Diferenciál funkce

Jak si jej představit?

Silvie Kuráňová, Jan Vondra (PřF MU)

Diferenciál funkce – výpočet a využití

Nechť je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v každém bodě množiny M, tj. má v každém bodě této množiny diferenciál, který je funkcí čtyř proměnných: x, y, h, k.

$$\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)h + f_y(x,y)k.$$

Pro přírůstky budeme dále v textu používat označení $\mathrm{d}x = h = x - x_0$, $\mathrm{d}y = k = y - y_0$. Pak platí: **diferenciál funkce $\boldsymbol{f(x,y)}$** je

$$\boxed{\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y.}$$

Diferenciál funkce $\boldsymbol{f(x,y)}$ v bodě $\boldsymbol{[x_0,y_0]}$ s přírůstky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ se značí $\mathrm{d}f(x_0,y_0)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$, příp. $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$ a je dán vztahem

$$\boxed{\mathrm{d}f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.}$$

Diferenciál se používá k přibližnému výpočtu funkčních hodnot:

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0).$$

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ má tvar

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0),}$$

tedy

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y = f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0).$$

V následujících příkladech se můžeme přesvědčit, že rovnice tečné roviny v bodě $[x_0,y_0]$ k funkci $f(x,y)$ je nejlepší lineární aproximací této funkce v okolí daného bodu.

Diferenciál funkce – geometrický význam

- Diferenciál funkce jedné proměnné $y = f(x)$ v bodě $x_0 \ldots$ přírůstek funkce na tečně vedené ke grafu funkce bodem $[x_0, f(x_0)] = [x_0, y_0]$.

- Diferenciál funkce dvou proměnných $y = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0] \ldots$ přírůstek funkce na tečné rovině vedené ke grafu funkce v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)] = [x_0, y_0, z_0]$.

- Obecně: Totální diferenciál funkce n proměnných $(n \geq 2) \ldots$ přírůstek funkce na tečné nadrovině[1] vedené ke grafu funkce bodem $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ukažme si vše na konkrétních příkladech a interaktivní 3D grafice.

Z řady nástrojů pro ovládaní 3D obrázku, doporučujeme především přepínač  pro zobrazení „stromu“ modelu – můžete tak postupně zobrazovat či schovávat jednotlivé objekty prostorového obrázku.

[1] Tečná nadrovina je afinní prostor dimenze $n-1$, která má lokálně (tj. v okolí bodu, kde tečnou nadrovinu sestrojujeme) s grafem funkce společný právě jeden bod.

Diferenciál funkce – příklad 1

Příklad 1. Nechť je dána funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. V bodě $[1, 2]$ určete

a) rovnici tečné roviny ke grafu funkce z.

b) diferenciál funkce z s přírůstky $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

Příklad 1, Řešení

Výpočet rovnice tečné roviny funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$.

a) Rovnice tečné roviny vedené ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Příklad 1, Řešení

Výpočet rovnice tečné roviny funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$.

a) Rovnice tečné roviny vedené ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V našem případě $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ a $[x_0, y_0] = [1, 2]$.

Příklad 1, Řešení

Výpočet rovnice tečné roviny funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$.

a) Rovnice tečné roviny vedené ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V našem případě $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ a $[x_0, y_0] = [1, 2]$.

Z funkčního předpisu vyjádřeme z-ovou souřadnici dotykového bodu

$$f(x_0, y_0) = f(1, 2) = \frac{1^2 + 2^2}{2} = \frac{5}{2}.$$

Příklad 1, Řešení

Výpočet rovnice tečné roviny funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$.

a) Rovnice tečné roviny vedené ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V našem případě $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ a $[x_0, y_0] = [1, 2]$.

Z funkčního předpisu vyjádřeme z-ovou souřadnici dotykového bodu

$$f(x_0, y_0) = f(1, 2) = \frac{1^2 + 2^2}{2} = \frac{5}{2}.$$

Spočítejme parciální derivace

$$f_x = \frac{2x}{2} = x, \qquad f_x(x_0, y_0) = 1,$$

$$f_y = \frac{2y}{2} = y, \qquad f_y(x_0, y_0) = 2.$$

Příklad 1, Řešení

Výpočet rovnice tečné roviny funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$.

a) Rovnice tečné roviny vedené ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V našem případě $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ a $[x_0, y_0] = [1, 2]$.

Z funkčního předpisu vyjádřeme z-ovou souřadnici dotykového bodu

$$f(x_0, y_0) = f(1, 2) = \frac{1^2 + 2^2}{2} = \frac{5}{2}.$$

Spočítejme parciální derivace

$$f_x = \frac{2x}{2} = x, \qquad f_x(x_0, y_0) = 1,$$
$$f_y = \frac{2y}{2} = y, \qquad f_y(x_0, y_0) = 2.$$

a dosaďme do obecného tvaru rovnice tečné roviny

$$z = \frac{5}{2} + 1(x - 1) + 2(y - 2) = x + 2y - 5 + \frac{5}{2} = x + 2y - \frac{5}{2},$$
$$z = \frac{1}{2}(2x + 4y - 5).$$

Příklad 1, Řešení

Výpočet rovnice tečné roviny funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$.

a) Rovnice tečné roviny vedené ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V našem případě $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ a $[x_0, y_0] = [1, 2]$.

Z funkčního předpisu vyjádřeme z-ovou souřadnici dotykového bodu

$$f(x_0, y_0) = f(1, 2) = \frac{1^2 + 2^2}{2} = \frac{5}{2}.$$

Spočítejme parciální derivace

$$f_x = \frac{2x}{2} = x, \qquad f_x(x_0, y_0) = 1,$$
$$f_y = \frac{2y}{2} = y, \qquad f_y(x_0, y_0) = 2.$$

a dosaďme do obecného tvaru rovnice tečné roviny

$$z = \frac{5}{2} + 1(x - 1) + 2(y - 2) = x + 2y - 5 + \frac{5}{2} = x + 2y - \frac{5}{2},$$
$$z = \frac{1}{2}(2x + 4y - 5).$$

Tečná rovina $2x + 4y - 2z - 5 = 0$ je na obrázku 1 vykreslena jako šedá rovina.

Příklad 1b, Řešení

Počítáme diferenciál funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$ s přírůstky $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

b) Diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ s přírůstky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ je zadán předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

Příklad 1b, Řešení

Počítáme diferenciál funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$ s přírůstky $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

b) Diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ s přírůstky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ je zadán předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

V našem případě $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

Příklad 1b, Řešení

Počítáme diferenciál funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1,2]$ s přírůstky $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

b) Diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ s přírůstky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ je zadán předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

V našem případě $[x_0,y_0] = [1,2]$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

Parciální derivace funkce v daném bodě jsem již vypočítali v úkolu a)

$$f_x(1,2) = 1, \quad f_y(1,2) = 1,$$

diferenciál v bodě $[1,2]$ má tedy tvar

$$\mathrm{d}f(1,2) = f_x(1,2)\mathrm{d}x + f_y(1,2)\mathrm{d}y = 1\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y.$$

Příklad 1b, Řešení

Počítáme diferenciál funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1,2]$ s přírůstky $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

b) Diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ s přírůstky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ je zadán předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

V našem případě $[x_0,y_0] = [1,2]$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

Parciální derivace funkce v daném bodě jsem již vypočítali v úkolu a)

$$f_x(1,2) = 1, \quad f_y(1,2) = 1,$$

diferenciál v bodě $[1,2]$ má tedy tvar

$$\mathrm{d}f(1,2) = f_x(1,2)\mathrm{d}x + f_y(1,2)\mathrm{d}y = 1\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y.$$

Nyní dosadíme přírůstky

$$\mathrm{d}f(1,2) = 1\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Příklad 1b, Řešení

Počítáme diferenciál funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ v bodě $[1, 2]$ s přírůstky $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

b) Diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ s přírůstky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ je zadán předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

V našem případě $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

Parciální derivace funkce v daném bodě jsem již vypočítali v úkolu a)

$$f_x(1, 2) = 1, \quad f_y(1, 2) = 1,$$

diferenciál v bodě $[1, 2]$ má tedy tvar

$$\mathrm{d}f(1, 2) = f_x(1, 2)\mathrm{d}x + f_y(1, 2)\mathrm{d}y = 1\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y.$$

Nyní dosadíme přírůstky

$$\mathrm{d}f(1, 2) = 1\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Diferenciál funkce z v bodě $[1, 2]$ je na obrázku 1 zobrazen jako červená úsečka.

Diferenciál funkce – geometrický význam, příklad 1

Vysvětlení

Skutečná funkční hodnota v bodě $[x_0 + \mathrm{d}x,\ y_0 + \mathrm{d}y] = [1{,}5; 2{,}5]$ je

$$z(1{,}5; 2{,}5) = \frac{(1{,}5)^2 + (2{,}5)^2}{2} = \frac{8{,}5}{2} = 4{,}25.$$

Funkční hodnotu v bodě $[x_0 + \mathrm{d}x,\ y_0 + \mathrm{d}y]$ můžeme vyjádřit také pomoci diferenciálu jako

$$f(1{,}5; 2{,}5) \doteq f(1,2) + \mathrm{d}f(1,2) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4, \text{ kde}$$

$f(1,2)\ldots$ funkční hodnota v daném bodě $[x_0, y_0]$, v grafu reprezentována zelenou úsečkou,
$\mathrm{d}f(1,2)\ldots$ diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ s přírůstky $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$, v grafu zobrazen jako červená úsečka.
Náš výpočet pak můžeme geometricky interpretovat takto: vezmeme hodnotu funkce v zadaném bodě $[x_0, y_0]$ a připočteme k ní přírůstek na tečné rovině (tj. diferenciál).

Z výpočtu je také patrné (a na obrázku 1 se o tom můžeme přesvědčit), že při aproximaci funkce z diferenciálem se dopouštíme jisté chyby (v grafu vyznačena žlutou úsečkou), která je ale poměrně malá. V našem případě

$$\boxed{\text{chyba}} = 4{,}25 - 4 = 0{,}25.$$

Modré kuličky na obrázku 1 znázorňují všechny důležité body:

$$[x_0, y_0, z_0] = \left[1, 2, \frac{5}{2}\right]$$

$$[x_0 + \mathrm{d}x,\ y_0 + \mathrm{d}y,\ z] = [1{,}5; 2{,}5; 4{,}25]$$

$$[x_0 + \mathrm{d}x,\ y_0 + \mathrm{d}y,\ f(1,2) + \mathrm{d}f(1,2)] = [1{,}5; 2{,}5; 4]$$

Diferenciál funkce – geometrický význam, příklad 1

Obrázek 1: Funkce $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, její diferenciál v bodě $[1, 2]$ s přírůstky $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

Diferenciál funkce – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = x^3 + xy^2$ v bodě $[2, 1]$.

Řešení

Obdobným postupem jako v příkladu 1, část a) dostáváme rovnici tečné roviny ve tvaru

$$13x + 4y - z - 20 = 0.$$

Podrobnější řešení tohoto příkladu viz. skriptum J. Osička: *Matematika pro chemiky.*

Diferenciál funkce – geometrický význam, příklad 2

Vysvětlení

Na obrázcích 2 a 3 je zobrazen graf funkce $z = x^3 + xy^2$ a tečná rovina k této funkci v bodě $[x_0, y_0] = [2, 1]$ (obrázek 3 je výřezem obrázku 2 pro $z > 0$).
Bod dotyku $[2, 1]$ je modrý, tečná rovina šedá. Jednotky na osách (jako ve všech 3D obrázcích) jsou žluté, ovšem souřadnicový systém není kartézský (na ose z je menší měřítko).

Můžete se přesvědčit (např. zvětšením 3D obrázku), že v blízkém okolí bodu dotyku tečná rovina velmi dobře aproximuje průběh zadané funkce.

Diferenciál funkce – geometrický význam, příklad 2

Obrázek 2: Graf funkce $z = x^3 + xy^2$.
Pozn.: Na ose z je menší měřítko!

Obrázek 3: Funkce $z = x^3 + xy^2$ pro $z > 0$
a její tečná rovina v bodě $[2, 1]$.