Přednáška VI.
Intervalové odhady

- Motivace
- Směrodatná odchylka a směrodatná chyba
- Centrální limitní věta
- Intervaly spolehlivosti

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Opakování – nestranné a MLE

- Jaký je princip nestranných odhadů?
- Jaký je princip odhadů metodou MLE?
- Jak vypadají nestranný a MLE odhad parametru σ^2?

Opakování – použití průměru a mediánu

- Jmenujte výhody a nevýhody průměru a mediánu jako statistik pro odhad střední hodnoty náhodné veličiny.
- Jmenujte příklad, kdy průměr je výhodnější než medián, a příklad, kdy medián je výhodnější než průměr.

1. Motivace

Spolehlivost bodového odhadu

Výběr číslo 1

Výběr číslo 2

Celá cílová populace

0 x_1 **R**

0 x_2 **R**

0 x **R**

Pracujeme-li s výběrem z cílové populace, je třeba na základě variability pozorovaných dat spočítat tzv. interval spolehlivosti pro bodový odhad.

0 $(\; x_1 \;)$ **R**

0 $(\; x_2 \;)$ **R**

Interval spolehlivosti na základě výběru číslo 1.

Umíme-li „změřit“ celou cílovou populaci, nepotřebujeme interval spolehlivosti, protože jsme schopni odhadnout sledovaný parametr přesně – v praxi je tato situace nereálná.

Intervalový odhad

- Bodový odhad je prvním krokem ve statistickém popisu dat.
- Co nám říká jedno číslo? Studie 1 může publikovat číslo x_1, studie 2 číslo x_2. Které je správnější, lepší, přesnější?
- Bodový odhad je sám o sobě nedostatečný pro popis parametru rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.
- Zajímá nás přesnost (spolehlivost) bodového odhadu.

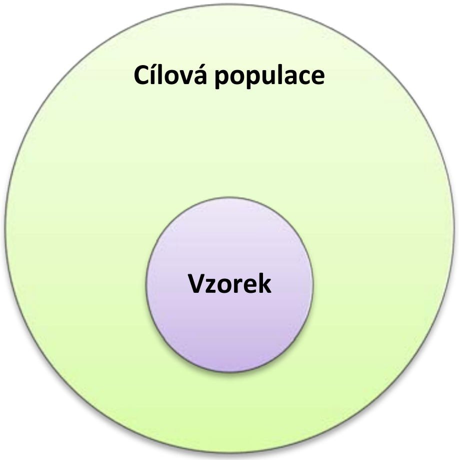
2. Variabilita pozorování a variabilita výběrového průměru

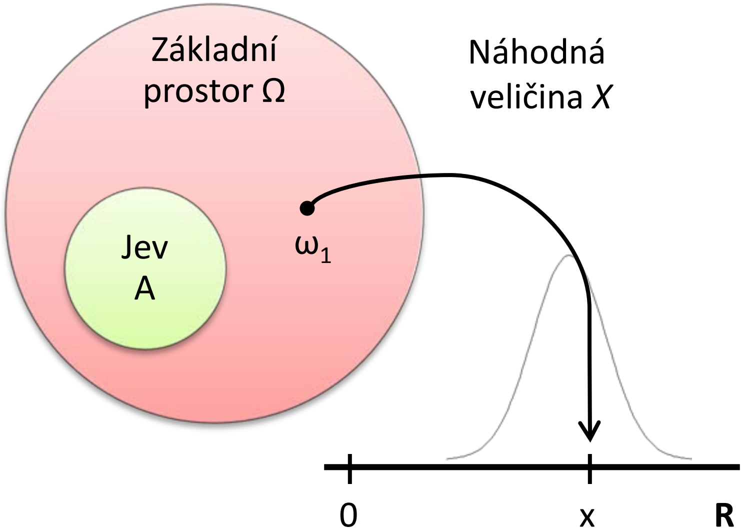
Populace a náhodná veličina

- **Cílová populace** – skupina subjektů, o které chceme zjistit nějakou informaci.
- Realizujeme-li náhodně výběr z cílové populace, dostaneme **výběrovou populaci** (experimentální vzorek).

- **Znak *X* = náhodná veličina *X*** – vlastnost, která nás zajímá.
- **Realizace náhodné veličiny** – reálné číslo, pozorovaná hodnota na vybraném subjektu.

- **Náhodný výběr** – množina *n* nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením: $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- **Realizace náhodného výběru** – reálná čísla, hodnoty pozorované na výběrové populaci.





Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny

- *F*(*x*), *f*(*x*) a *p*(*x*) – popisují chování náhodné veličiny úplně, ale složitě.
- Dvě charakteristiky odráží vlastnosti rozdělení jedním číslem: **střední hodnota** a **rozptyl**. Odmocnina z rozptylu je **směrodatná odchylka**.

$$E(X), D(X), SD(X)$$

- Platí následující:
  - Jednotlivé realizace náhodné veličiny vykazují variabilitu (dle *SD*(*X*)).
  - Jakákoliv statistika (např. průměr) je jako transformace náhodných veličin také náhodnou veličinou. Má tedy i rozdělení pravděpodobnosti.
  - Jednotlivé realizace statistiky nad různými náhodnými výběry také vykazují variabilitu (opět úměrnou *SD*(*X*)).

Co je zajímavé – výběrový průměr

- Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru tím méně variabilní čím více pozorování je v průměru zahrnuto.

- Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru se s rostoucím *n* přestává podobat rozdělení původních dat a začíná se podobat rozdělení normálnímu.

- Proč?

Co je zajímavé – výběrový průměr

- Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru tím méně variabilní čím více pozorování je v průměru zahrnuto → plyne z vlastností rozptylu transformované náhodné veličiny.

- Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru se s rostoucím *n* přestává podobat rozdělení původních dat a začíná se podobat rozdělení normálnímu → plyne z centrální limitní věty.

Charakteristiky výběrového průměru

- Máme posloupnost $X_1, \dots, X_n$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, které mají konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

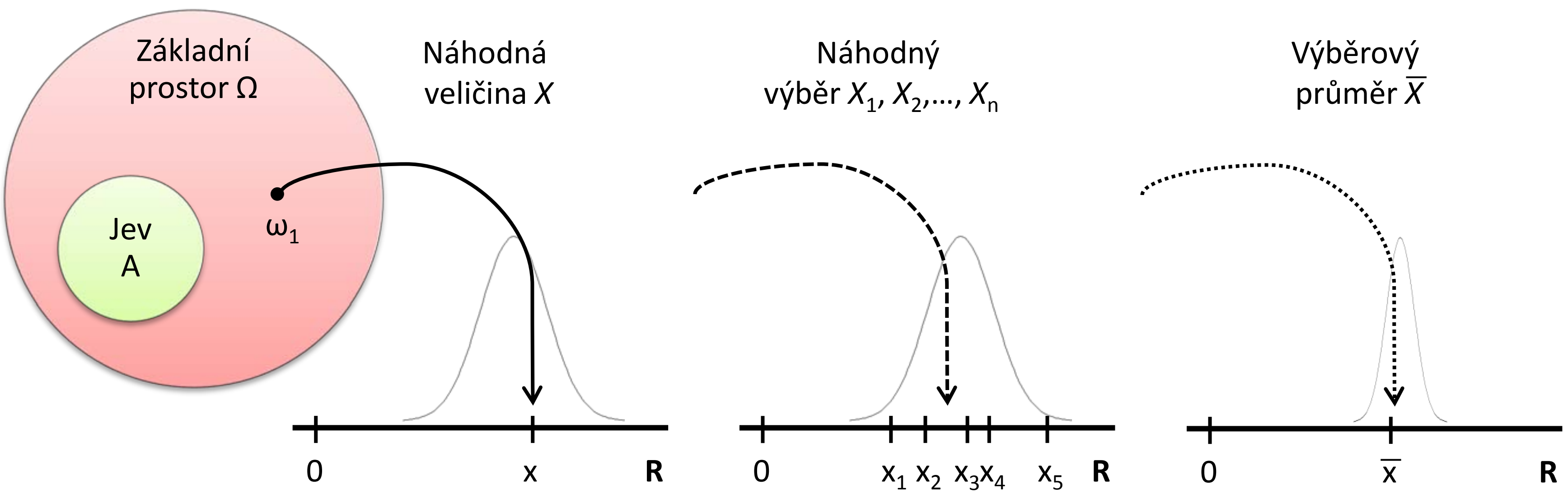
$$E(\bar{X}) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$$

$$D(\bar{X}) = \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SD(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Pro odhad, respektive statistiku, se tomuto výrazu říká **směrodatná chyba** nebo **standardní chyba** („standard error“) a značí se *SE*.

Příklad – výběrový průměr



Shrnutí

- Směrodatná odchylka (*SD*) není směrodatná chyba popisné statistiky (SE)!
- Směrodatná odchylka (*SD*) je odrazem variability náhodné veličiny ve sledované populaci.
- Směrodatná chyba (*SE*) je odrazem přesnosti popisné statistiky jako odhadu střední hodnoty náhodné veličiny.
- Pozor na rozdíl mezi *SD* a *SE* v článcích a knihách – tabulkách a grafech!

Příklad – výška člověka

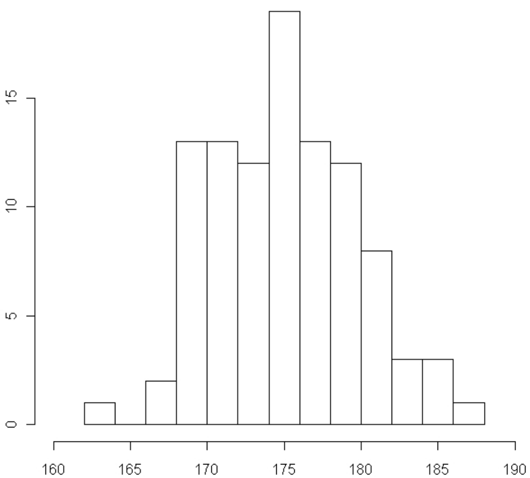
- Náhodná veličina bude výška člověka: $X \sim N(175, 15^2)$, tedy uvažujme střední hodnotu 175 cm a směrodatnou odchylku 15 cm. Jak se chovají průměry pro náhodné výběry o velikosti *n* = 10, *n* = 100 a *n* = 1000?
- Kód v R:

```
x <- rep(0, 100)                  # vytvořím si vektor pro ukládání průměrů

for (i in 1:100) {
pom <- rnorm(10, 175, 15)
x[i] <- mean(pom)}                # cyklus pro výpočet výběrových průměrů pro n=10
hist(x, breaks=10, xlim=c(160,190)) # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=10

for (i in 1:100) {
pom <- rnorm(100, 175, 15)
x[i] <- mean(pom)}                # cyklus pro výpočet výběrových průměrů pro n=100
hist(x, breaks=10, xlim=c(160,190)) # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=100

for (i in 1:100) {
pom <- rnorm(1000, 175, 15)
x[i] <- mean(pom)}                # cyklus pro výpočet výběrových průměrů pro n=1000
hist(x, breaks=10, xlim=c(160,190)) # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=1000
```

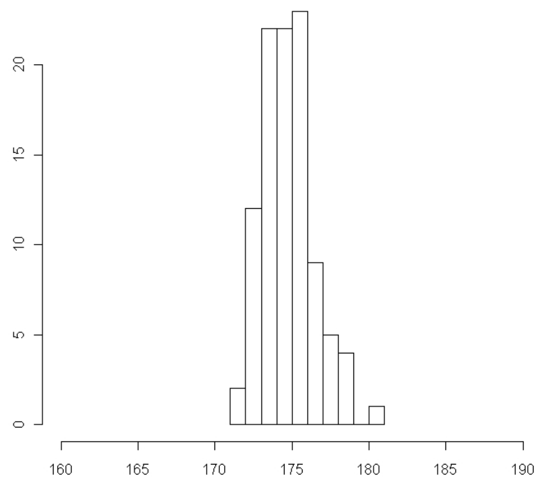
Příklad – výška člověka

- Původní pozorování mají rozsah hodnot zhruba od 120 cm do 220 cm. Kde se pohybují jednotlivé průměry?

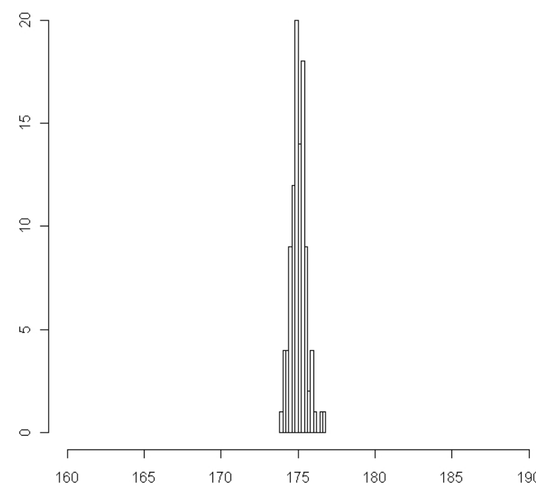
Výběrové průměry
ze vzorku *n* = 10



Výběrové průměry
ze vzorku *n* = 100



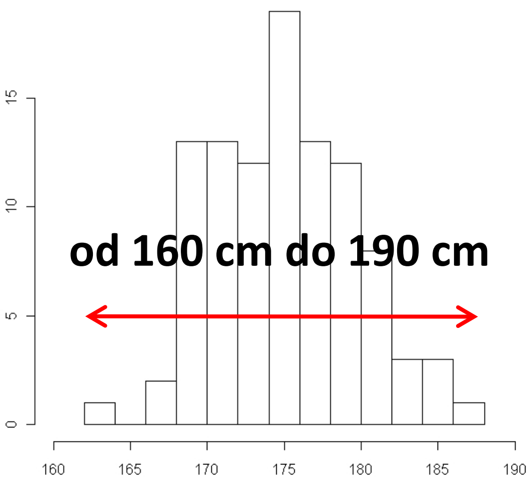
Výběrové průměry
ze vzorku *n* = 1000



Příklad – výška člověka

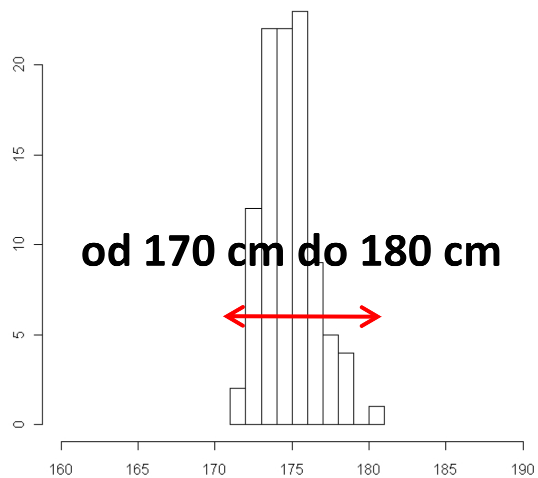
- Původní pozorování mají rozsah hodnot zhruba od 120 cm do 220 cm. Kde se pohybují jednotlivé průměry?

Výběrové průměry ze vzorku n = 10



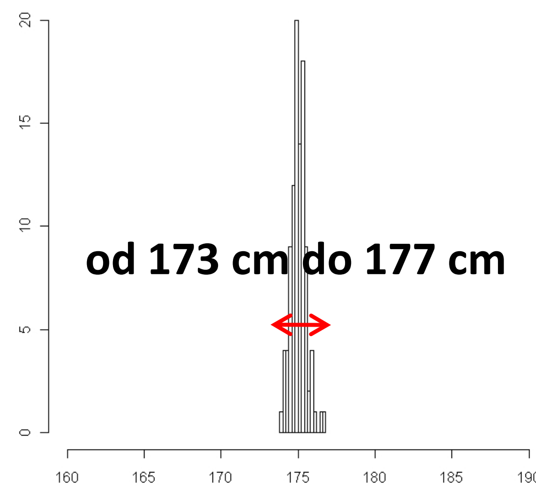
$$\overline{X}_1 \sim N(175, \tfrac{15^2}{10})$$

Výběrové průměry ze vzorku n = 100



$$\overline{X}_2 \sim N(175, \tfrac{15^2}{100})$$

Výběrové průměry ze vzorku n = 1000



$$\overline{X}_3 \sim N(175, \tfrac{15^2}{1000})$$

3. Centrální limitní věta

Připomenutí: standardizace normálního rozdělení

- Standardizace je transformace náhodné veličiny s $N(\mu,\sigma^2)$ na $N(0,1)$.
- Důvod: řada statistických metod byla odvozena pro standardizované normální rozdělení, N(0,1). Děláme to tedy opět kvůli lepší možnosti hodnocení dat.

- Teoretická standardizace náhodné veličiny: $U = \dfrac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$
- Praktická standardizace naměřených hodnot: $u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{s^2}}$

Centrální limitní věta

- Klíčová věta umožňující sestrojení intervalových odhadů.
- Máme posloupnost $X_1, \ldots, X_n$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, které mají konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2.
- Pak platí, že pro $n \to \infty$ má suma $X_\mathrm{i} = \sum_i X_i$ přibližně normální rozdělení pravděpodobnosti.

Centrální limitní věta

- Máme posloupnost $X_1, \ldots, X_n$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, které mají konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Pak platí, že pro $n \to \infty$ má výběrový průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$ přibližně normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2/n.

- Tedy $(\overline{X} - \mu)/(\sigma / \sqrt{n})$ má přibližně standardizované normální rozdělení pravděpodobnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

CLV – zjednodušená interpretace

- Pokud je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny normální, pak je i rozdělení průměru pozorovaných hodnot normální (a to i pro n = 1).

- Pokud rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny není normální, pak je rozdělení průměru pozorovaných hodnot přibližně normální, když n je dostatečně velké ($n \to \infty$).

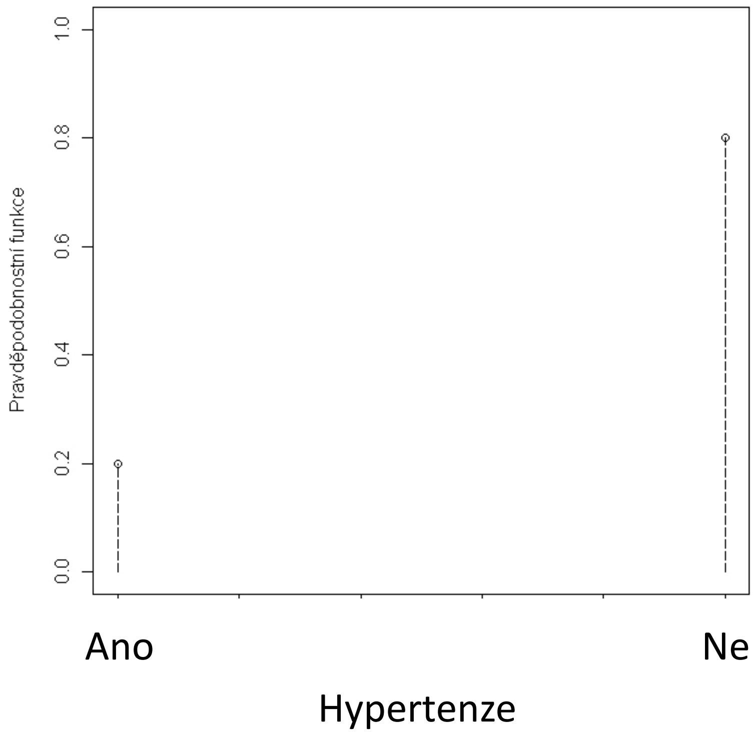
- „Dostatečně velké“ znamená > 30 pro rozdělení podobná normálnímu a > 100 pro rozdělení nepodobná normálnímu.

Co je super…

- Centrální limitní věta funguje i když rozdělení původní náhodné veličiny není normální rozdělení pravděpodobnosti. A dokonce i když není spojité!

Příklad – binomické rozdělení

- Chceme sledovat s jakou přesností lze odhadnout podíl hypertoniků v dospělé populaci ČR.
- Předpokládejme, že skutečný podíl dospělých s hypertenzí je 0,2.
- Náhodná veličina *X*: osoba trpí / netrpí hypertenzí.
- Pravděpodobnostní funkce *X* (alternativní rozdělení)



Příklad – binomické rozdělení

- Náhodná veličina *S* bude součet X_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Náhodná veličina *Y* bude definována jako *S*/*n*.

$$E(S) = np \qquad D(S) = np(1-p)$$

$$E(Y) = E(S)/n = p \qquad D(Y) = D(S)/n^2 = (p(1-p))/n$$

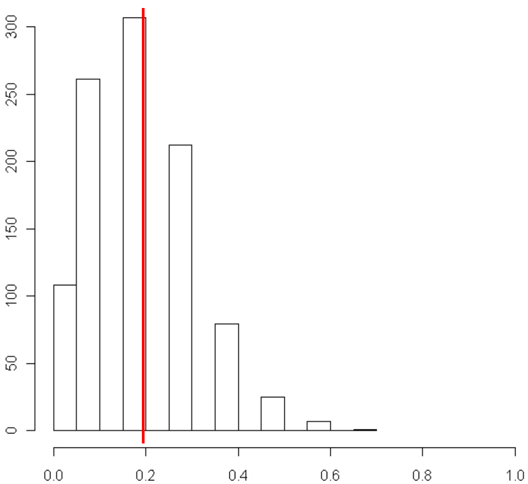
- Jak se chová *Y* pro náhodné výběry o velikosti *n* = 10, *n* = 100 a *n* = 1000?
- Kód v R:

```
s <- rbinom(1000, 10, 0.2)           # vytvořím si 1000 realizací veličiny S při n=10 a p=0,2
y <- s / 10                          # S transformuji na 1000 realizací veličiny Y
hist(y, breaks=10, xlim=c(0,1))      # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=10

s <- rbinom(1000, 100, 0.2)          # vytvořím si 1000 realizací veličiny S při n=100 a p=0,2
y <- s / 100                         # S transformuji na 1000 realizací veličiny Y
hist(y, breaks=10, xlim=c(0,1))      # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=10

s <- rbinom(1000, 1000, 0.2)         # vytvořím si 1000 realizací veličiny S při n=1000 a p=0,2
y <- s / 1000                        # S transformuji na 1000 realizací veličiny Y
hist(y, breaks=10, xlim=c(0,1))      # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=1000
```

Příklad – binomické rozdělení

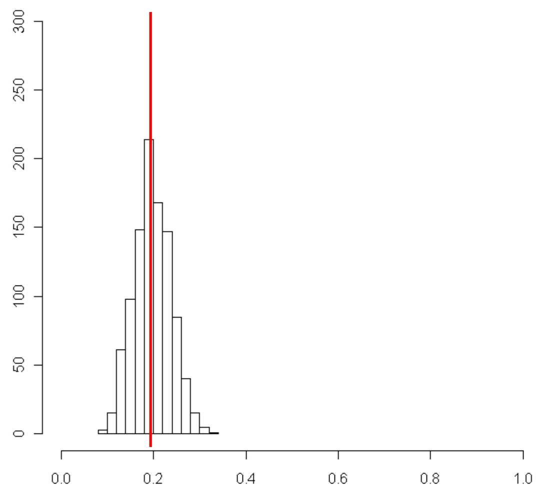
1000 realizací veličiny
Y při *n* = 10

p = 0,2



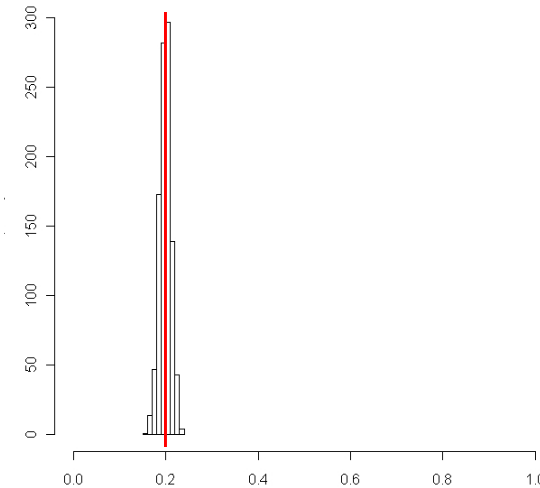
1000 realizací veličiny
Y při *n* = 100

p = 0,2

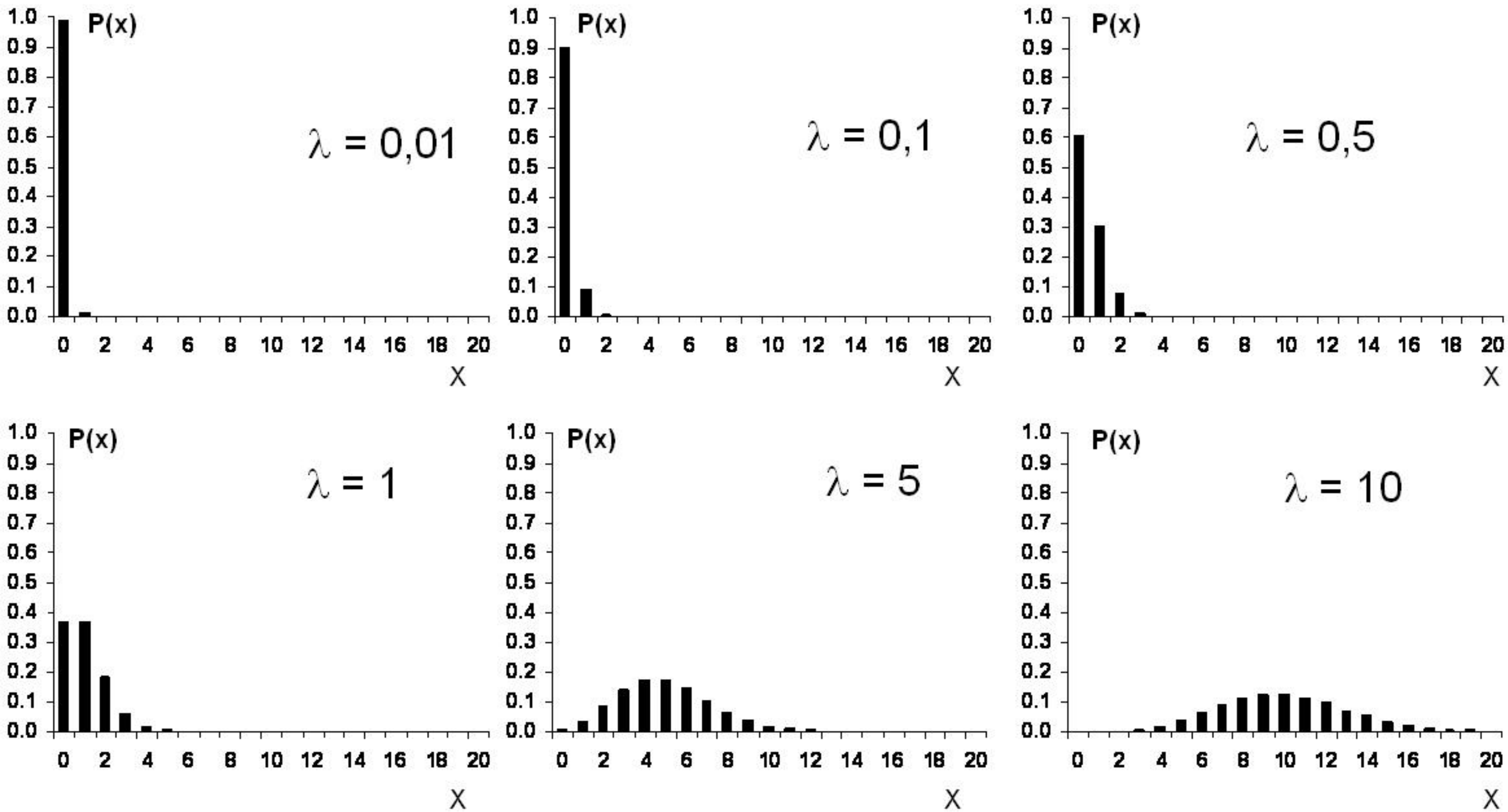


1000 realizací veličiny
Y při *n* = 1000

p = 0,2



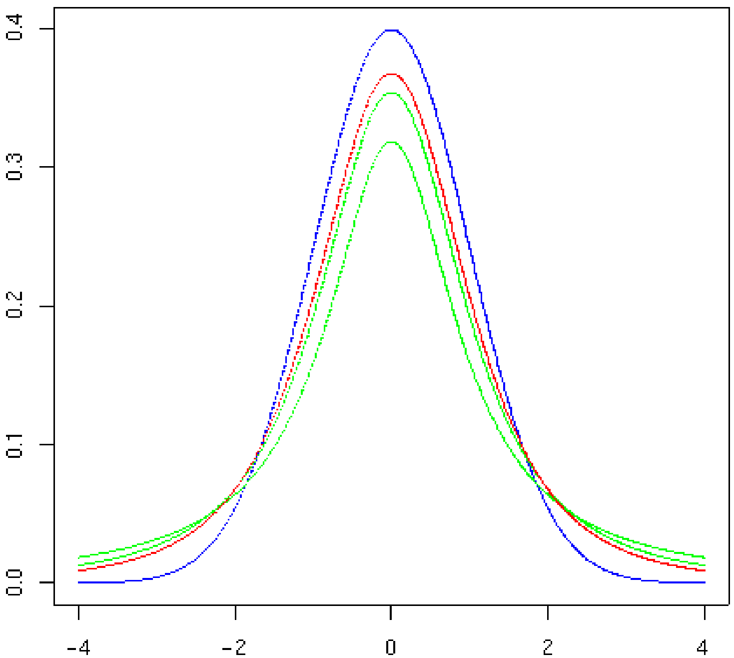
Příklad – Poissonovo rozdělení



Co když ale *n* nejde do nekonečna?

- Není-li velikost vzorku *n* dostatečně velká, nelze rozdělení výběrových průměrů považovat za normální.

- Aproximace Studentovým *t* rozdělením (viz přednáška o jednotlivých rozdělení pravděpodobnosti: Lze ho chápat jako aproximaci normálního rozdělení pro malé vzorky, pro velké velikosti souborů konverguje k normálnímu rozdělení).



4. Intervalové odhady

Co je super … pokračování

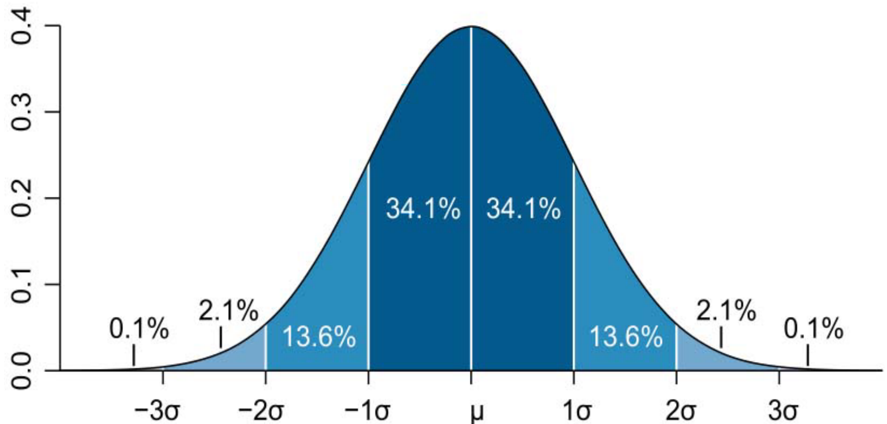
- Centrální limitní věta mi říká, že rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru můžu při dostatečném *n* aproximovat normálním rozdělením.

- Když provedu standardizaci, tak dokonce standardizovaným normálním rozdělením.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Interval spolehlivosti

- Princip vytvoření intervalového odhadu pro výběrový průměr, respektive konstrukce intervalu spolehlivosti pro výběrový průměr, je shodný s teoretickým pozadím pravidla ± 3σ.



68,3 % všech hodnot

95,6 % všech hodnot

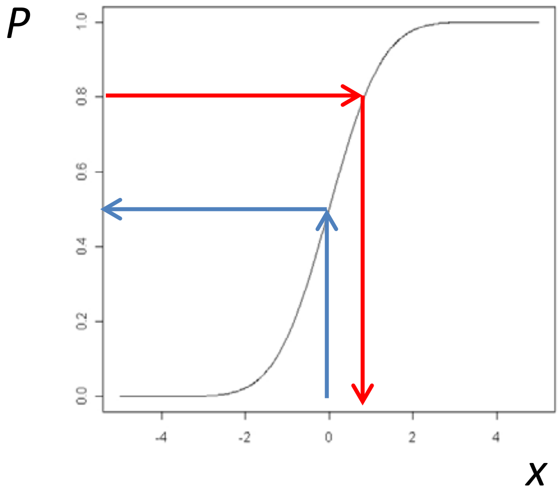
99,7 % všech hodnot

Připomenutí – kvantilová funkce

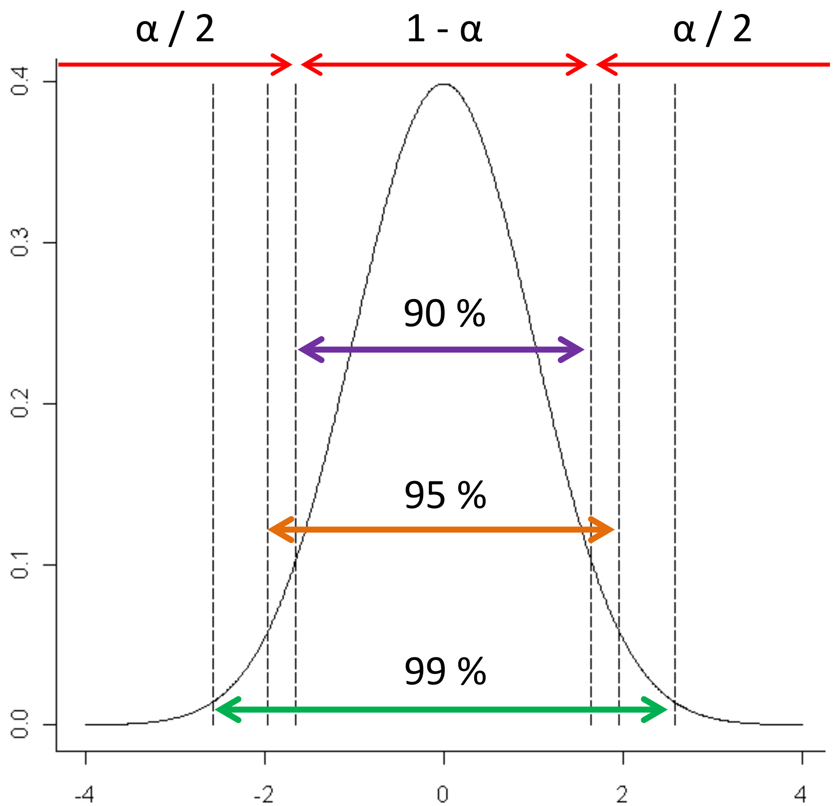
- Inverzní funkce k distribuční funkci, výsledkem není pravděpodobnost, ale číslo na reálné ose, které odpovídá určité pravděpodobnosti.

- **Distribuční funkce** $F(x) = P(X \leq x)$
- **Kvantilová funkce** $x_p = F^{-1}(P(X \leq x)) = F^{-1}(p)$

Spojitá náhodná veličina



Kvantily standardizovaného normální rozdělení



Pravděpodobnosti

$z_{0,005}$ = -2,58 2,58 = $z_{0,995}$

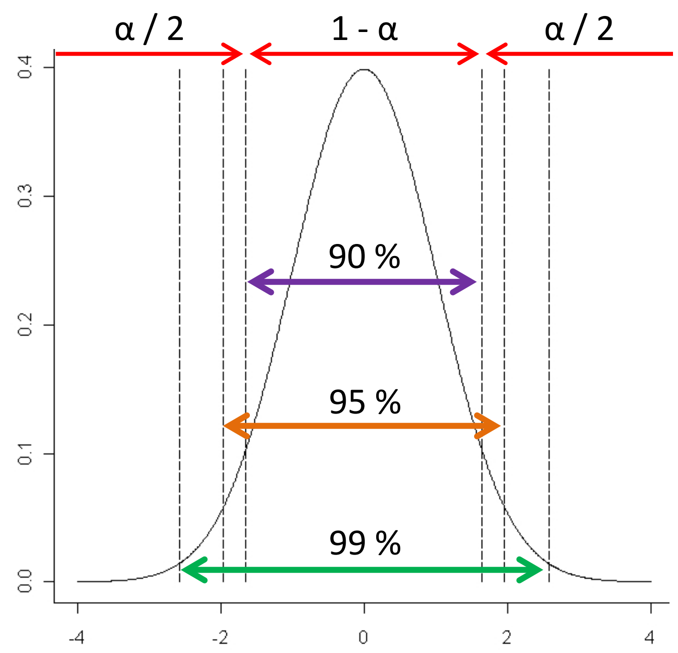
$z_{0,025}$ = -1,96 1,96 = $z_{0,975}$

$z_{0,050}$ = -1,64 1,64 = $z_{0,950}$

Kvantily

Kvantily standardizovaného normální rozdělení

- Oblast, kde se náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením realizuje s pravděpodobností 1 – α lze vyjádřit pomocí následujícího vztahu:



$$P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = F_{N(0,1)}(z_{1-\alpha/2}) - F_{N(0,1)}(z_{\alpha/2}) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

100(1–α)% interval spolehlivosti pro μ

- Máme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z normálního rozdělení. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Budeme předpokládat, že σ známe!
- Z předchozího snímku víme, že platí:

$$P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = F_{N(0,1)}(z_{1-\alpha/2}) - F_{N(0,1)}(z_{\alpha/2}) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

- Když si rozepíšeme a upravíme výraz na levé straně, dostaneme:

$$1-\alpha = P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = P(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = P(-z_{1-\alpha/2} \leq \tfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2})$$

$$= P(-\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \overline{X} - \mu \leq \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}) = P(\overline{X} - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \overline{X} + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$$

- 100(1–α)% IS pro μ má tvar: $(D, H) = (\overline{X} - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}; \overline{X} + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$

100(1–α)% interval spolehlivosti pro μ

- Co ten vzorec znamená?

$$(D, H) = (\overline{X} - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2};\ \overline{X} + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$$

$$\overline{X} \sim N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n})$$

$$SE(\overline{X}) = \sqrt{\tfrac{\sigma^2}{n}} = \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Tedy zjednodušeně:

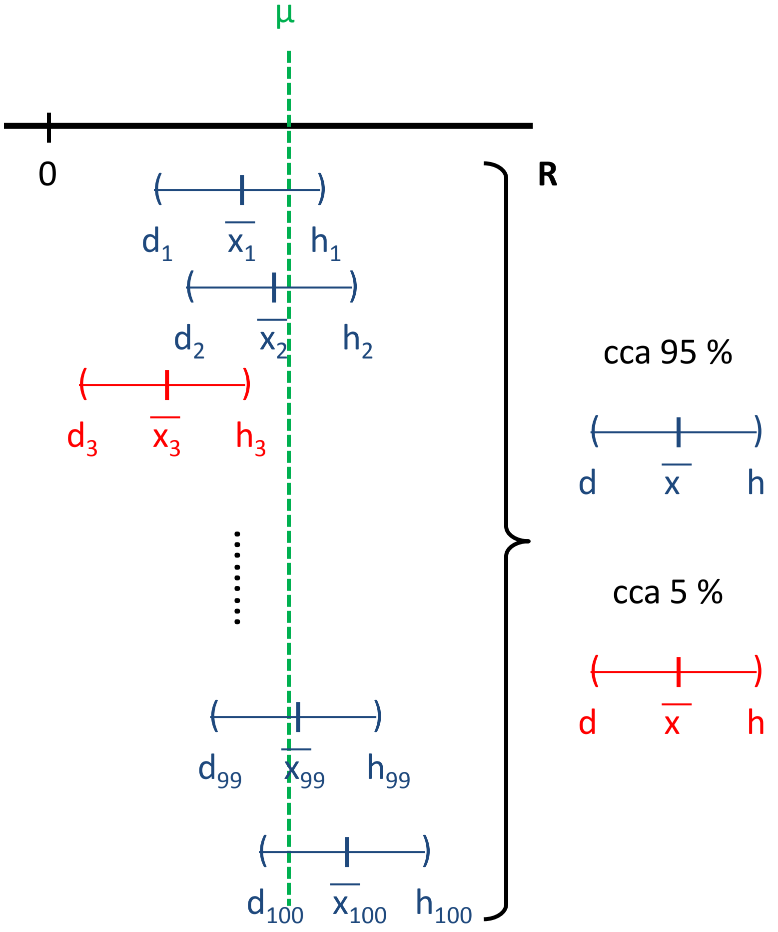
$$100(1-\alpha)\%\ \mathrm{IS} = \overline{X} \pm z_{1-\alpha/2} SE(\overline{X})$$

Interpretace intervalu spolehlivosti

- Poloha neznámého parametru je konstantní (jsme-li frekventisti)!

- 95% interval spolehlivosti má následující interpretaci:

  Pokud bychom opakovaně vybírali skupiny subjektů o stejné velikosti (*n*) a počítali výběrový průměr s 95% IS, pak 95 % těchto intervalů spolehlivosti neznámý parametr obsahuje a 5 % ho neobsahuje. Tedy 95% IS obsahuje neznámý parametr s rizikem α.



Co když neznáme σ?

- V předchozím případě jsme předpokládali, že známe přesnou hodnotu rozptylu / směrodatné odchylky. To je v praxi nereálné!
- Musíme použít jinou statistiku s jiným rozdělením pravděpodobnosti.

- Čím bychom mohli nahradit σ?
- K čemu to povede?

Co když neznáme σ?

- Musíme použít jinou testovou statistiku s jiným rozdělením pravděpodobnosti.

- Čím bychom mohli nahradit σ?
- Logické je použít výběrovou směrodatnou odchylku *s*.
- Náhrada ale není úplně jednoduchá – není to dosazení *s* za σ.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- K čemu to bude?
- Pomocí s^2 vytvoříme statistiku s chí-kvadrát rozdělením (χ^2) – tu pak použijeme pro vytvoření statistiky se Studentovým *t* rozdělením (viz přednáška o jednotlivých rozděleních pravděpodobnosti):

$$X \sim N(0,1), Q \sim \chi^2(k) \rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{Q/k}} \rightarrow T \sim t(k)$$

Co když neznáme σ?

- Lze ukázat, že statistika $K = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(n-1)$
- Použijeme ještě standardizovanou normální veličinu $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0{,}1)$
- A obě dohromady použijeme pro vytvoření *T* statistiky:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{K/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma}{\sqrt{(n-1)s^2/(n-1)\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad T \sim t(n-1)$$

- Z toho plyne tvar 100(1–α)% intervalu spolehlivosti pro μ v případě, že neznáme hodnotu σ:

$$(D, H) = (\bar{X} - \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{X} + \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$$

Příklad – konstrukce intervalu spolehlivosti

- Chceme sestrojit 95% IS pro odhad střední hodnoty systolického tlaku studentů vysokých škol.

$$\left.\begin{aligned} n &= 100 \\ \bar{X}_n &= 123{,}4 \text{ mm Hg} \\ s = SD &= 14{,}0 \text{ mm Hg} \\ SE &= 14/\sqrt{100} = 1{,}4 \text{ mm Hg} \end{aligned}\right\} \text{naměřené hodnoty}$$

$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = 1{,}98 \longrightarrow \text{z tabulek}$$

$$95\%\ \text{IS} = (D, H) = (\bar{X} - \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{X} + \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$$

$$95\%\ \text{IS} = (D, H) = (123{,}4 - \tfrac{14{,}0}{\sqrt{100}} t_{1-0{,}05/2}(99); 123{,}4 + \tfrac{14{,}0}{\sqrt{100}} t_{1-0{,}05/2}(99))$$

$$95\%\ \text{IS} = (D, H) = (120{,}6; 126{,}2)$$

Šířka intervalu spolehlivosti

- Co ovlivňuje šířku intervalu spolehlivosti?

$$100(1-\alpha)\%\ \text{IS pro}\ \mu = (D, H) = (\overline{X} - \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \overline{X} + \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$$

1. **Velikost vzorku** – s rostoucí velikostí vzorku je IS užší (máme více informace a odhad je přesnější), zároveň se kvantily *t* rozdělení blíží kvantilům standardizovaného normálního rozdělení.
2. Variabilita náhodné veličiny
3. Spolehlivost, kterou požadujeme

Šířka intervalu spolehlivosti

- Co ovlivňuje šířku intervalu spolehlivosti?

$$100(1-\alpha)\%\ \text{IS pro}\ \mu = (D, H) = (\overline{X} - \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \overline{X} + \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$$

1. Velikost vzorku
2. **Variabilita náhodné veličiny** – čím náhodná veličina vykazuje větší variabilitu, tím je IS pro odhad střední hodnoty širší, tedy odhad je méně přesný.
3. Spolehlivost, kterou požadujeme

Šířka intervalu spolehlivosti

- Co ovlivňuje šířku intervalu spolehlivosti?

$$100(1-\alpha)\%\ \text{IS pro}\ \mu = (D,H) = (\overline{X} - \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \overline{X} + \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$$

1. Velikost vzorku
2. Variabilita náhodné veličiny
3. **Spolehlivost, kterou požadujeme** – chceme-li mít větší jistotu, že náš IS pokrývá neznámou střední hodnotu, IS musí být samozřejmě širší, stačí-li nám menší spolehlivost, bude užší. Standardně se používá 95% IS (ale také 90% anebo 99%)

Poznámka 1

- Lze vytvořit i IS pro odhad parametru σ, který je založen na již zmíněné statistice *K*.

$$K = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(n-1)$$

- Lze vytvořit i IS pro odhad podílu dvou parametrů σ_1 a σ_2 (pomocí *F* statistiky). Ten lze použít pro hodnocení homogenity rozptylů dvou výběrů, která je jedním z předpokladů v testování hypotéz.

Poznámka 2

- Velmi důležitý je i IS pro odhad střední hodnoty rozdílu dvou náhodných veličin.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \\ \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}) \end{array}\right\} \overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

- **Známe-li σ_1 a σ_2**, provedeme standardizaci a pak odvodíme 100(1-α)% IS:

$$1 - \alpha = P(\overline{X} - \overline{Y} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_!} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_!} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

- **Neznáme-li σ_1 a σ_2**, použijeme statistiky K_1 a K_2, abychom se zbavili σ_1 a σ_2, výsledná statistika má opět Studentovo *t* rozdělení.

$$1 - \alpha = P(\overline{X} - \overline{Y} - t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{X} - \overline{Y} + t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}})$$

Příklad

- Radiofrekvenční ablace tkáně slinivky břišní u prasat. Sledujeme vliv typu chlazení okolních struktur (A – žádné, B – průplach vodou) na největší rozměr nekrózy. Zajímá nás rozdíl v efektu obou typů chlazení a jeho 95% IS.

$$n_A = 18 \qquad \bar{x}_A = 25{,}1\,\text{mm} \qquad SD_A = s_A = 0{,}8 \qquad SE_A = 0{,}8/\sqrt{18} = 0{,}19\,\text{mm}$$

$$n_B = 17 \qquad \bar{x}_B = 21{,}8\,\text{mm} \qquad SD_B = s_B = 2{,}4 \qquad SE_B = 2{,}4/\sqrt{17} = 0{,}58\,\text{mm}$$

- Dosadíme do vzorce s použitím příslušného *t* kvantilu: $t_{0,975}(18+17-2) = 2{,}03$

$$1-\alpha = P(\bar{x}_A - \bar{x}_B - t_{1-\alpha/2}(n_A+n_B-2)\sqrt{\tfrac{s_A^2}{n_A}+\tfrac{s_B^2}{n_B}} \le \mu_A - \mu_B \le \bar{x}_A - \bar{x}_B + t_{1-\alpha/2}(n_A+n_B-2)\sqrt{\tfrac{s_A^2}{n_A}+\tfrac{s_B^2}{n_B}})$$

$$= P(3{,}3 - t_{0,975}(33)\sqrt{\tfrac{0{,}8^2}{18}+\tfrac{2{,}4^2}{17}} \le \mu_A - \mu_B \le 3{,}3 + t_{0,975}(33)\sqrt{\tfrac{0{,}8^2}{18}+\tfrac{2{,}4^2}{17}})$$

$$= P(2{,}1 \le \mu_A - \mu_B \le 4{,}5)$$

Poznámka 3

- Interval spolehlivosti počítá pouze s variabilitou danou náhodným výběrem, nepočítá se zdroji systematického zkreslení.

- **Příklady**:
- Měření krevního tlaku může být systematicky zkresleno starým měřidlem („technical bias“).
- Měření krevního tlaku může být systematicky zkresleno tím, že se do studie přihlásí pouze určitá skupina osob („selection bias“).

Neparametrické metody pro konstrukci IS

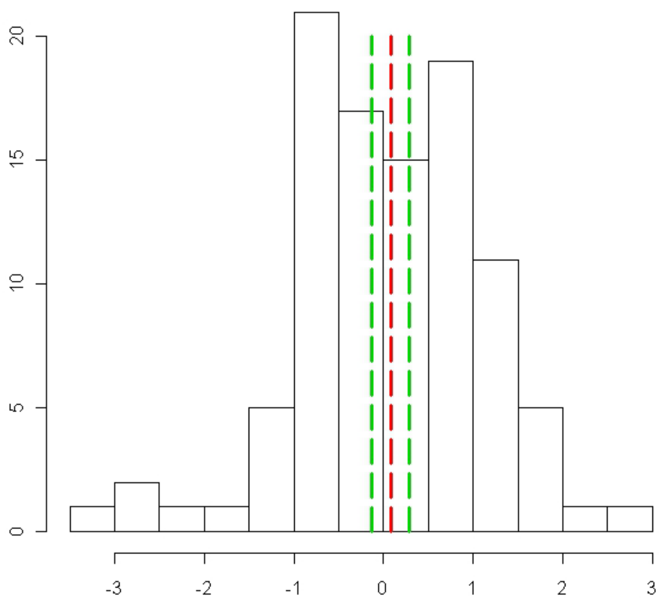
- Variabilitu výběrového průměru lze odhadnout i pomocí neparametrických metod:
- **Bootstrap** – je založen na principu opakovaného vzorkování naměřených dat s vracením, kdy pro vytvoření nového vzorku dat může být každý prvek použit více než jednou, právě jednou anebo není použit vůbec (ovšem se zachováním celkové velikosti souboru *n* i velikosti jednotlivých skupin).
- **Jackknife** – opakovaný výpočet sledované charakteristiky je prováděn vždy s vynecháním právě jednoho pozorování. Tento postup nám stejně jako v případě metody bootstrap poskytuje představu o rozsahu hodnot, ve kterých se námi sledovaná charakteristika může pohybovat, budeme li považovat naměřená data za reprezentativní vzorek z cílové populace.

Příklad

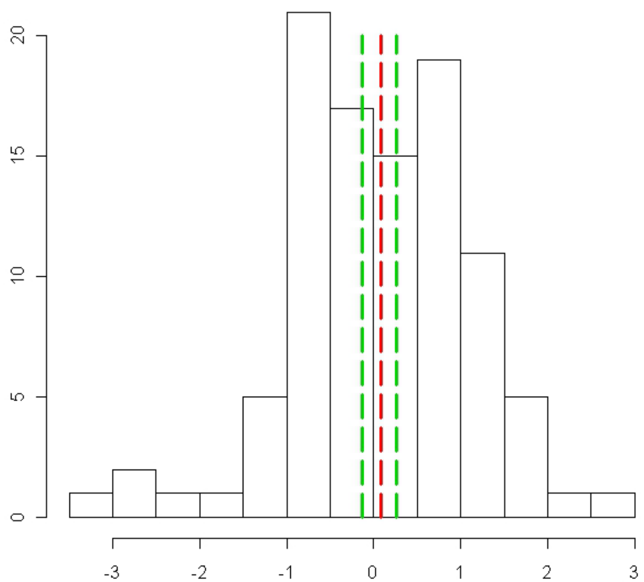
- Máme náhodný výběr o velikosti *n* = 100 z N(0,1). Vytvoříme 95% IS pro průměr pomocí směrodatné chyby a pomocí metody bootstrap (1000 bootstrap vzorků).

$$\bar{x} = 0{,}079$$

$$(d, h) = (-0{,}126;\ 0{,}284)$$



$$(d, h) = (-0{,}133;\ 0{,}264)$$



Poděkování...

Rozvoj studijního oboru „Matematická biologie“ PřF MU Brno je finančně podporován prostředky projektu ESF č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318 „Víceoborová inovace studia Matematické biologie“ a státním rozpočtem České republiky

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ