Lineární programování – jaro 2011 – 1. termín

1. **(15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby soustava lineárních rovnic

$$A \cdot (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}} = B \cdot (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}} + c$$

v proměnných $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ měla řešení splňující

$$y_j \geq 0, \quad \text{pro všechna } j = 1, \ldots, n,$$

a

$$|x_i| \leq y_1 + \cdots + y_n, \quad \text{pro všechna } i = 1, \ldots, m.$$

($|x_i|$ značí absolutní hodnotu x_i.)

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor d takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF = d,\ z \geq \mathbb{1} \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid Ax = Bx,\ Cx \leq b,\ x \leq \mathbb{1} \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
($\mathbb{1}$ značí vektor $(1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$)

3. **(25 bodů)** Definujte stěny polyedru. Formulujte větu charakterizující minimální stěny algebraicky pomocí systémů nerovnic. Určete dimenzi minimálních stěn polyedru $P = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ a svoje tvrzení zdůvodněte. Formulujte a dokažte charakterizaci minimálních stěn polyedru P, na níž je založena simplexová metoda. (K důkazu můžete použít dříve formulovanou obecnou větu.)

4. **(30 bodů)** Vyřešte primární simplexovou metodou úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat} \quad x_1 - x_2 - 9x_3 + x_4$$

při omezeních $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ a

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 & & & \geq -20,\\
2x_1 & & + x_3 & \leq 4,\\
& & 2x_3 - x_4 & \leq 6,\\
& x_2 + & x_3 + 2x_4 & \leq 9.
\end{aligned}$$

Poté využijte získanou simplexovou tabulku k vyřešení úlohy, která vznikne z původní úlohy nahrazením čísla 9 na pravé straně poslední nerovnice číslem 6.