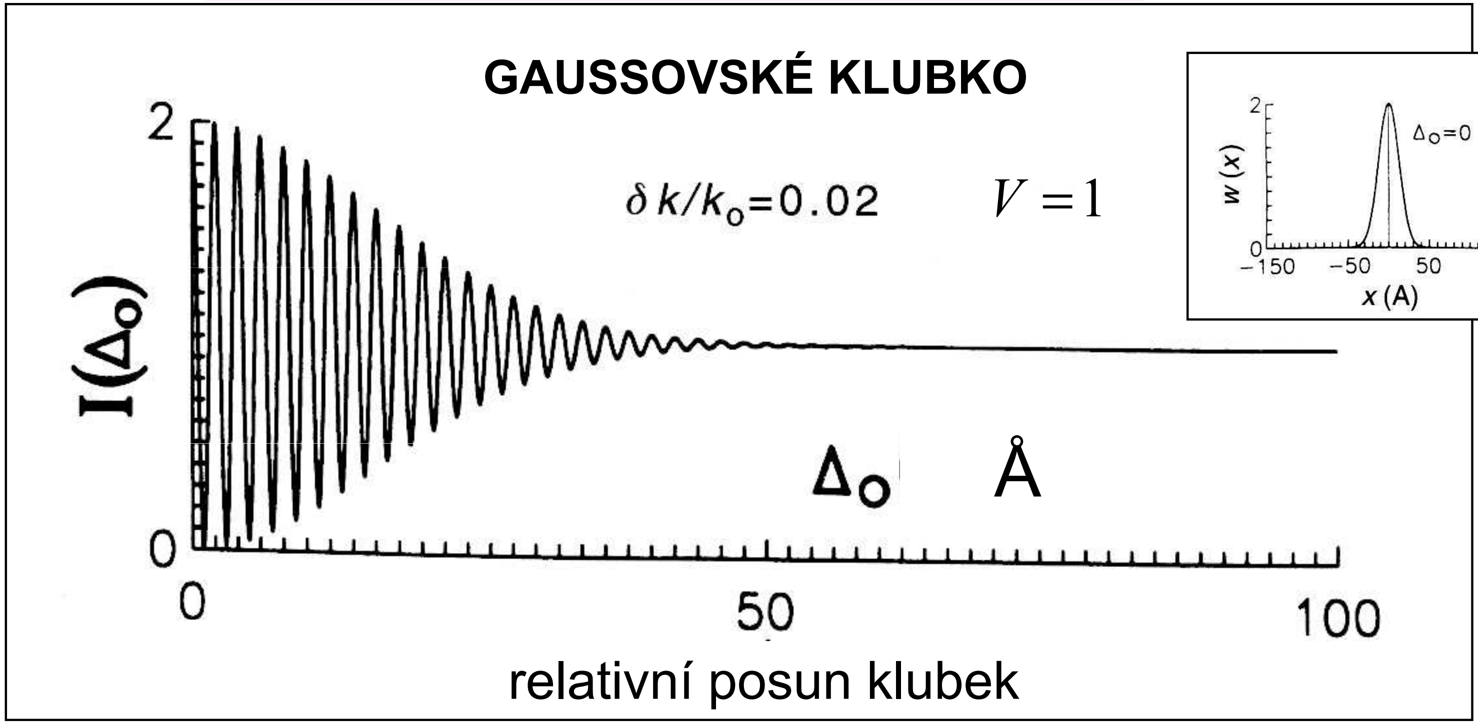
Časově závislá intensita

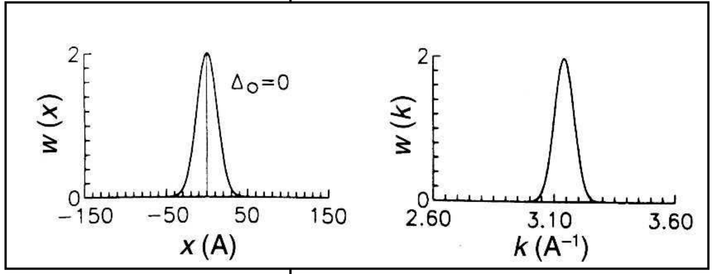
$$I(t) = |\Psi_1(t) + \Psi_2(t)|^2 = |\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

Po vystředování po časech (to odpovídá pozorování)

$$I \propto 1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\,\Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |c(k_0+q)|^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$





The end