Neeuklidovská geometrie

1. přednáška — 20. 2. 2009

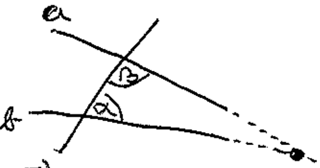
- (ne)euklidovské geometrie
  - V. postulát a jeho ekvivalence — negace V. postulátu vede na hyperbolickou geometrii, ne eliptickou
  - v Kleinově terminologii <u>hyperbolická</u> / eliptická geometrie
- modely pro hyperbolickou geometrii
- časová osa:

300 p.n.l.	?	1800	1820		
Euklides	Saccheri, Legendre	Gauss	Lobačevský, Bolyai	Beltrami, <u>Klein</u>, Poincaré, <u>Riemann</u> (první modely)	Cartan

Euklidovská geometrie:

- afinní prostor + skalární součin na zaměření; (řekněme $\mathbb{R}^2$)
- Euklidovy postuláty:
  - I. dva body určují přímku (úsečku ve skutečnosti),
  - II. každou úsečku lze prodloužit na přímku, — jakási homogenita prostoru
  - III. z každého bodu a daného poloměru lze sestrojit kružnici,
  - IV. požadujeme, aby všechny pravé úhly byly stejné,
  - V. máme-li dvě přímky, které protneme třetí přímkou:
    jestliže $\alpha + \beta < 2R$, kde R je pravý úhel,
    pak se prodloužené přímky protnou (na této straně)

ve skutečnosti je to XII.



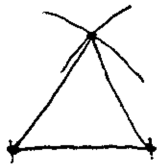
Ve skutečnosti je axiomů víc, ostatní jsou avšem spíše technického rázu, např. celek je větší než část, … Potom je ještě hromada nevyslovených předpokladů.

Teď to porovnáme:
- první tři jsou vlastně euklidovské konstrukce v klasickém smyslu;
- pátý postulát má několik ekvivalencí:
  - k dané přímce lze daným bodem vést právě jednu rovnoběžku: (definice 25)
    (přímky jsou rovnoběžné, když leží v jedné rovině a neprotínají se … D23)
    (D10 … pravý úhel: jestliže α je stejný s β, pak jsou pravé)

Pozn. Hilbertovy axiomy geometrie:
- definuje nejdříve primitivní pojmy: bod, přímka, rovina
- primitivní vztahy: uspořádání, shodnost, incidence
- 21 axiomů – například pojem rovnoběžnosti

přesněji má axiomy
- uspořádání,
- incidence,
- shodnosti,
- spojitosti, – implikuje například, že existuje průsečík …
- rovnoběžnosti.

Pozn. První věta v Základech je konstrukce rovnostranného trojúhelníka:
(na konci Základů jsou pak konstrukce pravidelných n-úhelníků)

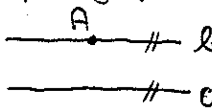
Obr.:  mám úsečku, z jednoho konce udělám oblouk o velikosti úsečky, pak totéž z druhého konce, průsečík určuje třetí vrchol Δ.

U Euklida chybí volba jednotky, ačkoli porovnává délky. Má však zaveden pojem ortogonality.

Zpátky k pátému postulátu: afinní struktura implikuje rovnoběžnost, dva podprostory jsou rovnoběžné právě tehdy, když zaměření jednoho je obsaženo v druhém, pak se teprve zjišťují průniky a tak...

Literatura: překlad od Joyce na netu;
klasický překlad od Byrna – taky na netu; (ale je horší)
Coxeter: Úvod do geometrie – spíše rozcestník;
Hlavatý: Neeuklidovská geometrie;

Ještě jednou pátý postulát:

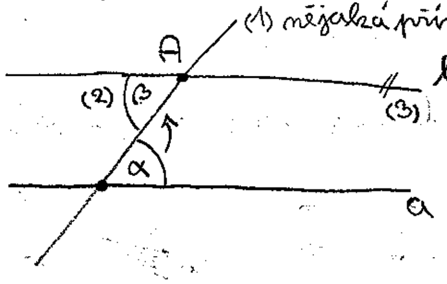
V ⇔ 

– jediná

(1) bez pátého postulátu: ke každé přímce lze daným bodem vést nějakou rovnoběžku, jednoznačnost je implikována až V. postulátem.

- Věta 31:

Dk.

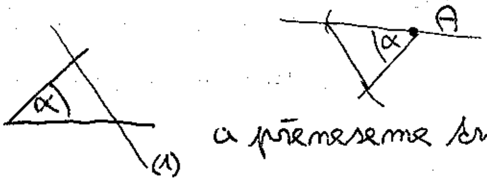


1. krok používá I,
2. krok – sestrojení úhlu β – věta 23,
3. krok – přímka b je rovnoběžná s a – věta 27.

Q.E.D.

- Věta 23: „přenášení úhlů"

Dk.



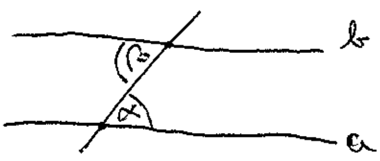
a přeneseme trojúhelník

napřed sestrojíme nějakou přímku (1), a pak přeneseme celý Δ

Q.E.D.

- Věta 27: „$\alpha=\beta \Rightarrow a \parallel b$"

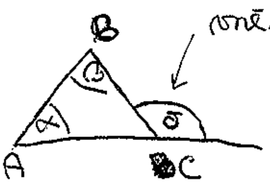
Dk.



obměnou: kdyby se ty přímky protly, tak úhly musí být různé
– když se protnou, pak máme Δ a $\beta>\alpha$ podle věty 16. o vnějším úhlu v Δ.

Q.E.D

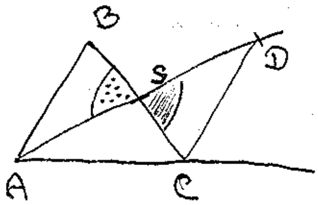
- Věta 16:



$\Rightarrow \delta>\alpha, \delta>\beta$

(pozn. na sféře toto neplatí •)

Dk.



(1) sestrojíme střed s (věta 10) ← není problém, je to euklidovská konstrukce
(2) spojíme body AS (I.),
(3) prodloužíme AS (II.),
(4) D: $|AS|=|SD|$ (věta 3.),
(5) ∢s = s∢ (věta 15.) – to by chtělo zkontrolovat!

(6) $|BS| = |SC|$, $|AS| = |SD|$,

$\Rightarrow$ $\triangle ABS$ a $\triangle CSD$ jsou shodné podle věty 4., (věta sus o trojúhelnících)
je dokázána přemístěním jednoho $\triangle$ na druhý

(7) $\sphericalangle BCD = \beta$,

(8) celek je větší než část $\Rightarrow \delta > \beta$.

Analogicky pro úhel α. Q.E.D.

2. přednáška — 26. 2. 2009

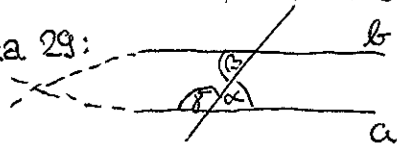
Úloha 1.

? sinová a kosinová věta na sféře

? hraniční případ, kdy neprojde věta o vnějším úhlu trojúhelníku

(2) pátý postulát implikuje, že rovnoběžka je jediná: – je to ta, kterou jsme zkonstruovali

Věta 29:



Jestliže $a \parallel b$, pak $\alpha = \beta$.

(pozn. tato věta je první věta v základech, kde je potřeba pátý postulát)

DK. sporem: $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$

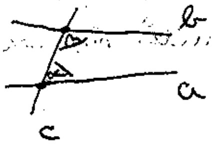
$\Downarrow$

$2R = \alpha + \gamma > \beta + \gamma$ pátý postulát

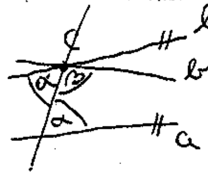
(věta 13.) tvrzení bez V. $2R > \beta + \gamma \Rightarrow a, b$ se protnou – spor s $\parallel$. Q.E.D

(3) nyní ekvivalence s pátým postulátem:

sporem: $\neg V \Rightarrow$



$\alpha + \beta < 2R$ ① $a \parallel b$ $\Rightarrow$ ①

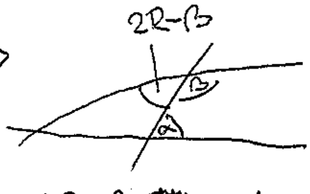


b' sestrojená podle (1)

② nebo se protínají na opačné straně

$\alpha + \beta < 2R \Rightarrow b \neq b'$, a tedy máme dvě rovnoběžky

② $\Rightarrow$



– čili tento případ je ve sporu už se základnějším tvrzením

$2R - \beta > \alpha$ spor s větou o vnějším úhlu v trojúhelníku (věta 16)

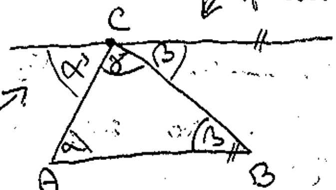
QED

Další ekvivalence s pátým postulátem:

- součet úhlů v libovolném trojúhelníku je roven $2R$

„$\Rightarrow$" Věta 32: V implikuje: podle věty 31 – že je tam to β?

... sestrojím rovnoběžku s AB bodem C



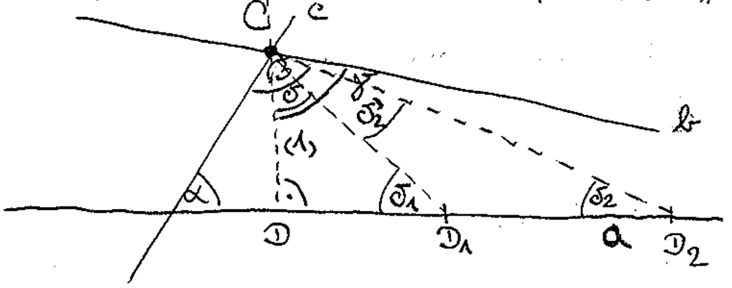
podle věty 29. pak $\alpha = \alpha'$

... nakonec: $\alpha' + \gamma + \beta = 2R$, což jsme chtěli dokázat. Q.E.D

„$\Leftarrow$" předpokládejme, že součet úhlů v každém $\triangle$ je $2R$ a neplatí V.

Potom máme následující obrázek:

$\neg V \Rightarrow \exists: \alpha+\beta<2R$ a $a \parallel b$:



(1) sestrojíme kolmici CD, (eukleidovská konstr.)

(2) $\alpha+\beta<2R \Rightarrow \gamma<R$, (spočítáme)

(3) $D_1 \in a$: $|DC| = |DD_1|$,

(4) $\delta = \delta_1$ (rovnoramenný Δ) − věta 5
$= \frac{R}{2}$, neboť $R+\delta_1+\delta_1' = 2R$,

(5) $D_2 \in a$: $|D_1C| = |D_1D_2|$

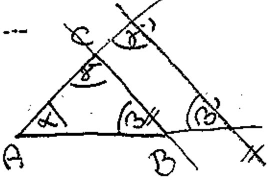
(6) takto můžeme pokračovat navěky... $\Rightarrow \delta_2 = \delta_2' = \frac{R}{4}$

(7) $a \parallel b \Rightarrow \gamma \geq \delta_1' + \delta_2' + \dots = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8} + \dots = R \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = R$, tj. $\gamma \geq R$, což je ve sporu s krokem (2).

Q.E.D.

- součet úhlů v libovolném trojúhelníku je konstantní:
  − domácí úloha 2. „⇒" V implikuje, že součet úhlů je 2R, zejména konstantní
- existují podobné (mají stejný úhly) neshodné trojúhelníky:

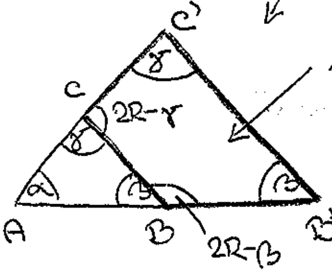
„⇒". V. ...



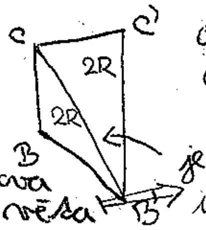
V. ⇒ $\beta = \beta'$ a $\gamma = \gamma'$, tj. máme podobné trojúhelníky.

tj. podobné trojúhelníky jsme na sebe napřed přenesli

„⇐"



součet vnitřních úhlů je roven 4R;



obecně, součet úhlů v n-úhelníku je roven $(n-2) \cdot 2R$ (výpočet)

1. Legendreova věta

jestliže 4-úhelník má součet úhlů 4R, pak Δ má součet 2R

... potřebujeme nyní 1. a 2. Legendreovu větu ⇒ podle 1. existuje Δ s nulovým defektem (tj. součet úhlů je 2R), podle 2. jsou všechny Δ s nulovým defektem ⇒ V. postulát.

Q.E.D.

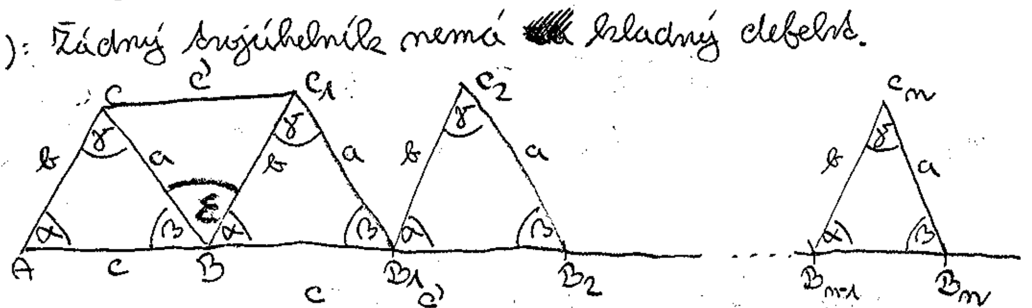
Def. defekt δ trojúhelníka definujeme jako: 2R − součet vnitřních úhlů. Obecněji, defekt n-úhelníka definujeme jako: $(n-2)2R$ − součet vnitřních úhlů.

Věta (1. Legendreova–Saccheriho věta) Defekt každého trojúhelníka je větší nebo roven 0, tj. součet vnitřních úhlů je menší nebo roven 2R.

Věta (2. Legendreova věta): Jestliže defekt nějakého trojúhelníka je nula, pak každý trojúhelník má defekt nula.

Nevěta (3. Legendreova): Žádný trojúhelník nemá kladný defekt.

DK. sporem: ΔABC libovolný:



(1) prodluž AB,

(2) přenes AB n-krát,

(3) $\alpha+\beta+\varepsilon = 2R$.

Kdyby $\alpha+\beta+\gamma > 2R$, pak $\gamma > \varepsilon \Rightarrow \overset{c}{\underset{|BB_1|}{|AB|}} > \overset{c'}{\underset{|C_1C_2|}{|CC_1|}}$ ... AB vidím pod větším úhlem

trojúhelníková nerovnost

Dále jistě $|AC| + |CC_1| + |C_1C_2| + \dots + |C_{n-1}C_n| + |C_nB_n| > |AB_n|$ a po dosazení:

$b + mc' + a > (m+1)\cdot c$

$\underbrace{m(c'-c)}_{\text{kladné pro } \forall m \in \mathbb{N}} < \underbrace{-c+a+b}_{\text{kladné konstantní}}$

... to je spor s Archimédovým axiomem. Q.E.D.

3. přednáška — 6. 3. 2009

Trochu notace:

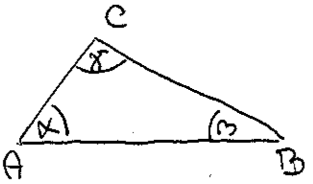
$\mathcal{A}$ ... všechny „axiomy Eukleidovy geometrie" kromě V.

Eukleidova geometrie ... teorie generovaná $[\mathcal{A}, V]$

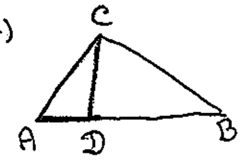
Lobačevského / Bolyaiova geometrie ... teorie generovaná $[\mathcal{A}, \neg V]$ (hyperbolická geometrie)

Dk. Buďiž máme nějaký $\triangle$ s nulovým defektem:

$\alpha + \beta + \gamma = 2R$

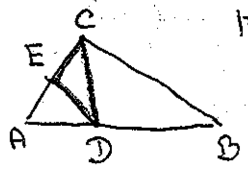


(a)



... pro každý bod D na libovolné hraně dostaneme opět $\triangle$ s nulovým defektem – defekt je aditivní a nezáporný

(b)



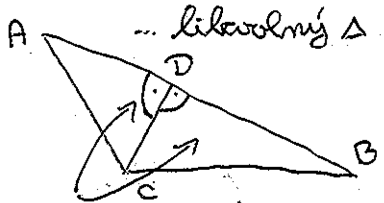
$\Rightarrow \delta(\triangle CDE) = 0$ ... opět

(c) a podobně

Potřebujeme nyní ale diskutovat „větší $\triangle$".

Lemma: Pokud δ nějakého $\triangle$ je nulový, pak defekt každého pravoúhlého $\triangle$ je taky nulový.

Odtud:



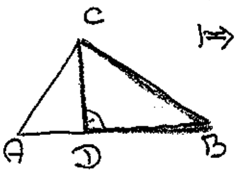
... libovolný $\triangle$ můžeme výškou rozdělit na dva pravoúhlé, které mají defekt nula $\Rightarrow \delta(\triangle) = 0$

$\delta = 0 \Rightarrow \delta(\triangle ABC) = 0$.

Q.E.D.

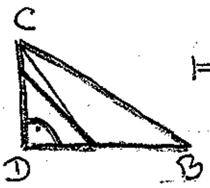
Dk. (lemmatu)

$\delta(\triangle ABC) = 0$ ...



$\Rightarrow \delta(\triangle CDB) = 0$

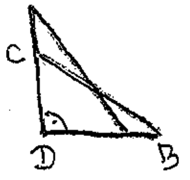
(i) pokud lib. $\triangle$ lze „nacpat do $\triangle CDB$:



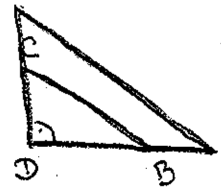
$\Rightarrow \delta(\triangle) = 0$ podle (b).

(ii) pokud ale $\triangle$ nevecpeme do $\triangle CDB$:

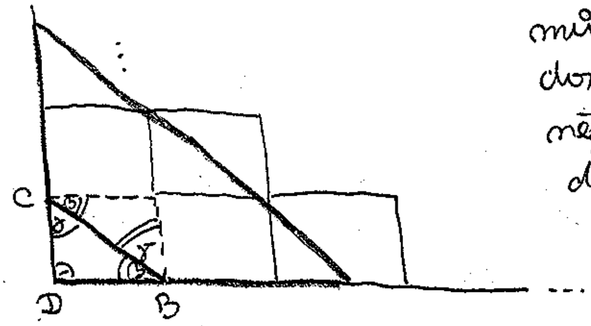
např.



nebo



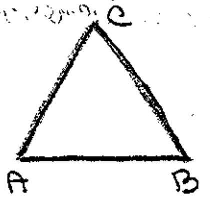
... to musíme nějak vyargumentovat (bez podobnosti)



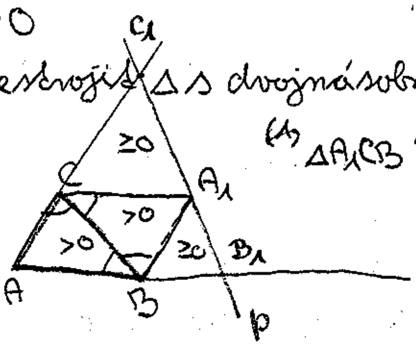
můžeme placat obdélníky, až se △ dostane dovnitř, tj. bude vepsán nějakému čtyřúhelníku s nulovým defektem a odtud už to plyne

$\delta(CDB)=0 \Rightarrow \beta+\gamma=R \Rightarrow \delta(\square)=0 \Rightarrow \delta(\square\square)=0, \dots$ Q.E.D.

③ Předpokládejme, že: $\delta(\triangle ABC)>0$



Chceme sestrojit △ s dvojnásobným defektem.



(1) $\triangle A_1CB \cong \triangle ABC$,

(2) prodloužíme AB, AC,

(3) přímka p procházející A_1 a protínající $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$,

(4) $\delta(\triangle AB_1C_1) \geq 2\delta(\triangle ABC)$.

Opakujeme-li konstrukci n-krát, obdržíme $\triangle(AB_nC_n)$ s libovolně velkým defektem, což je spor, neboť $\delta(\triangle) < 2R$. Q.E.D?

A kde je chyba? – krok (3) není správně: ve skutečnosti máme ekvivalenci:

V. $\Leftrightarrow$ pro každý bod A uvnitř libovolného úhlu:  lze sestrojit přímku p procházející bodem A a protínající obě ramena a, b.

My jsme vlastně dokázali směr „$\Leftarrow$", druhý směr je snadný.

Závěrem si řekněme, co můžeme očekávat v hyperbolické geometrii:

(1) ke každé přímce lze daným bodem vést aspoň dvě rovnoběžky,

(2) princip P: jestliže věta V platí v Euklidovské geometrii a neplatí v hyperbolické geometrii, potom $V \Leftrightarrow \mathrm{V}$.:

$$\left.\begin{array}{l}[A,\mathrm{V}] \Rightarrow V \;\&\; [A,\neg \mathrm{V}] \Rightarrow \neg V\\ V \Rightarrow \neg A \text{ nebo } \mathrm{V}\end{array}\right\} V \Leftrightarrow \mathrm{V}.$$

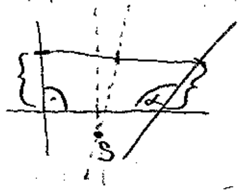
(3) zobrazení $\triangle \mapsto \delta(\triangle)$ je kladné a nekonstantní,

(4) existuje úhel a jeho vnitřní bod, kterým nelze vést příčku obou ramen,

(5) všechny podobné trojúhelníky jsou shodné.

V budoucnosti dokážeme, že Pythagorova věta je ekvivalentní s V, nebo že existuje trojúhelník s libovolně velkým obsahem a podobně.

$\boxed{\text{Úloha 3.}}$



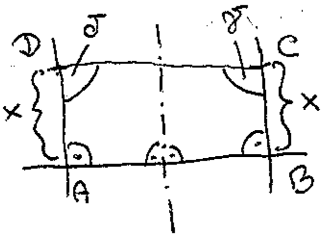
$\Rightarrow \alpha = R$

Náčrt „hloupý" důkaz, že všechny úhly jsou pravé.

4. přednáška — 13. 3. 2009

Euklides ... Saccheri – Legendre, Gauss, Bolyai, Lobačevskij

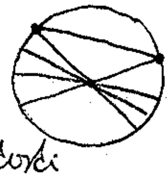
Saccheriho čtyřúhelník:



... bez V umí dokázat, že $\delta = \gamma$ a osa úsečky AB je i osou úsečky CD (doporučené cvičení)

Základy hyperbolické geometrie

- hyperbolickou geometrií myslíme formálně axiomatickou teorii generovanou $\mathcal{A}$ a $\neg$V., tj. absolutní geometrie s negací pátého postulátu
- modelem je například tzv. Beltrami-Kleinův model: prostorem je vnitřek kruhu (kuželosečky), hranice jsou nevlastní body, přímky jsou úsečky spojující hranici, body jsou body ... Obr.



$\mathcal{A}$ {
- je snadné ověřit axiomy incidence a uspořádání, zatím neumíme axiomy shodnosti; axiom o rovnoběžkách, resp. jeho negace, je splněn; axiomy spojitosti jsou taky „zděděny z roviny".

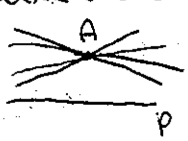
Věta: $\neg$V implikuje:

(1) $\exists$ přímka p a bod A tak, že bodem A lze vést k p alespoň dvě různé rovnoběžky. – to je přímo $\neg$V, neboť vždy existuje aspoň jedna rovnoběžka

(2) Pro každou přímku p a každý bod A lze vést alespoň dvě rovnoběžky.

(3) Ke každé přímce lze daným bodem vést nekonečně mnoho rovnoběžek.

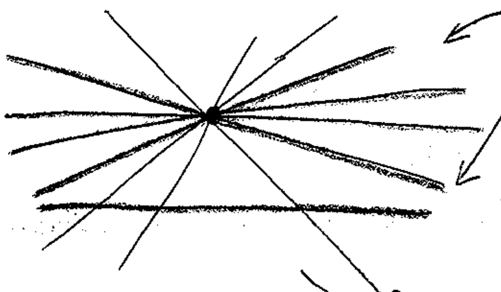
Dk. (3) je implikována axiomy uspořádání a spojitosti; jinak viz Hilbert



← opět rovnoběžky

(2) dostali bychom Δ s nulovým defektem – 2. přednáška, věta 32. □

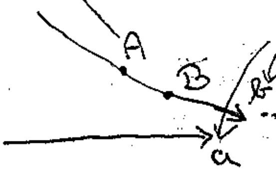
Obr.



jakési mezní přímky – existují a jsou to rovnoběžky – není to různoběžka, pač tu můžeme posloupnost

Def. rovnoběžky < souběžky (dvě), rozběžky (nek. mnoho)

Další pojmy:



polopřímky! ⇝ souběžka je jen jedna

... souběžka pro A i B je ta stejná; proto říkáme jednoduše, že a je souběžná s b, píšeme „$a \parallel b$". nebudeme dokazovat

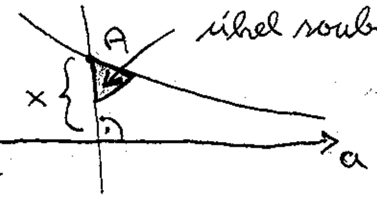
Podobně rozběžné polopřímky značíme „a)(b" a různoběžné „$a \times b$".

Věta: Relace $\parallel$ je symetrická a tranzitivní. Relace)(není tranzitivní.

Dk. přeskočíme; v modelu vypadá souběžnost takto:

... mají společný „bod", tj. nevlastní bod. □

Def. Úhel souběžnosti:
– z bodu A na souběžce k polopřímce a spustíme kolmici a měříme úhel při A.

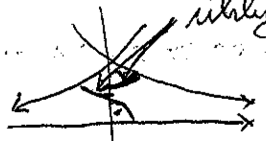


úhel souběžnosti, je to ve skutečnosti jen funkce vzdálenosti x, označujeme $\Pi(x)$.

Pozn. Konvence: od dneška R odpovídá $\frac{\pi}{2}$ a pomocí této konvence můžeme „měřit."
Časem uvidíme, že $\Pi(x) = 2\cdot\arctan e^{-\frac{x}{k}}$, kde K je nějaká konstanta.

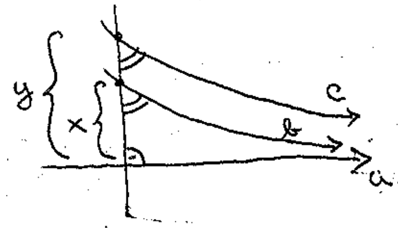
Máme: * $\Pi(x) < \frac{\pi}{2}$, viz též definice 1. kolmice
* $\lim_{x\to 0}\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\Pi(x) = 0$,
* $x<y \Rightarrow \Pi(x) > \Pi(y)$.

– kdyby $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$, tak:



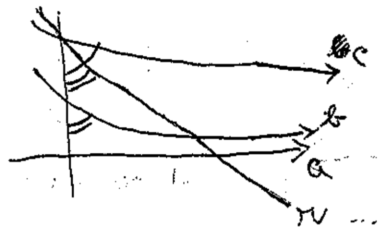
úhly souběžnosti jsou symetrické, tedy oba pravé, pak ale jsou souběžky stejný, tj. zejména ne dvě.
↓
spíše bychom měli jen jednu rovnoběžku

– k monotónnosti:
(a) kdyby $x<y$ a $\Pi(x)=\Pi(y)$, pak:
$\Rightarrow b \iint a \ \& \ c \iint a \Rightarrow b \iint c$



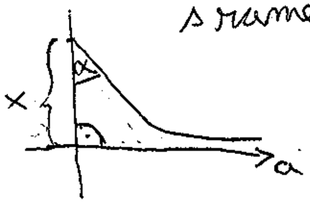
Lemma: $\Pi(x)=\Pi(y) \Rightarrow b)(c \Rightarrow$ spor
Dk. za třicet minut ± týden

(b) kdyby $x<y$ a $\Pi(x)<\Pi(y)$, pak:
... dostaneme spor s $r)(b$



... $r \times a \Rightarrow r \times b$

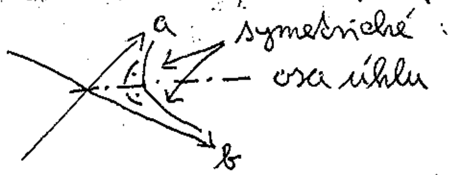
Def. Mějme úhel α, pak existuje právě jedno x tak, že přímka a je souběžka s ramenem úhlu. Tuto přímku a nazýváme první kolmicí.



Pozn. Je to vlastně inverze k monotónní funkci Π, potřebujeme ale užít fakt, že existuje přímka neprotínající obě ramena úhlu. ($\Leftarrow \neg V$)

Věta: Pro (libovolné dvě nesouběžné polopřímky) existuje jediná společná souběžka.

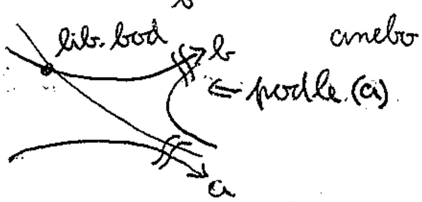
Dk. (a) $a \times b$:



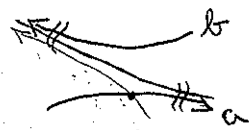
...

$\Rightarrow$ množina nevlastních bodů není přímka
co to je?

(b) $a)(b$:

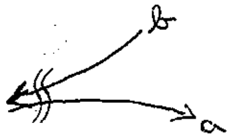


anebo:



...

(c) $a \iint b$:



anebo:

...divné, nutno též vyloučit! □

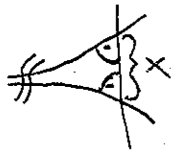
Věta: $a)(b \Leftrightarrow a,b$ mají společnou kolmici, která je pak jediná.
Dk. jednoznačnost:

$\sigma = 0$! – spor

existence – $\boxed{\text{D.Ú. 4}}$ V(a) $a)(b \Rightarrow$ mají společnou kolmici (konstruktivně)

(b) $a \times b \Rightarrow$ nemají společnou kolmici, ...  $\Rightarrow \delta < 0$ spor.

(c) $a \parallel b \Rightarrow$ nemají společnou kolmici.

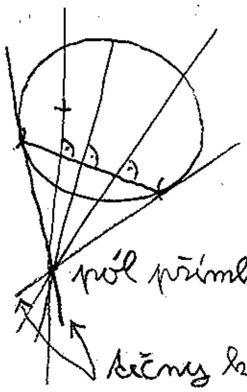


$x \Rightarrow \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ spor.

□

Pozn. Kolmost v BK-modelu a talky vzdálenost:

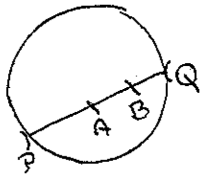
Obr.



pól přímky – všechny kolmice k dané přímce jím procházejí

tečny k tomu disku

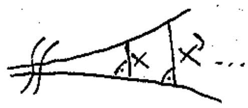
Obr.

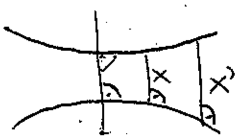


$$v(A,B) \overset{df.}{=} \frac{k}{2}\cdot \ln\Bigg(\underbrace{\frac{|PA|}{|AQ|} : \frac{|PB|}{|BQ|}}_{\text{dvojpoměr čtyř bodů}}\Bigg)$$

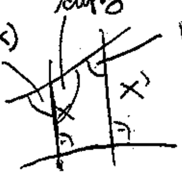
$\Rightarrow$ shodnosti jsou projektivní transformace, tj. podstatně menší grupa, než v Euklidovské geometrii

Pozn. obrázky námi malované odráží realitu vzdáleností:





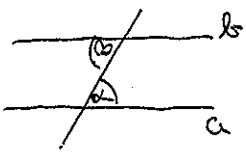
... vzdálenost roste $\rightarrow$ tímto směrem; a těmito směry $\leftarrow, \rightarrow$



$\frac{\pi}{2} > \Pi(x)$ $\quad \Pi(x') < \frac{\pi}{2}$ ... a proti většímu úhlu je větší strana (platí v absolutní geometrii). $\Rightarrow x < x'$.

5. přednáška — 20. 3. 2009

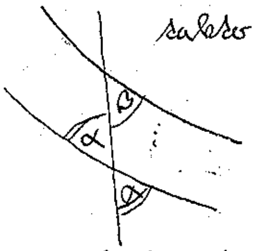
Zpět k ty-víš-jakému lemmatu:

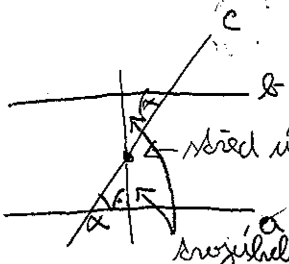


$\alpha = \beta \Rightarrow a)(b$

(věta 27)

takto jsme to měli minule





střed úsečky

trojúhelníky jsou shodné

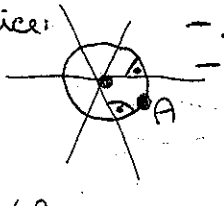
DK. rovnoběžnost víme od Euklida, chceme rozběžnost:
$\Rightarrow$ máme společnou kolmici k a i b, tj. musí to být rozběžky

□

Zobecněné svazky a cykly

– v Euklidovské rovině:

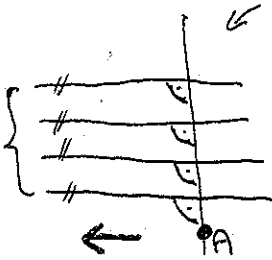
- kružnice:



– kružnice je ortogonální trajektorie svazku přímek
– kružnice je obrazem bodu A při symetriích podle všech přímek svazku

- mezní kružnice – v nevlastním bodě: (přímka)

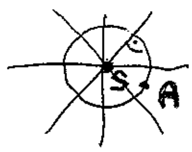
svazek



← opět ortogonální trajektorie

– v hyperbolické rovině:

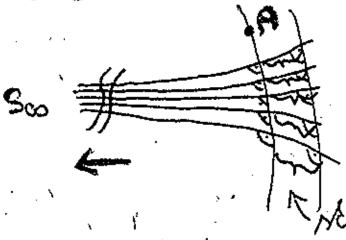
(a) obyčejná kružnice – není rozdíl, je charakterizovaná bodem S (střed) a bodem A; tedy ortogonální trajektorie různoběžného svazku



– říkáme tomu kročka
anebo opět obraz bodu A při symetriích podle přímek svazku

měli bychom společnou kolmici souběžek

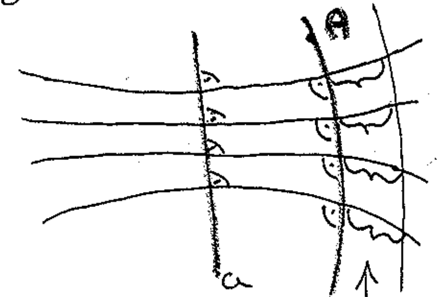
(b) svazek souběžek dává mezní kružnici, ale není to přímka:



stejné vzdálenosti

– říká se tomu – mezní kružnice (Lobačevskij)
– paracykl (Gauß)
– horocykl – v literatuře
– točka (Žádník)

(c) svazek rozběžných přímek definujeme jako soubor přímek navzájem kolmých k dané přímce:



a (base)

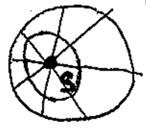
stejné délky

– tzv. zámezní kružnice, kromě původní přímky a to nejsou přímky – měli bychom čtyřúhelník s nulovým defektem
– říká se tomu – ekvidistanta (Lobačevskij), hypercykl (Gauß), hypocykl (ruská literatura), mročka

Def. Cyklem rozumíme obraz bodu A při symetriích podle všech přímek svazku ⇝ obyčejná, mezní, nebo zámezní kružnice

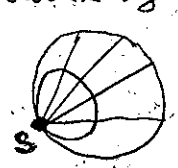
B. Svazky v Kleinově modelu:

• různoběžky:



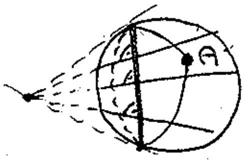
⇝ elipsa

• souběžky:



⇝ elipsa proch. bodem S

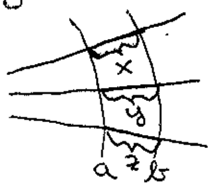
• rozběžky:



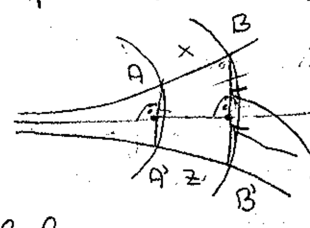
⇝ elipsa procházející těmi dvěma nevlastními body

Několik jednoduchých pravd:

* každý zobecněný cykl je kolmý ke všem přímkám odpovídajícího svazku
* skoro žádný cykl není přímka, ale každá přímka je cykl (rozběžek)
* dva „soustředné" cykly mají konstantní vzdálenost – potřeba trochu rozmyslet, nakreslit, spočítat, ...

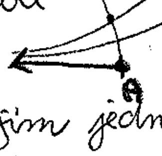


$x = y = z$



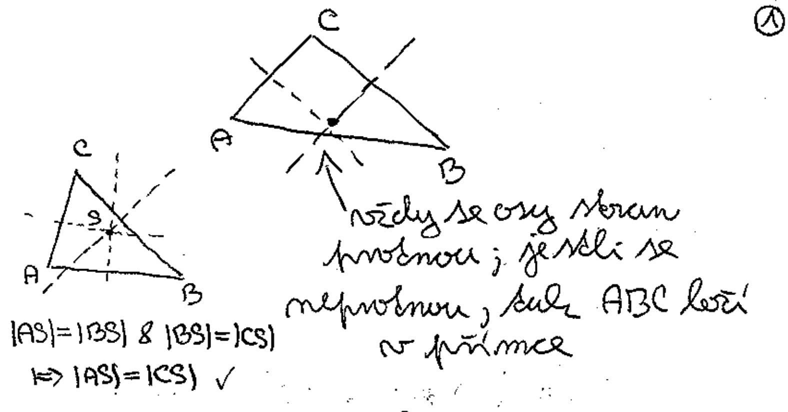
shodné

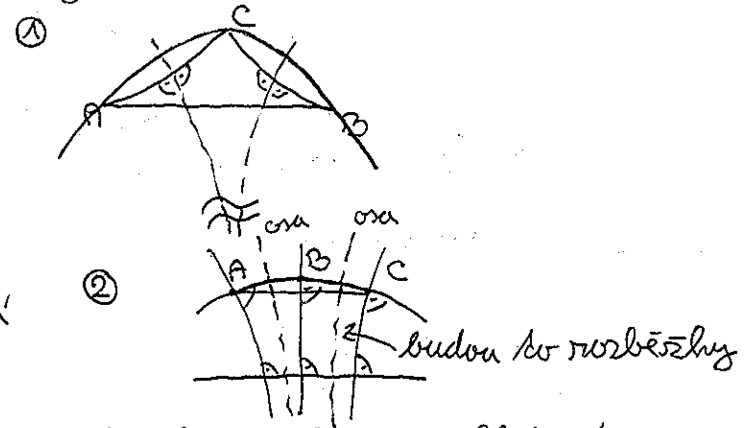
* všechny točky jsou shodné, kročky a mročky nikoli
  – točka je určena polopřímkou s počátkem:
  (z polopřímky hyperbolickou konstrukcí sestrojím jednoznačně točku) a polopřímky jsou navzájem shodné



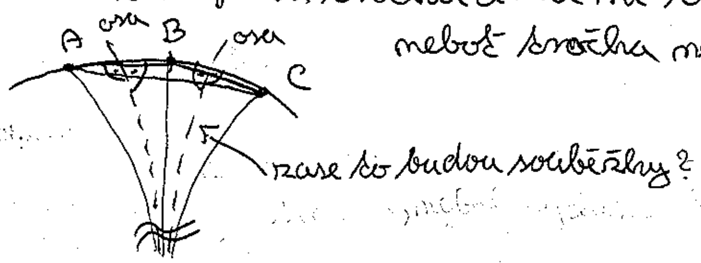
Věta: Existují trojúhelníky, kterým nejde opsat kružnice. (⇒ ekviv. s V)

Dk. v Eukleidovské rovině: v hyperbolické rovině:





⇒ vezmeme-li nějakou tětivu a na ní tři body, obdržíme hledaný △, neboť tětiva nemůže být zároveň kružnice



Lemma: Osy stran libovolného trojúhelníka patří do některého zobecněného svazku.

Dk. $\boxed{\text{Úloha 5.}}$ ✓ □

Nahlédněme nyní do třídé:

- primitivní pojmy: bod, přímka, rovina
- vzájemné polohy: různoběžnost, mimoběžnost jasné; souběžnost dvou přímek – leží v nějaké rovině, kde jsou souběžné

Def. • $p \mathbin{SS} \rho$, jestliže existuje $q \subseteq \rho$ souběžná s p,

• $p)(\rho$, pokud neexistuje $q \subseteq \rho$ souběžná s p,

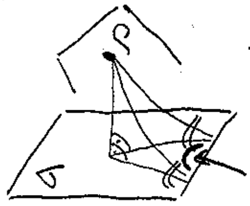
• $\rho \mathbin{SS} \sigma$, pokud existuje přímka $q \subseteq \rho$ souběžná se σ,

• $\rho)(\sigma$, jestliže nejsou různoběžný ani souběžný.

Lemma: v $\mathbb{H}^3$ platí: $p \mathbin{SS} q$ a $q \mathbin{SS} r \Rightarrow p \mathbin{SS} r$.

proč jsme definovali souběžnost rovin tak, jak jsme ji definovali

Pozn.

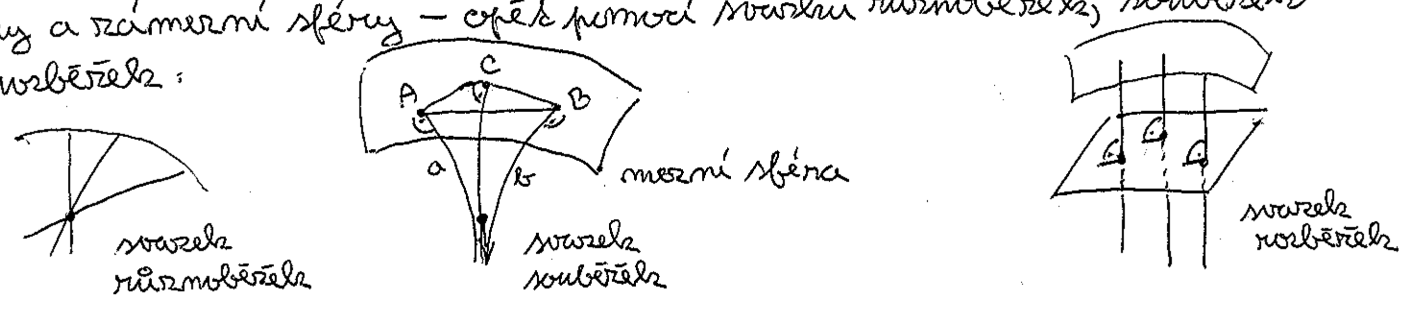


předpokládejme, že máme dvě nezávislé přímky v ρ souběžné s rovinou σ, pak ale existuje jejich společná souběžka ležící v rovině σ, a tedy se ρ a σ protínají ve společné souběžce (i v prostoru!)

společná souběžka, která je jediná.

$\Rightarrow \exists p_1, p_2 \subseteq \rho : p_1 \mathbin{SS} \sigma \ \&\ p_2 \mathbin{SS} \sigma \Rightarrow \rho \cap \sigma \neq \emptyset$.

Zobecnění kružnice, mezní kružnice a změrná kružnice jsou sféry, mezní sféry a zámezní sféry – opět pomocí svazků různoběžek, souběžek a rozběžek:



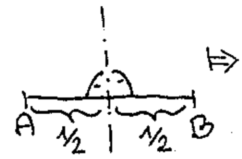
Na mezní sféře je indukována rovinná Euklidovská geometrie – musíme ale dát význam primitivním pojmům a ověřit axiomy:

- body – jasný
- přímky – průnik té mezní sféry s rovinou určenou dvěma přímkami svazku, bude to pak křivka v této rovině; každé dva body určují ty přímky, které je určují a tedy určují přímku :-)
- některé axiomy jsou v pohodě z obecného prostoru
- pátý postulát ? – rozmyslet

6. přednáška — 26.3.2009

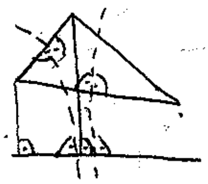
← ještě k tomu:

* osa $AB := \{X \mid |AX| = |BX|\}$ $\Leftrightarrow$ osa



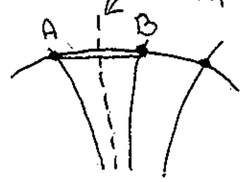
$\Rightarrow$ osa je to, co bychom očekávali

* D.Ú. osy stran △ tvoří nějaký zobecněný svazek ...



Saccheri

* osa patří do stejného svazku



$\Rightarrow$ z těch dvou bodů plyne, že existuje △, kterému nejde opsat kružnice

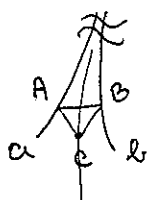
Zpět k 3D:

* vzájemná poloha přímek a rovin (souběžnost)

Lemma: $a,b \in \rho$: $a \parallel \sigma$ a $b \parallel \sigma$ $\Rightarrow$ $\rho \cap \sigma \neq \emptyset$. – to jsme si ukázali minule

* potřeba lemmatu: $a \parallel b$ a $b \parallel c$ $\Rightarrow$ $a \parallel c$ (i v 3D)

Dk. uvažme dvě libovolné souběžky a, b a bod C; uvažme roviny $\sigma_1 = C + a$ (rovina určená bodem C a přímkou a), $\sigma_2 = C + b$ a jejich průsečnici $c := \sigma_1 \cap \sigma_2$ (v našem případě pak zvolíme bod $C \in c$ a aplikujem jednoznačnost souběžky v daném směru)



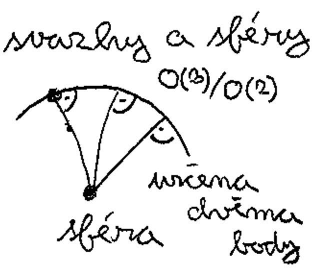
c pak by a protínala b

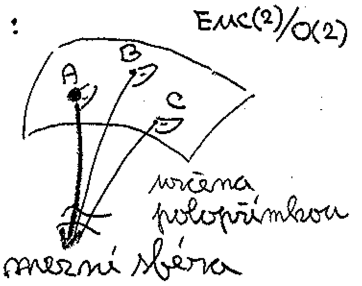
Chceme ukázat, že pak $c \parallel a$ a $c \parallel b$:

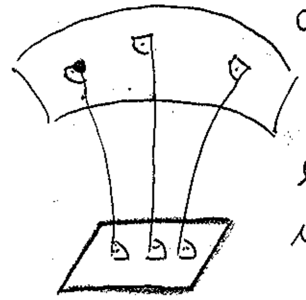
(a) c a b se neprotínají – sporem

(b) je-li c' „mezi", pak $c' \times b$ – uvážíme rovinu určenou c' a bodem A a pak její průnik s rovinou určenou a, b. Protože $a \parallel b$, tak průsečnice těchto dvou rovin musí protínat b – to je ale též průsečík s c'. □

* svazky a sféry:







ekvidistantní plocha určena bodem a rovinou

Věta: Mezní sféra v $\mathbb{H}^3$ je modelem rovinné euklidovské geometrie.

Dk.
* axiomy incidence, ✓
* axiomy uspořádání,
* axiomy shodnosti,
* axiomy rovnoběžnosti,
* axiomy spojitosti ✓

* primitivní pojmy:
  body ~ body; přímky ~ mezní kružnice = průniky mezní sféry s rovinami tvořenými přímkami odpovídajícího svazku
* další relace jsou zděděny z obecného prostoru

– pro axiomy uspořádání je potřeba si rozmyslet, že křivku lze prodlužovat na obě strany do nekonečna a netvoří uzavřenou křivku (jako třeba na sféře)

– pro axiomy shodnosti: mezní sféra je „homogenní prostor" – to tak nějak plyne z definice přes symetrie

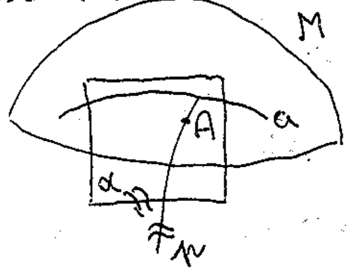
– axiom rovnoběžnosti: (budeme umět později)

(a) každým bodem A lze k přímce a vést „rovnoběžku"

(b) nějaká ekvivalentní podoba – například součet úhlů v Δ je $2R$

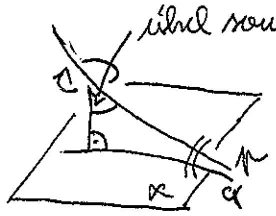
(c) G – grupa izometrií $\mathbb{H}^3$ zachovávající mezní sféru M; chceme ukázat, že $G \cong Euc(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$

tohle budeme umět časem, až zjistíme relaci $S(\Delta) = konst. \cdot \delta(\Delta)$, takže zkusíme (a):



$a = M \cap \alpha$,
$A = M \cap p$,
$\alpha \not\parallel p \overset{?}{\Rightarrow}$ existuje jediná rovina β ve svazku souběžná s α a obsahující p

rotujeme tu přímku o daném úhlu souběžnosti kolem kolmice k rovině



úhel souběžnosti $\rightsquigarrow$ kužel souběžnosti = uvážíme přímky souběžné k přímce q pod daným úhlem souběžnosti

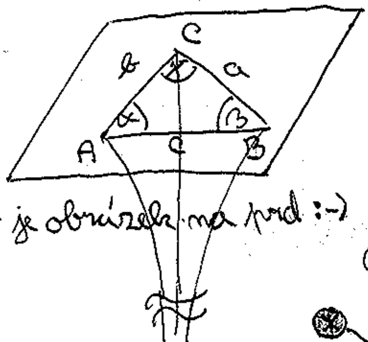
tj. β = „tečná" rovina ke kuželu obsahující p

jakákoli variace β': $\beta' \cap$ kužel dává druhou souběžku s $\alpha \Rightarrow \alpha \cap \beta' \neq \emptyset$. □

* všechny mezní sféry jsou vzájemně shodné – stejný argument jako v rovině; sféry a nadsféry nejsou – tj. můžeme si vybrat jednu a pomocí Euklidovské geometrie na ní měřit v hyperbolické geometrii

Pokroky hyperbolické geometrie

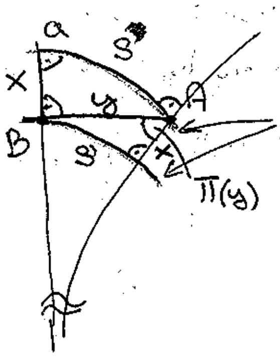
... budeme přecházet od roviny k mezní sféře a zpět



tohle je obrázek na pod :-)

Uvažme nejdříve:

– chceme porovnat délky x, y a s, s'



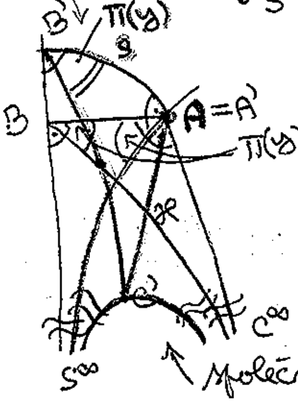
Platí: • $s = s' \cdot e^{\frac{x}{k}}$, kde k je nějaká konst.

⊛ • $s = \varkappa \cdot \cot g\, \Pi(y)$, kde $\varkappa$ je nějaká konst.

• $s' = \varkappa \cdot \cos \Pi(y)$ ... $\boxed{\text{DÚ.G}}$ ✓

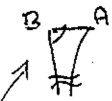
co je modře, je na mezní sféře, je to projekce toho žlutého Δ

ad ⊛:



společná souběžka

(1)

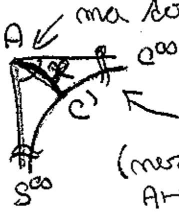


Δ, se kterým jsme začali výše

(2) převrátíme a nalepíme Δ v kolmém směru k BA – to je ten žlutý

(3) A určuje horosféru = mezní sféru; má to být tečný

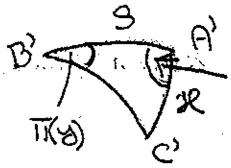
(4)



tudy je definovaný $\varkappa$ (nezávisle na ostatních jako A↦ ze shodnosti)

(5) úhel při vrcholu B' na horosféře je opět $\Pi(y)$ – plyne z toho, že žlutý i modrý Δ jsou kolmé k té přímce ✓

(6)

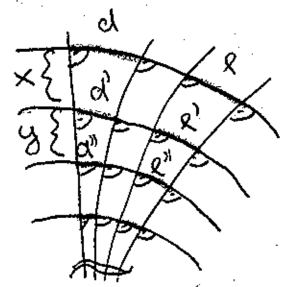


tady bychom chtěli pravý úhel – ale jak?! – je pravý, protože roviny ABS_∞ a $AC_\infty S_\infty$ jsou kolmé

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\Pi(y) = \frac{s}{\varkappa}$$

7. přednáška — 2.4.2009

Ještě k $s = s' e^{\frac{x}{k}}$:



Pozn. též viz Liebman

(a) ukážeme, že $\frac{s}{s'} = f(x)$, tj. poměr je jen funkcí vzdálenosti

pokud $d = \ell \Rightarrow d' = \ell'$ – to plyne z toho, že všechny horocykly jsou shodné, tj. i ty „pásy" – anebo lépe porovnáním těch 4-úhelníků

zejména, pokud $d = c\ell \Rightarrow d' = c\ell'$, $c \in \mathbb{R}$, a tedy

$$c = \frac{d}{\ell} = \frac{d'}{\ell'} \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{\ell}{\ell'}$$

a je to funkce x

(c:) nejdříve přirozený, pak racionální, nakonec reálný

(b) chceme $f(x+y) = f(x)f(y)$ a pak ze spojitosti $f(x) = a^x$ pro nějaké $a = e^{\frac{1}{k}}$, tj. $f(x) = e^{\frac{x}{k}}$

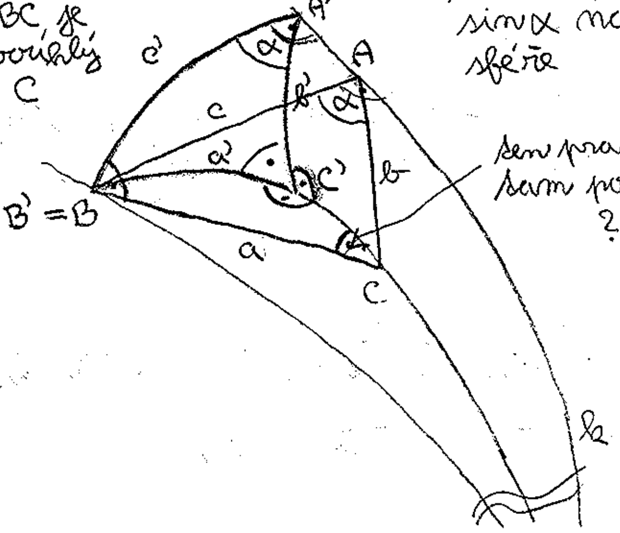
$$\frac{d}{d'} = f(x), \quad \frac{d'}{d''} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d''} = f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$$

napřed sčítáme čísla přirozená, pak celá a nakonec racionální a užijeme spojitost

Trocha trigonometrie

ΔABC je pravoúhlý při C

budeme počítat $\sin\alpha$ na mezní sféře



ten pravý úhel tam potřebujeme ?!

(1) kolmice k k rovině ABC, $k \ni A$

(2) horosféra určená k a B

(3) promítneme ΔABC na horosféru

(4) úhel α se reprodukuje, neboť obě plochy jsou kolmé k k

trochu promyslet! (5) pravý úhel též zůstává, neboť máme dvě kolmé roviny BC↓ a AC↓ nebo tak nějak

A odtud můžeme počítat: (viz minule)

$$\sin\alpha = \frac{a'}{c'} = \frac{\varkappa\cdot\operatorname{cotg}\Pi(a)}{\varkappa\cdot\operatorname{cotg}\Pi(c)} \Rightarrow \operatorname{cotg}\Pi(a) = \sin\alpha\cdot\operatorname{cotg}\Pi(c).$$

(poznamenejme, že konstanta $\varkappa$ je pořád schovaná ve funkci Π).

Podobně se ukáže: $\cos\Pi(a) = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\Pi(b)$, $\cos\Pi(b) = \cos\alpha\cdot\cos\Pi(c)$. $\boxed{\text{Domácí úloha 7.}}$ ✓

Odtud například: $\sin\alpha = \sin\Pi(b)\cdot\cos\beta$ nebo $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \sin\Pi(c)$ – jo, dá se to ✓

Ještě počítejme: $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}\Pi(a)}{\operatorname{cotg}\Pi(c)}$, $\cos\alpha = \dfrac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(c)}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}\Pi(a)}{\cos\Pi(b)}\cdot\sin\Pi(c) = \dfrac{\cos\Pi(a)}{\operatorname{cotg}\Pi(b)}$ podle druhé rovnosti výše

$\Rightarrow \sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\cdot\sin\Pi(b)$ ... tomuto budeme říkat hyperbolická Pythagorova věta

V budoucnu budeme chtít dokázat, nicméně už teď věřme, že platí:

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$ pro nějaké k

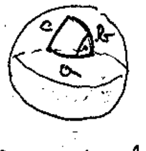
$\Leftrightarrow \sin\Pi(x) = \dfrac{1}{\cosh(x/k)}$ ... a pak můžeme k Taylorovým rozvojům přejít a obdržet klasickou Pythagorovu větu pro $k \to +\infty$, tj. Euklidova geometrie je limitním případem hyperbolické geometrie.

$\rightsquigarrow \cosh\frac{c}{k} = \cosh\frac{a}{k}\cdot\cosh\frac{b}{k}$ ... jiná formulace Pythagorovy věty, která je běžnější.

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$ a dosadíme – proč a kam?

dále máme: $\cos(ix) = \cosh x$, $\sin(ix) = i\sinh x$

Pozn. na sféře

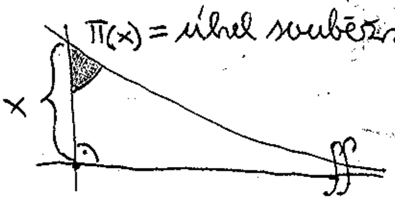


$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cdot\cos\frac{b}{r}$, čili „přechod" ke sférické geometrii je „pouze" substituce $k = ir$.

Náš první model je tedy imaginární sféra s poloměrem ik. :-)

8. přednáška ———————— 9.4.2009

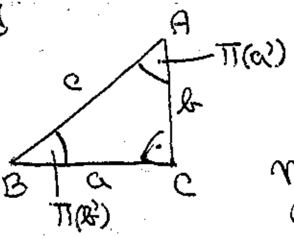
Věta:



Platí: $\operatorname{tg}\dfrac{\Pi(x)}{2} = d^x$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$.

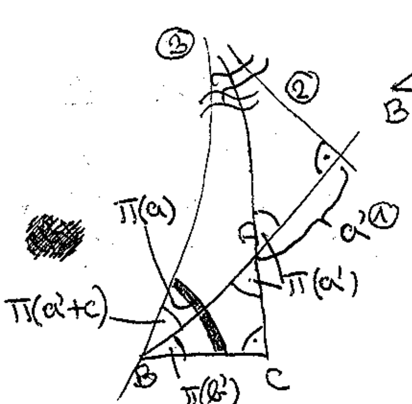
V důkazu budeme sledovat Lobačevského argumenty.

Dk. (a) start



... úhly budeme někdy značit jako úhly souběžnosti pro nějakou délku

Napřed budeme hledat nějaké vztahy mezi těmito veličinami.

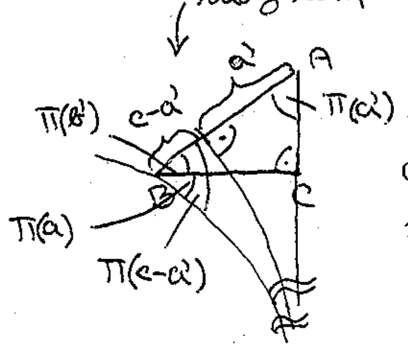


① $\Rightarrow \Pi(a) = \Pi(b') + \Pi(a'+c)$; (v každém pravoúhlém Δ)

podobně odvodíme: ② $\Pi(c-a') = \Pi(b') + \Pi(a)$;

tedy za předpokladu, že $c > a'$

Když víme, že úhel při A je nějaký úhel souběžnosti, tak si tu souběžku nějak chytře domalujeme a porovnáme, co jsme dostali.

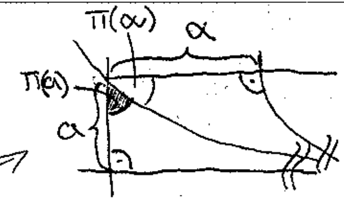


Pozn. používáme konvenci $\Pi(-x) = \pi - \Pi(x)$

a' jsme nanesli opačným směrem ...

(3) $(1)+(2)$: $2\Pi(b') = \Pi(c-a') - \Pi(a'+c)$ sečteme,

(4) $(1)-(2)$: $2\Pi(a) = \Pi(c-a') + \Pi(a'+c)$ odečteme



(b) označení:

α délka úsečky odpovídající úhlu $\frac{\pi}{2} - \Pi(a)$

$\Rightarrow \Pi(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \Pi(a)$ z definice

podobně můžeme uvažovat $\Pi(\beta') = \frac{\pi}{2} - \Pi(b')$ atd.

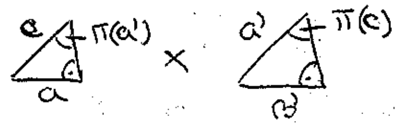
dosaďme do (3): $\pi - 2\Pi(\beta') = (\pi - \Pi(a'-c)) - \Pi(a'+c)$

$$2\Pi(\beta') = \Pi(a'-c) + \Pi(a'+c) \quad (5)$$

Postřeh 1: porovnejme s (4): $a \Leftrightarrow \beta'$

$a' \Leftrightarrow c$

$(b \Leftrightarrow \alpha,\ \alpha' \Leftrightarrow \gamma, \ldots)$



Toto nám dává spousta nových formulí. a to je to, oč tu běží :-)

Postřeh 2: prohozením $a \Leftrightarrow b$, $a' \Leftrightarrow b'$ (a potom $\alpha \Leftrightarrow \beta, \ldots$) z formule (4)

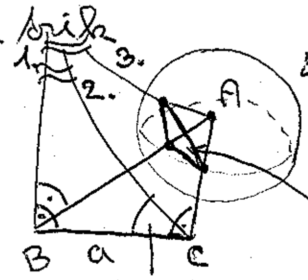
obdržíme: $2\Pi(b) = \Pi(c-b') + \Pi(c+b')$ (6)

z 1. postřehu např. $2\Pi(b) = \Pi(a'-\alpha) + \Pi(a'+\alpha)$ nebo $2\Pi(a) = \Pi(b'-\beta) + \Pi(b'+\beta)$

a podobně z (3) máme (7) $2\Pi(c) = \Pi(a'-\alpha) - \Pi(a'+\alpha)$

(c) tke trik

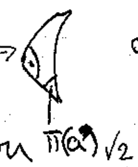
4. sféra o středu A a poloměru r dostatečně malém



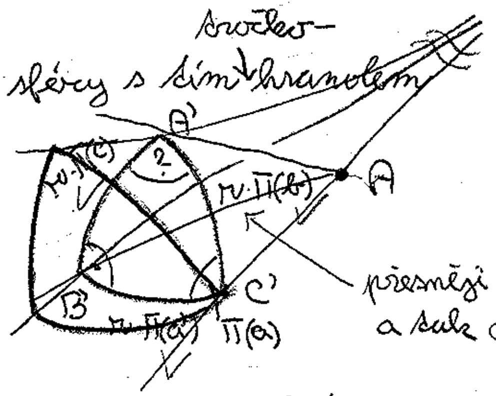
prostá - školáckého idea

trojúhelník = průnik sféry s tím trojhranolem

$\Pi(a)$ pravej, protože ty dvě roviny jsou kolmé

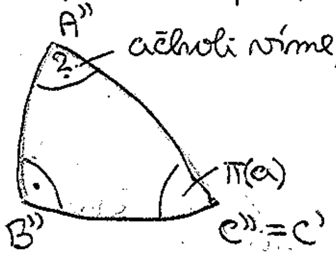


v detailu:



přesněji $f(r)\Pi(b)$ a tak dále

5. horosféra určená polopřímkou $C'A$



ačkoli víme, že je to doplněk do 2π, páč je to Euklidovský $\triangle$

(8) $$\underbrace{\lim_{\text{"}A\to\infty\text{"}} \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{A''C''}{B''C''}}_{\text{platí triviálně}}, \text{ tj. } \lim \frac{f(r)\Pi(b)}{f(r)\Pi(a')} = \frac{1}{\cos \Pi(a)}$$

Podobně: $\lim \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A''B''}{B''C''}$, tj. $\lim \frac{\Pi(c)}{\Pi(a')} = \operatorname{tg} \Pi(a)$

(d) poslední úpravy

$$\lim \frac{\Pi(b) \pm \Pi(c)}{\Pi(a')} = \frac{1}{\cos \Pi(a)} \pm \operatorname{tg} \Pi(a)$$

potom (6) $\pm$ (7): $$\lim \frac{\Pi(a' \mp \alpha)}{\Pi(a')} = \frac{1}{\cos \Pi(a)} \pm \operatorname{tg} \Pi(a)$$

elementární úpravy: $$\lim \frac{\Pi(a'-\alpha)}{\Pi(a')} = \operatorname{cotg} \frac{\Pi(\alpha)}{2}, \quad \lim \frac{\Pi(a'+\alpha)}{\Pi(a')} = \operatorname{tg} \frac{\Pi(\alpha)}{2}$$

d) vyjádření

$$\lim \frac{\Pi(a'+x)}{\Pi(a')} = \lim \frac{\Pi(a'+x)}{\Pi(a'+\beta)} \cdot \lim \frac{\Pi(a'+\beta)}{\Pi(a')}$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2} = \operatorname{tg}\frac{\Pi(x-\beta)}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\Pi(\beta)}{2}$ a odtud už plyne, že to musí být exponenciální funkce o nějakém základu. □

Ekvivalentní podoby tvrzení: $\boxed{\text{Domácí úloha 8.}}$ ✓

- konvence: $a = e^{-\frac{1}{k}}$, kde k je nějaká konstanta $\rightsquigarrow \operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$
- anebo: $\cos\Pi(x) = \operatorname{tgh}\frac{x}{k}$,

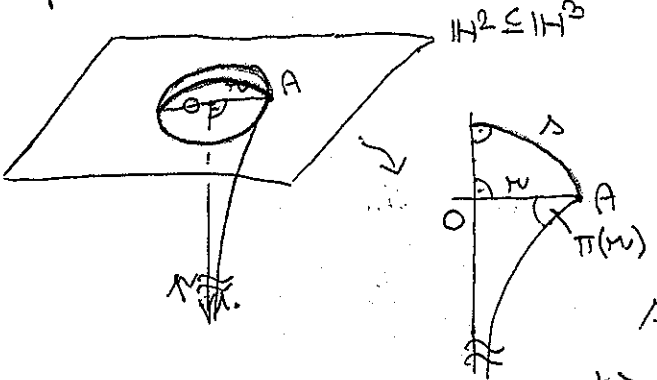
$$\sin\Pi(x) = \frac{1}{\cosh\frac{x}{k}},$$

$$\operatorname{tg}\Pi(x) = \frac{1}{\sinh\frac{x}{k}}.$$

9. přednáška — 16. 4. 2009

Obvod kružnice v označení Bolyaie: $O_r \neq 2\pi r$ v $\mathbb{H}^2$

Přístup Bolyaie



1. kolmice p
2. mezní sféra polopřímkou $A \parallel p$
3. mezní sféra $\cap\ \mathbb{H}^2 =$ je kružnice [§18]

to by chtělo zkontrolovat

už víme

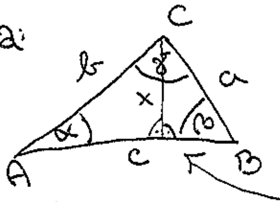
$s = k \cot\Pi(r) \Rightarrow$

$\Rightarrow O_r = 2\pi s = 2\pi k \cdot \cot\Pi(r) =$

$= 2\pi k \cdot \sinh\frac{r}{k}$

máme Eukleidovskou kružnici

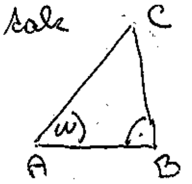
§25 Lemma:



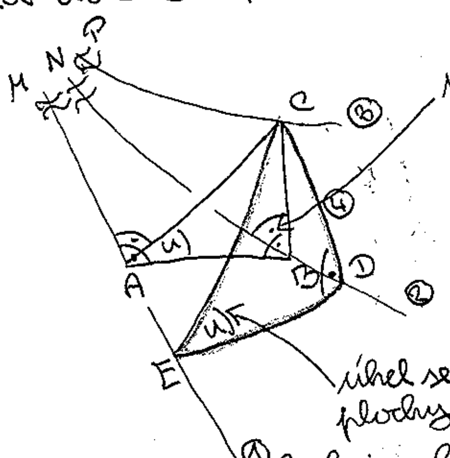
$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{O_a}{O_b} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{O_a} = \frac{\sin\beta}{O_b}.$

obecně to dostaneme tak

Dk. (viz obr. 10)
stačí dokázat pro pravoúhlý trojúhelník:



$\frac{O_{AC}}{O_{BC}} \overset{?}{=} \frac{1}{\sin u}$



proč právě ②! (už zase stejný problém)

$\frac{1}{\sin u} = \frac{EC}{DC}$ v Eukleidovském △ $= \frac{O_{EC}}{O_{DC}} =$

viz výše

$= \frac{O_{AC}}{O_{BC}} \neq \frac{AC}{BC}.$

to byl ten náš problém minule

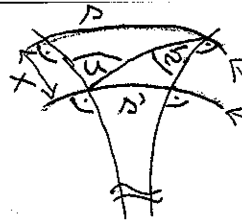
úhel se zachová, neboť obě plochy jsou kolmé na $\overline{AM}$ □

① kolmice k rovině ABC

②, ③ souběžky k ME vedené body B, resp. C

④ mezní sféra určená polopřímkou CP, resp. projekce △ABC na tu mezní sféru

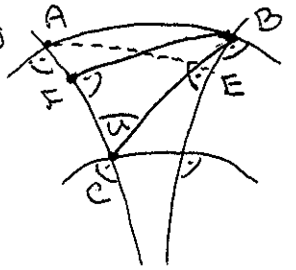
§28 Lemma: (obr. 13)



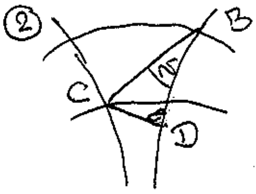
$\Rightarrow \frac{s}{s'} = \frac{\sin u}{\sin v}$.

dvě mezní kružnice

Dk.: z dřívějška víme, že: $\frac{s}{s'} = e^{\frac{x}{k}}$, ale to teď nebude asi podstatné;

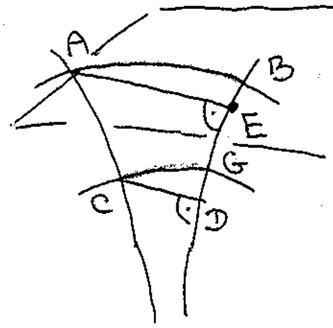
① 

... $\frac{\sin u}{1} = \frac{OBF}{OBC}$ podle předchozího lemmatu;

② 

... $\frac{1}{\sin v} = \frac{OBC}{OCD}$ opět podle předchozího;

$\Rightarrow \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{OBF}{OCD} = \frac{OAE}{OCD} = *$

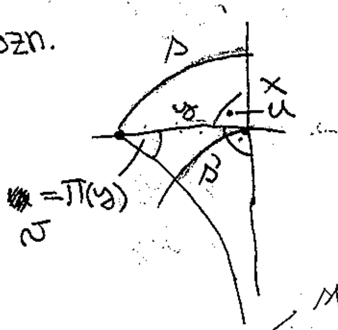
③ 

AE = BF ← ze symetrie situace

hyperbolická rovina kolmá k té přímce procházející E, průnik s horosférou je kružnice o poloměru AE, podobně pro CD.

$(*) = \frac{OAB}{OCG} = \frac{AB}{CG} = \frac{s}{s'}$.

□

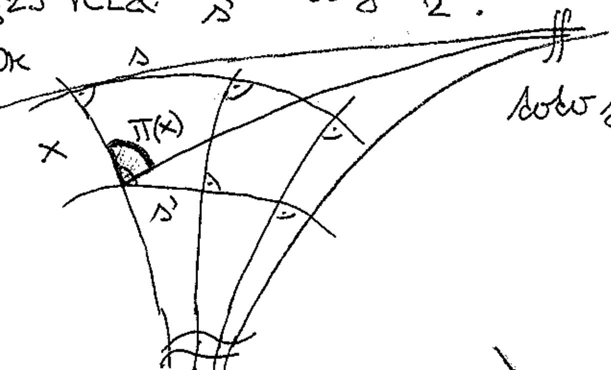
Pozn. 

$s = k \cdot \cotg \Pi(y)$,
$s' = k \cdot \cos \Pi(y)$, ← to víme z dřívějška

$\Rightarrow e^{\frac{x}{k}} = \frac{s}{s'} = \frac{1}{\sin \Pi(y)}$.

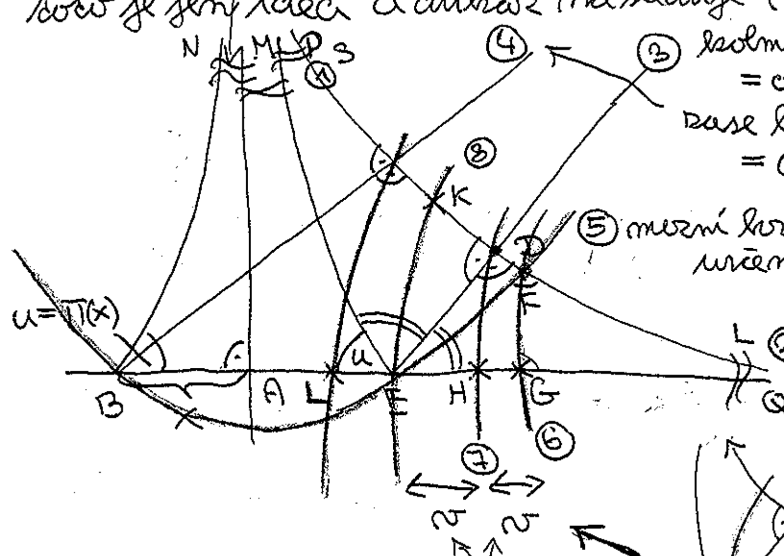
spíše dokazujeme $e^{\frac{x}{k}} = \cotg \frac{\Pi(x)}{2}$

§29 Věta: $\frac{s}{s'} = \cotg \frac{\Pi(x)}{2}$.

Dk 

žlutým souběžníkem začínáme, v ① ho překlopíme

toto je jen idea a důkaz následuje (obr. 14):

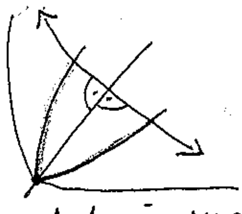


③ kolmice z E k SL = osa úhlu PEQ
zase kolmice = = osa úhlu ABN

⑤ mezní kružnice určená $\overline{BN}$

② společná souběžka

stejné vzdálenosti



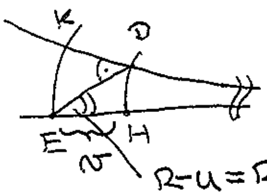
a toto je symetrické

je sousední situace

⑧ podobně: BL = LG =: z

⑨ $2x = 2z - 2v$
$x = z - v \Rightarrow e^{\frac{x}{k}} = \frac{e^{\frac{z}{k}}}{e^{\frac{v}{k}}}$.

(10) $e^{\frac{v}{k}} = \cancel{} \frac{1}{\sin\left(R - \frac{\Pi(x)}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\Pi(x)}{2}}$ podle lemmatu 28;

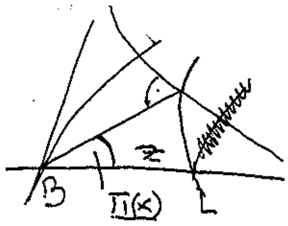


$R - u = R - \frac{\Pi(x)}{2}$

(11) $e^{\frac{z}{k}} = \frac{1}{\sin\frac{\Pi(x)}{2}}$;

(12) dosaďme do $e^{\frac{x}{k}}$

$$e^{\frac{x}{k}} = \frac{\frac{1}{\sin\frac{\Pi(x)}{2}}}{\frac{1}{\cos\frac{\Pi(x)}{2}}} = \operatorname{cotg}\frac{\Pi(x)}{2}.$$



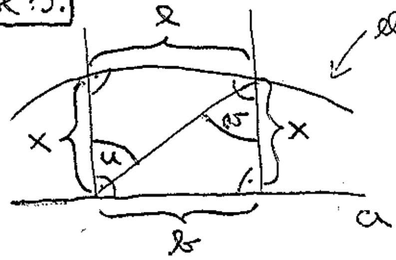
$\frac{\Pi(x)}{2}$

□

10. přednáška — 29. 4. 2009

§27. $\boxed{\text{Domácí úkol 9.}}$

Lemma:



← není to přímka!, ale množina

ekvidistanta ke přímce a

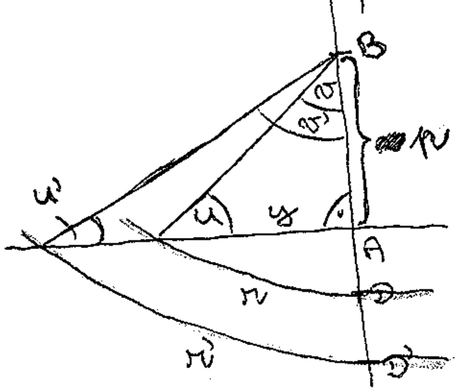
(a) $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin u}{\sin v}$,

(b) $\frac{a}{b}$ závisí pouze na vzdálenosti x,

(c) $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sin\Pi(x)}$. ← to by mělo být nejtěžší

§30. (viz obr. 15)

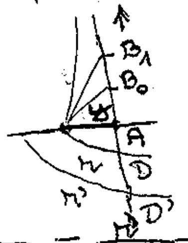
↑ limitní situace



(a) $\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{cotg} u}{\operatorname{cotg} u'} \Rightarrow \frac{r}{\operatorname{cotg} u} = \frac{r'}{\operatorname{cotg} u'} = \dots$

(b) ... závisí pouze na p,

(c) $B \to \infty$ tj. $p \to \infty$ $\Rightarrow u \to \Pi(y)$, $u' \to \Pi(y')$ a tedy:



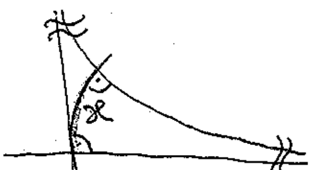
$$\frac{r}{\operatorname{cotg}\Pi(y)} = \frac{r'}{\operatorname{cotg}\Pi(y')} \overset{\text{def}}{=:} i,$$

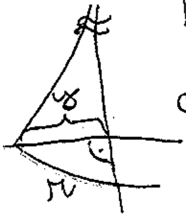
(d) snadno se odvodí $i = \mathcal{K}$,

(e) konkrétní výpočet dává $i = k$.

$\Rightarrow$ zejména tedy $k = \mathcal{K}$, což jsme očekávali už od počátku

Dk. od (d):





a před nějakým časem jsme odvodili formuli $r = \mathcal{K} \cdot \operatorname{cotg}\Pi(y)$, což je přesně (c)

(a) z lemma 25 plyne $\frac{op}{oy} = \frac{\sin u}{\sin v}$, $\frac{op}{oy'} = \frac{\sin u'}{\sin v'} \Rightarrow \frac{\sin u}{\sin v} \cdot oy = \frac{\sin u'}{\sin v'} \cdot oy'$.

Dále z lemmatu 27 máme: $\left(\frac{a}{b} =\right) \frac{\cos u}{\sin v} = \frac{\cos u'}{\sin v'}$.

A z těchto dvou formulí obdržíme: $\operatorname{tg} u \cdot oy = \operatorname{tg} u' \cdot oy'$,

$$\frac{oy}{oy'} = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{\operatorname{cotg} u}{\operatorname{cotg} u'}.$$

← to je ten obvod kružnice

$\pm$§18 $\Rightarrow \frac{oy}{oy'} = \frac{r}{r'}$, a tedy jsme dokázali bod (a).

(2) $\;i = \frac{r}{\operatorname{cotg}\Pi(y)} \Rightarrow$

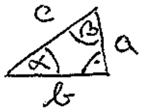
z geometrického náhledu

$\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{r}{y} \overset{1}{=} \lim_{y\to 0} \frac{i\cdot\operatorname{cotg}\Pi(y)}{y}$, tj. $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{cotg}\Pi(y)} = i$.

§29 $\Rightarrow \operatorname{cotg}\Pi(y) = \sinh\frac{y}{k}$ a dosadíme do limity ⇝ obdržíme k a tedy □

$k = i$. spíše ekvivalentní podoba z D.Ú.8

§31. hyperbolická trigonometrie:

– uvažujme pravoúhlé trojúhelníky  a hledejme relace mezi:

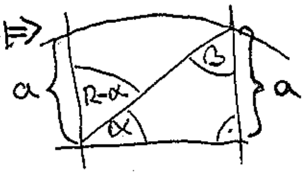
(1) a, c, α nebo

(2) a, α, β nebo

(3) a, b, c.

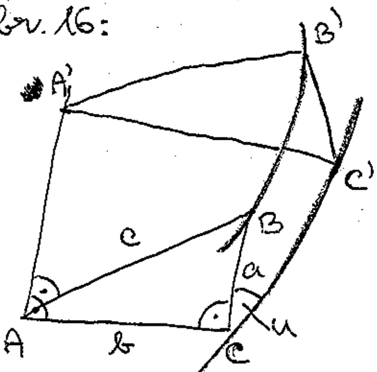
viz začátek minulé přednášky

① §25 $\Rightarrow \frac{Oc}{Oa} = \frac{1}{\sin\alpha}$ ~~§30~~ $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\Pi(a)}{\operatorname{cotg}\Pi(c)} = \frac{\sinh\frac{a}{k}}{\sinh\frac{c}{k}}$.

② §27 $\Rightarrow$  $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\Pi(a)} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \cosh\frac{a}{k}$.

③ měli bychom obdržet něco jako $\cosh\frac{c}{k} = \cosh\frac{a}{k}\cdot\cosh\frac{b}{k}$, prostě Pythagorova věta, jak jsme ji odvodili dříve.

– viz obr. 16:



(1) kolmice k rovině ABC, AA'

(2) ekvidistantní křivky k AA' vedené bodem B a C v příslušných rovinách,

(3) rovina kolmá k AA' vedená bodem A',

(4) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Z (2) plyne pomocí §27, že $\frac{BB'}{AA'} = \frac{1}{\sin\Pi(c)} \overset{\cosh\frac{c}{k}}{=}$ a $\frac{CC'}{AA'} = \frac{1}{\sin\Pi(b)} = \cosh\frac{b}{k}$.

Chceme $\underbrace{\frac{BB'}{CC'}}_{?} = \cosh\frac{a}{k}$ – pak obdržíme tu Pythagorovu větu.

těžký ? ale proč by toto mělo platit? Vždyť ani nemáme přímky,

$\boxed{\text{Domácí úkol 10}}$ ale křivky a jsme na nějaké ploše, ne v rovině.

(podle Bolyaie se to dokáže podobně jako §27)

11. přednáška — 7.5.2009

středa 11:00–13:00

Gaussův přístup

obvod kružnice o poloměru x

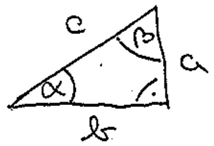
– používá dvě pomocné funkce: $f(x) := \frac{Ox}{2\pi}$; $g(x) := \frac{e}{b}$, kde e, b jsou z lemma §27 na začátku minulé přednášky

(od Bolyaie víme, že $f(x) = k\cdot\operatorname{cotg}\Pi(x)$, $g(x) = \frac{1}{\sin\Pi(x)} = \cosh\frac{x}{k}$)

– po jistých infinitesimálních úvahách je schopen odvodit některé

není jasné jakých

vztahy v pravoúhlém trojúhelníku:
(přitom používá jen ty funkce výše)



... $\cos\alpha = g(a)\cdot\sin\beta$,
$g(c) = g(a)\cdot g(b)$, ...

– dále se ptá, jak konkrétně funkce f a g vypadají; umí odvodit nějaké diferenciální relace:

* $f' = c\cdot g$, c konst.,
* $g' = c\cdot\frac{g^2-1}{f}$ pro stejnou konst. c,

to odpovídá Eukl. geometrii

$\Rightarrow$ $(1-g^2)g'' + g'^2 g = 0$, a vyřešením: buď $g = \text{konst.} \equiv 1$, neboť $g(0)=1$,
anebo: $\frac{g''}{g} = \frac{g'^2}{g^2-1}$ a ukazuje, že tento podíl musí být konstantní (stačí zderivovat pravou stranu podle x a porovnat s původní rcí), pak řeší příslušnou diferenciální rovnici ve dvou případech:
$g^2>1 \rightsquigarrow g(x) = \cosh\frac{x}{k}$, hyperbolická geometrie
$g^2<1 \rightsquigarrow g(x) = \cos\frac{x}{k}$. sférická geometrie (nebo eliptická?)
a teď dosadíme do první rovnice, abychom obdrželi i f.

– pro $g(x) = \cosh\frac{x}{k}$, pak máme shora:
$\cos\alpha = \cosh\frac{a}{k}\cdot\sin\beta$ pro libovolný pravoúhlý △, půjdeme-li s béčkem do nekonečna, pak obdržíme: $1 = \cosh\frac{a}{k}\cdot\sin\Pi(a)$.

Modely hyperbolické roviny

po komplexifikaci

(0) Imaginární sféra s poloměrem ik ~ $\mathbb{E}^3$ bez reálného bodu ovšem,
(1) hyperboloid v Minkowského prostoru $\mathbb{E}^{2,1}$
Z těchto dvou pak máme další modely: (obdržíme je nějakýma projekcema)
(2) Beltramiho–Kleinův:

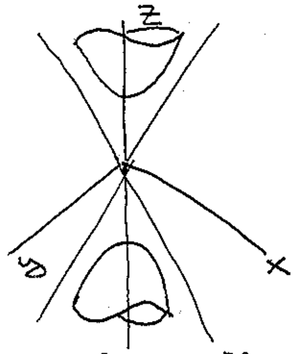
(3) polosféra,
a odtud zase další:
(4) Beltramiho–Poincarého:  a (5) polorovina: 

První lokální model hyperbolické roviny byla pseudosféra:

$\subseteq \mathbb{E}^3$

Pozn. Ačkoli můžeme modely vložit do nějakého Eukleidovského prostoru, tak metrika na tomto modelu nikdy není indukována tou Eukleidovskou metrikou; při nejlepším lokálně jako u pseudosféry.

Takže začněme:
Imaginární sféra: $\{x^2+y^2+z^2 = -k^2\} \subseteq \mathbb{E}^3$ po komplexifikaci samozřejmě; přechod k reálné sféře je dán korespondencí $r = ik$.
Abychom dostali něco reálného, uvažme „transformaci" $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x,y,iz)$. Pak $f(\text{im. sféra}) = \{x^2+y^2-z^2 = -k^2\} \subseteq \mathbb{R}^3 = \mathbb{E}^{2,1}$
chápáno takto



– na tom hyperboloidu je indukovaná metrika positivně definitní, tudíž je to opravdu metrika, to nám dává víceméně náš první reálný model hyperbolické roviny (ještě tady musíme zapomenout jeden kousek)

– co jsou primitivní pojmy?
* body ~ body,
* přímky ~ geodetiky = průniky s rovinami procházejícími počátkem.

a teď bychom měli ověřit axiomy hyperbolické geometrie.

Zkusme nyní trochu porovnat standardní sféru $S^2 \subseteq \mathbb{E}^3$ a ten náš hyperboloid $H^2 \subseteq \mathbb{E}^{2,1}$:

(a) v obou případech platí, že $\forall p \in S^2$, resp. H^2, máme $T_pS^2 = p^\perp$, $T_pH^2 = p^\perp$ ve správných skalárních součinech samozřejmě.

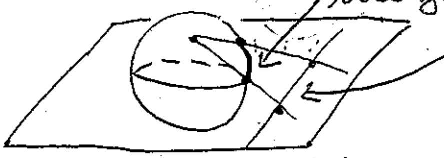
(b) $Isom(S^2) \cong O(3)$ a $Isom(H^2) \cong O(2,1)$, tj. grupy izometrií jsou takové a takové; samozřejmě to není až tak zřejmé.

(c) geodetika určená počátečními podmínkami p a $v \in p^\perp$ je právě $[p,v] \cap S^2$ a podobně $[p,v] \cap H^2$.

(d) ze sféry obdržíme model eliptické roviny (i když nevíme, co to je) projektivizací a pullbackem metriky ze sféry:

toto je ta vzdálenost těchto dvou bodů

spíše něco jako pushforward?



podobně projektivizací H^2 obdržíme model hyperbolické roviny $\mathbb{H}^2$.

Pozn. $S^2 \cong O(3)/O(2) \Rightarrow$ projektivizace $PO(3)/O(2)$

$H^2 \cong O(2,1)/O(2) \Rightarrow$ projektivizace $PO(2,1)/O(2)$

a ještě poznámka $PO(\cdot) = O/\{\pm id\} \cong SO(\cdot)$ pro liché dimenze

12. přednáška — 13.5.2009

zkouška 25.5. ve 14:00

Náš první model hyperbolické roviny, tj. ten horní hyperboloid, budeme označovat $\mathbb{L}^2$.

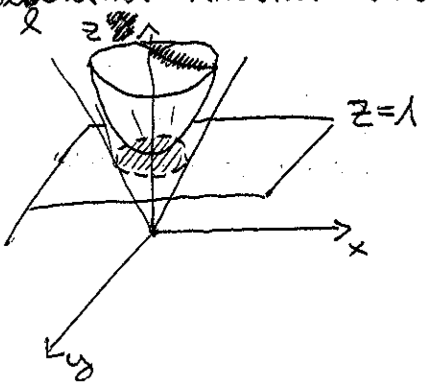
– jak vypadají (zobecněné) kružnice v tomto modelu?

* máme-li svazek různoběžek, pak uděláme tečnou rovinu v průsečíku, průniky L s rovinami rovnoběžnými s tečnou rovinou jsou pak kružnice, a tedy elipsy
* máme-li svazek souběžek, tak se sbíhají k nějakému null-vektoru, opět uděláme tečnou rovinu a průniky s rovinami rovnoběžnými s tečnou rovinou jsou tvočky, a tedy paraboly
* pro svazky rozběžek konečně obdržíme mročky, což budou hyperboly (podrobnosti za $\boxed{\text{Domácí úkol}}$), vše konstruováno jako ortogonální trajektorie)

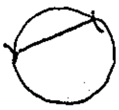
Pozor! Mnoučky i přímky jsou hyperboly, ale přímky jsou právě ty hyperboly, které vznikají jako průniky s rovinami procházejícími počátkem.

← souvisí s projektivní geometrií

Beltrami-Kleinův model K^2 (projektivní model)

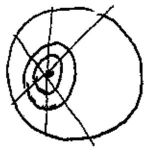


– uděláme středovou projekci na rovinu $z=1$, obdržíme kružnici, přesněji disk – vnitřek jsou vlastní body modelu, hranice = kružnice jsou nevlastní body

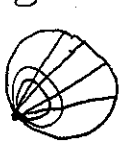
– přímky:  – dostaneme je projekcí geodetik z L^2

– zobecněné kružnice (obdržíme je projekcí z L^2)

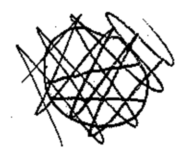
* kružnice



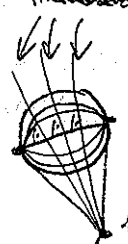
* křivky ?



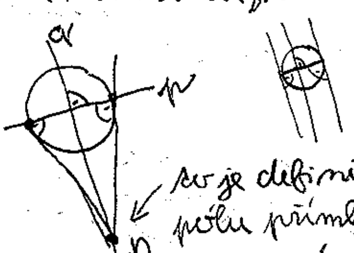
* mnoučky ?



rozběžky = kolmice k dané přímce



⟹ budeme nejdříve potřebovat popsat kolmost a i tu metriku „zděděnou" z modelu L^2.



to je definice pólu přímky p (k dané kuželosečce)

Lemma: $q \perp p \iff q$ obsahuje pól p přímky p, tj.:

Dk. nechť f je symetrie podle přímky p, nebo lépe řečeno kolineace odpovídající f – symetrie zachovává přímky, a tedy ji můžeme rozšířit na kolineaci ? symetrie vůči zděděnému skalárnímu ~~součinu!~~ neboť f pochází z modelu

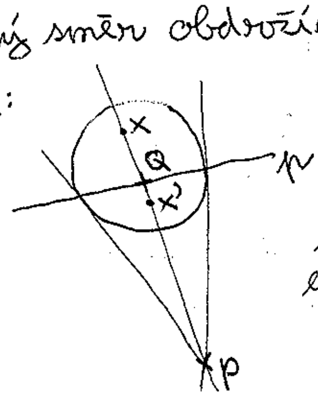
$\Rightarrow f(\partial K) = \partial K,\ f(p) = p \Rightarrow f(p) = p.$

Jestliže $p \in q \Rightarrow f(q) = q \underset{(q \neq p)}{\iff} q \perp p$ z definice symetrie podle přímky.

f zachovává dva body přímky q – první je $p \cap q$

Druhý směr obdržíme z jednoznačnosti kolmice. – vedeme kolmici k p bodem p. □

Lemma:



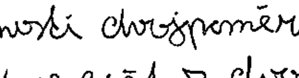
$x' = f(x)$, kde f je symetrie podle p, $Q = p \cap xp$

$\iff \underbrace{(xx'pQ)}_{\text{dvojpoměr}} = -1.$

tedy je to ekvivalence

dvojpoměr (cross-ratio) – něco jako definice jeho kousek dále

Dk. Je-li f kolineace, pak $c := (xx'pQ) = (f(x)f(x')f(p)f(Q)) = (x'xpQ) = \frac{1}{c}$. Základní vlastnosti dvojpoměru pak dávají, že $c = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \pm 1$. Jedničku vyloučíme opět z dvojpoměru:



– jestliže jeden bod je mimo Qp a druhej uvnitř, tak dvojpoměr musí být záporný.

Druhý směr nějak obdržíme z toho dvojpoměru:

$$-1 = (XX'pQ) = (f(X)f(X')pQ)$$ ... a prý je to triviální

a chceme ukázat, že $f(X)=X'$, $f(X')=X$

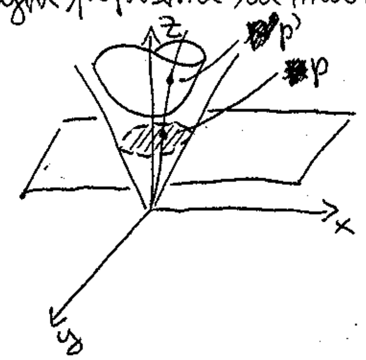
$$(XX'pQ) = \frac{(XpQ)}{(X'pQ)} \text{ "}= \frac{\overrightarrow{Xp}}{\overrightarrow{XQ}} : \frac{\overrightarrow{X'p}}{\overrightarrow{X'Q}}\text{"}$$

a jsou tam orientované velikosti, tedy i nějaká znaménka

dělicí poměry

budiž $\blacksquare$

Nyní popíšeme tu metriku:



zobrazení inverzní k té projekci

máme disk $x^2+y^2 \le 1$, $z \equiv 1$ $\Rightarrow$ musíme(?) předpokládat, že $k \ge 1$

$f: K^2 \to L^2$

$f(p) = \lambda p \in L^2 \iff x'^2+y'^2-z'^2 = -k^2$ a dosadíme $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{k}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$p = (x,y,1)$, $\lambda p = p' = (x',y',z')$

$$\Rightarrow \quad x' = \frac{kx}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\; y' = \frac{ky}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\; z' = \frac{k}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \;\dots$$

... tak je explicitně dáno zobrazení f.

Teď je potřeba spočítat diferenciály dx', dy', dz' a dosazením do:

$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 - dz'^2$ obdržíme:

$$ds^2 = k^2 \, \frac{(1-y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1-x^2)\,dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

to je kvadratická forma příslušná skalárnímu součinu ... toto vlastně popisuje skalární součin/normu.

$\Rightarrow$ skalární součin v bodě $(x,y) \in K^2$ je dán maticí:

$$\frac{k^2}{(1-x^2-y^2)^2} \begin{pmatrix} 1-y^2 & xy \\ xy & 1-x^2 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme naše znalosti použít třeba takto:

Lemma:

$$d(A,B) = \frac{k}{2} \ln (ABUV)$$

vzdálenost

dvojpoměr

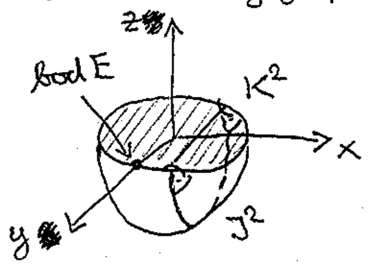
Dk. Vztah se ukáže integrací pro vhodný případ:

$\square$

Domácí úkol 12. ✓

Polosférický model J^2 ← vertikální

– obdržíme jej projekcí z Beltrami-Kleinova modelu na polosféru pod, nebo nad tím kruhem.



$f: J^2 \to K^2$ ... inverzní zobrazení k projekci

$f(x,y,z) = (x,y,0)$ a můžeme pull-backnout metriku, dostaneme v podstatě stejnou formulku pro ds^2.

Tento model pochází od Poincarého a použil ho k odvození dvou dalších modelů – Poincarého disku I^2 a Poincarého poloroviny H^2.

* I^2 obdržíme stereografickou projekcí J^2 ze severního pólu zpátky na rovinu, ale obdržíme tak samozřejmě něco jiného než Kleinův model:

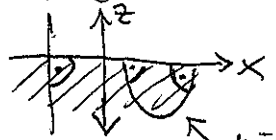
přímky jsou kružnice kolmé k hraniční kružnici

části kružnic

$(0,k,0) =: E$

* H^2 dostaneme stereografickou projekcí J^2 z bodu na rovníku do roviny xz.

Výsledkem je polorovina:



s nevlastní přímkou ↓, která je obrazem bodu E.

části kružnic

přímky jsou kružnice kolmé k x a se středem na x nebo přímky kolmé na x (odpovídají přímkám procházejícím E)

polopřímky

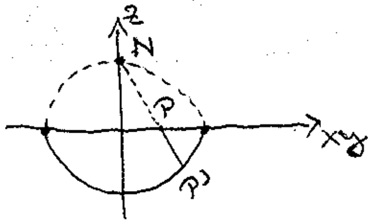
V obou případech je metrika konformně ekvivalentní Eukleidovské metrice, tj. $ds^2 =$ něco $\cdot\, (dx^2+dy^2)$.

$\Rightarrow$ zejména „vizuálně zachovává úhly"

13. přednáška — 18.5.2009

* Ještě můžeme navíc udělat centrální projekci polosférického modelu J^2 na rovinu -1; tak obdržíme něco, co pořád malujeme.

Vraťme se nyní podrobněji k I^2: (Poincarého disk)



$f: I^2 \to J^2$

$f(P) = P + \lambda(P-N) \overset{?}{\in} J^2 \iff \lambda = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$, kde

samozřejmě $P = (x,y,0)$

– zase spočítáme diferenciály a dosadíme do metriky pro J^2; obdržíme tak metriku na I^2 v následujícím tvaru:

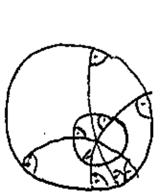
$$ds^2 = \frac{4k^2}{(1-x^2-y^2)^2}(dx^2+dy^2)$$

... kvadratická forma popisující metriku

– všimněme si, že tato metrika je konformní ekvivalentní se standardní Eukleidovskou metrikou na $\mathbb{R}^2$

– jak vypadají zobecněné kružnice?

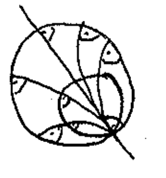
* kružnice:



– budou to obyčejné kružnice (ale střed je jinde!) (třeba z té konformity metriky se std metrikou)

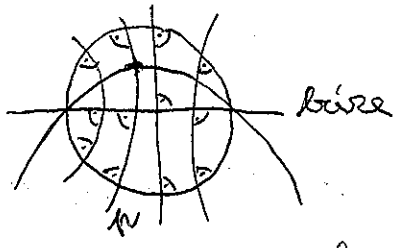
Pozn. Jak vypadají symetrie podle přímky? – jsou to kruhové inverze, což plyne z vlastností konformních zobrazení nebo tak nějak

* mezní kružnice:



– zase kružnice, ale ta se dotýká hranice v jednom bodě

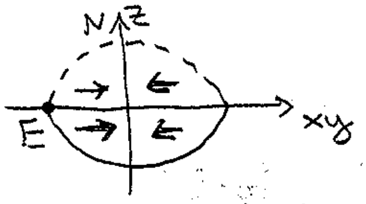
* zámezní kružnice



- opět Eukleidovská kružnice, která protíná hranici v bodech bázové přímky (opět se dokáže nějak pomocí kruhové inverze podle přímky = kružnice p).

Poznamenejme, že zobecněné kružnice v polorovinovém modelu jsou opět Eukleidovské kružnice nebo přímky, což plyne z toho, že tento model vzniká stereografickou projekcí z polosférického a stejně tak Poincarého disk vzniká stereografickou projekcí, a ta zachovává množinu {kružnice, přímky}

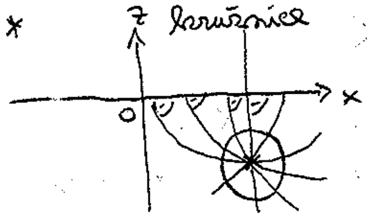
A teď zase polorovinový model H^2:



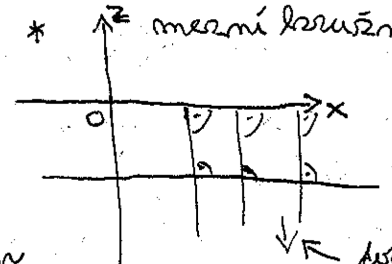
$f: J^2 \to H^2$ stereografická projekce z bodu E na rovinu XZ

- metrika se opět spočítá snadno: $ds^2 = \frac{k^2}{z^2}(dx^2+dz^2)$, tedy zase konformně ekvivalentní se std. Eukleidovskou metrikou v $\mathbb{R}^2$.
- zobecněné kružnice jsou všechny Eukleidovské kružnice:

* kružnice

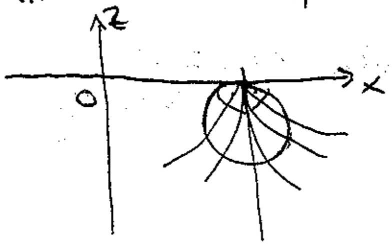


* mezní kružnice, první typ



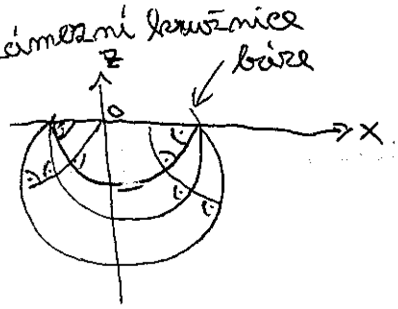
tedy je ten bod dotýkající se hranice ⇒ svazek souběžek jsou kolmice na osu x ⇒ mezní kružnice jsou rovnoběžky s x

* mezní kružnice, druhý typ

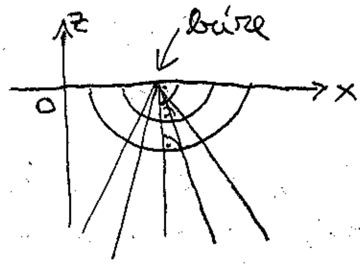


svazky souběžek

* zámezní kružnice



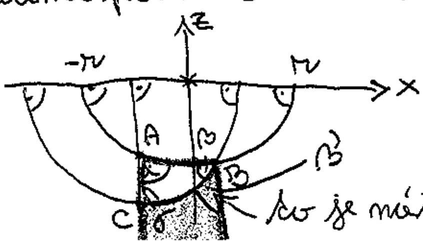
* a speciální případ: zámezní kružnice



to je v podstatě Gauss-Bonnetova formule

Pár výpočtů na závěr:

- zkusíme spočítat obsah trojúhelníka: $S(\Delta) \overset{?}{=} k^2 \cdot J(\Delta)$
- budeme počítat v modelu H^2: zvolme si vhodný trojúhelník:



- začínáme se žlutým Δ, ten můžeme vyjádřit jako rozdíl zeleného a červeného

– forma objemu v H^2 je dána jako $d\mu = \frac{k^2}{z^2}\,dx\,dz$ ← odmocnina z det Grammovy matice

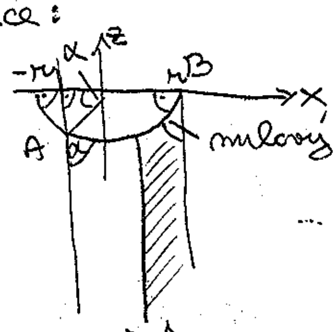
⟹ $S(\Delta) = \iint_\Delta d\mu = k^2 \iint \frac{dx\,dz}{z^2} \overset{?}{=} k^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$

nájdem meze — to bychom chtěli

– my umíme ale snadno spočítat plochu mezního trojúhelníka (zelený) a podobně toho menšího mezního Δ (červený)

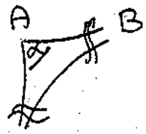
⟹ chceme ukázat, že $S(\Delta\,\text{zel.}) \overset{?}{=} k^2(\pi-\alpha-\beta-\beta')$, a podobně
$S(\Delta\,\text{červ.}) \overset{?}{=} k^2(\pi-\pi+\gamma-\beta')$

– ještě další redukce:



nulový úhel

... trojúhelník se dvěma vrcholy v nekonečnu:



ten náš trojúhelník (zelený) je rozdílem těchto dvou

⟹ chceme tedy ukázat, že $S(\triangle) = k^2(\pi-\alpha)$

Pozn. Gauss dokonce uvažoval trojúhelník a uměl dokázat, že má konečný obsah τ ⟹ trojúhelníky v hyperbolické rovině mají omezený obsah ⟹ tvrzení ekvivalentní s pátým postulátem (v E^2 umíme sestrojit Δ o libovolném obsahu).

$\rightsquigarrow \dots\ k^2 \int_{r\cos(\pi-\alpha)}^{r} \int_{-\infty}^{-\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{z^2}\,dz\,dx = k^2 \int_{r\cos(\pi-\alpha)}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ $\left|\ \begin{array}{l} \text{subst. } x = r\cos\varphi \\ dx = -r\sin\varphi\,d\varphi \end{array}\right| =$

$$= -k^2 \int_{\pi-\alpha}^{0} d\varphi = k^2(\pi-\alpha)\ \checkmark.$$

Dále se v modelech dá ověřit, že konstanty, které jsme potkali, jsou všechny rovny k – například $\frac{s}{s'} = e^{\frac{x}{k}}$, $\mathcal{K}$, ...

Konec ...