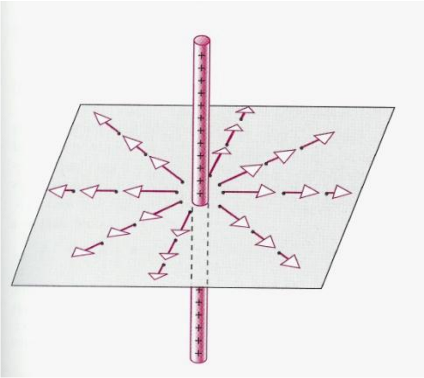
Gaussův zákon elektrostatiky

úvod

pole některých symetrických nabitých těles jsou vyjádřena jednoduchými vztahy

nelze tyto vztahy odvodit podobně jednoduchým způsobem?

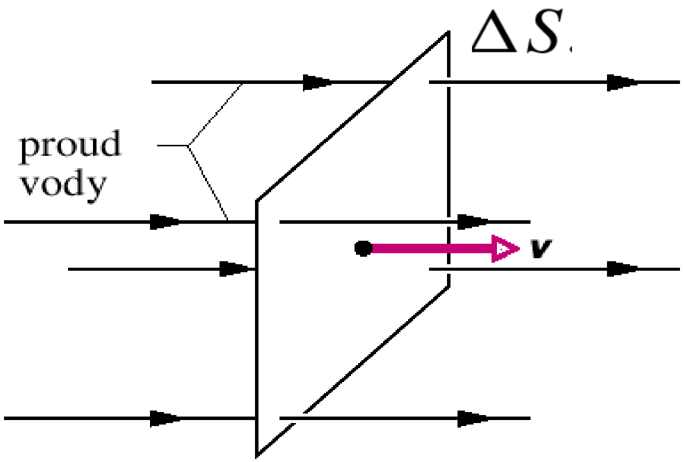


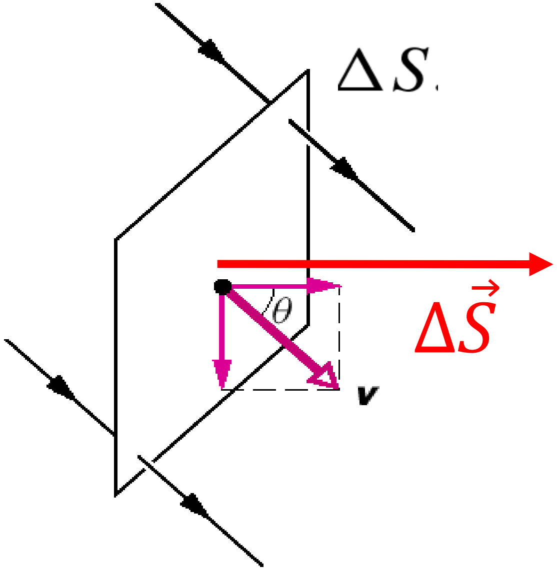
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 y}$$ přímé vlákno nekonečné délky

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ vodivý povrch

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ pole kulové vrstvy pro $r > R$

objemový tok tekutiny





objem tekutiny za 1 s:

$$\Delta\phi = v\Delta S$$

objem tekutiny za 1 s:

$$\Delta\phi = v(\cos\theta)\Delta S$$

$$\Delta\phi = \vec{v}\cdot\Delta\vec{S}$$

tok elektrické intenzity

tok elektrické intenzity $\vec{E}$ elementem plochy

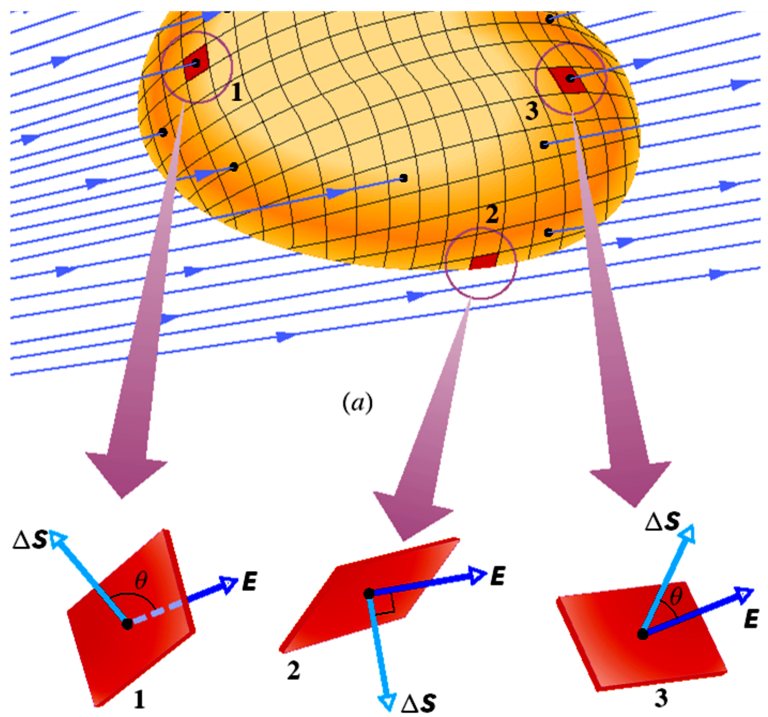
$$\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$

$$\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$

tok elektrické intenzity $\vec{E}$ plochou S

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Č.	θ	Směr $\boldsymbol{E}$	Součin $\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{S}$
1	$> 90^\circ$	dovnitř plochy	záporný
2	$= 90^\circ$	rovnoběžně s plochou	nulový
3	$< 90^\circ$	ven z plochy	kladný



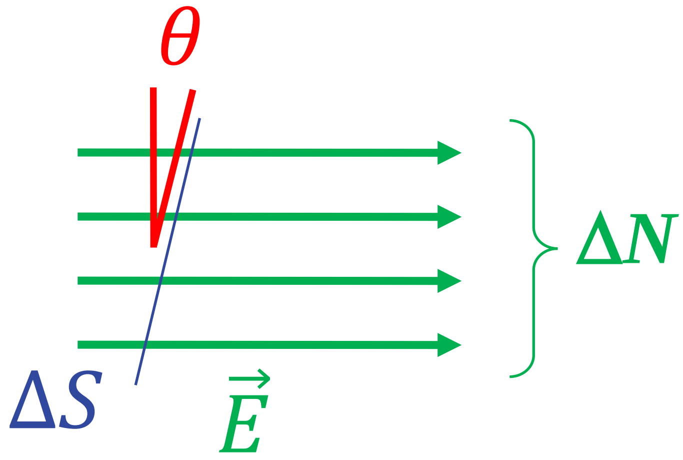
tok intenzity několika polí

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$ ... princip superpozice

tok celkové elektrické intenzity $\vec{E}$ plochou S

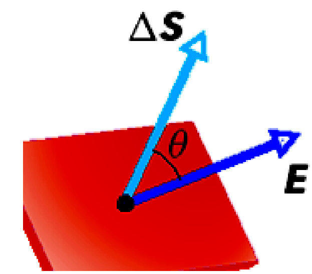
$$\Phi_E = \iint_S \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \iint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{Ei}$$

tok vyjádřený počtem siločar



velikost E intenzity v daném místě je úměrna ($\propto$) hustotě siločar, tj. počtu siločar na jednotku plochy kolmé k siločarám v daném místě:

$$E \propto \frac{\Delta N}{\Delta S \cos\theta}$$



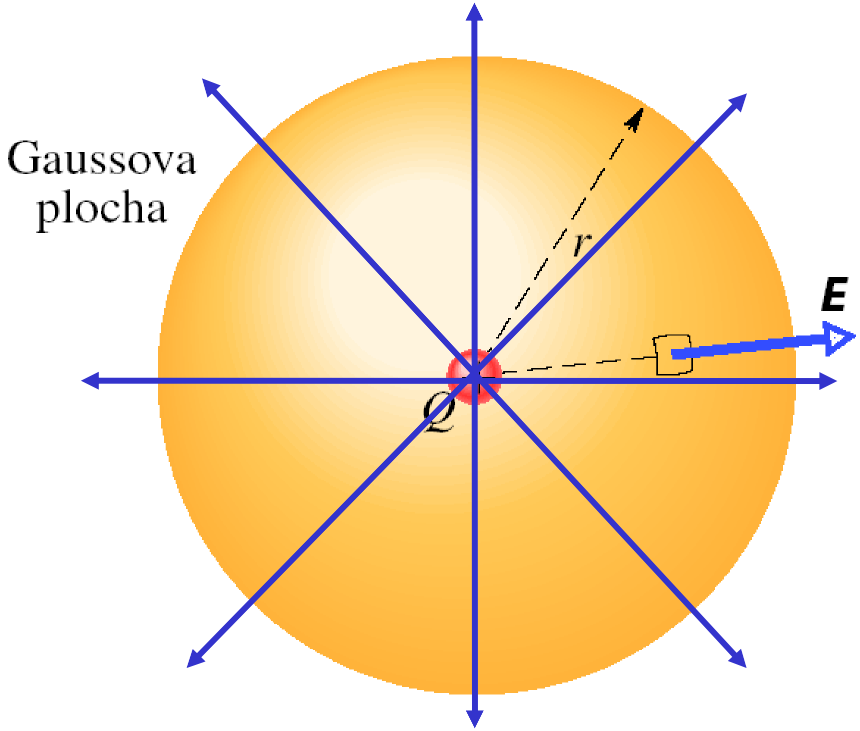
Tok intenzity plochou ΔS:

$$\Delta\Phi_E = E\Delta S\cos\theta \propto \frac{\Delta N}{\Delta S\cos\theta}\Delta S\cos\theta = \Delta N$$

$$\Phi_E = \sum \Delta\Phi_E \propto \sum \Delta N = N$$

celkový tok Φ_E je úměrný celkovému počtu N průchodů siločar plochou (s příslušnými znaménky)

Gaussův zákon intuitivně



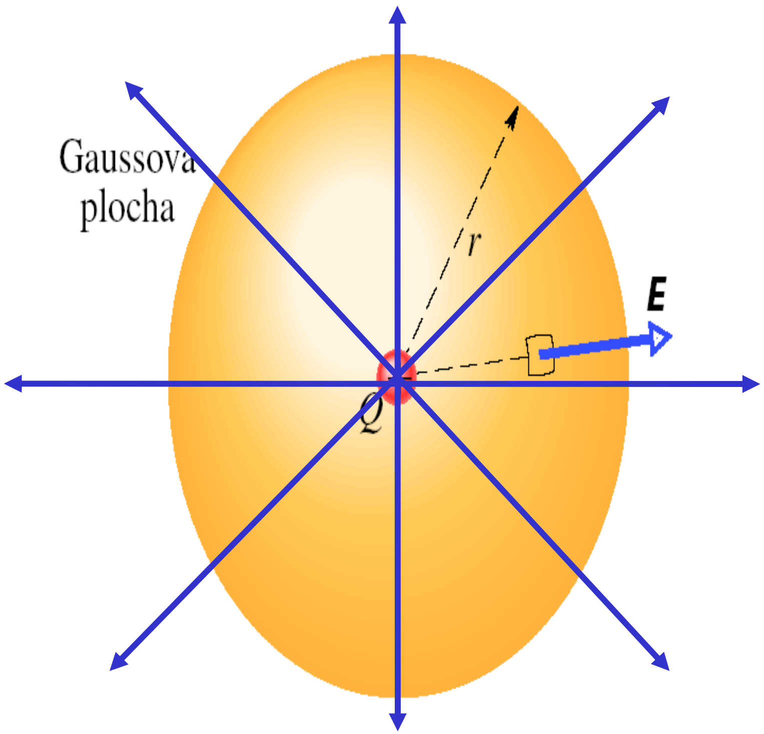
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = ES = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

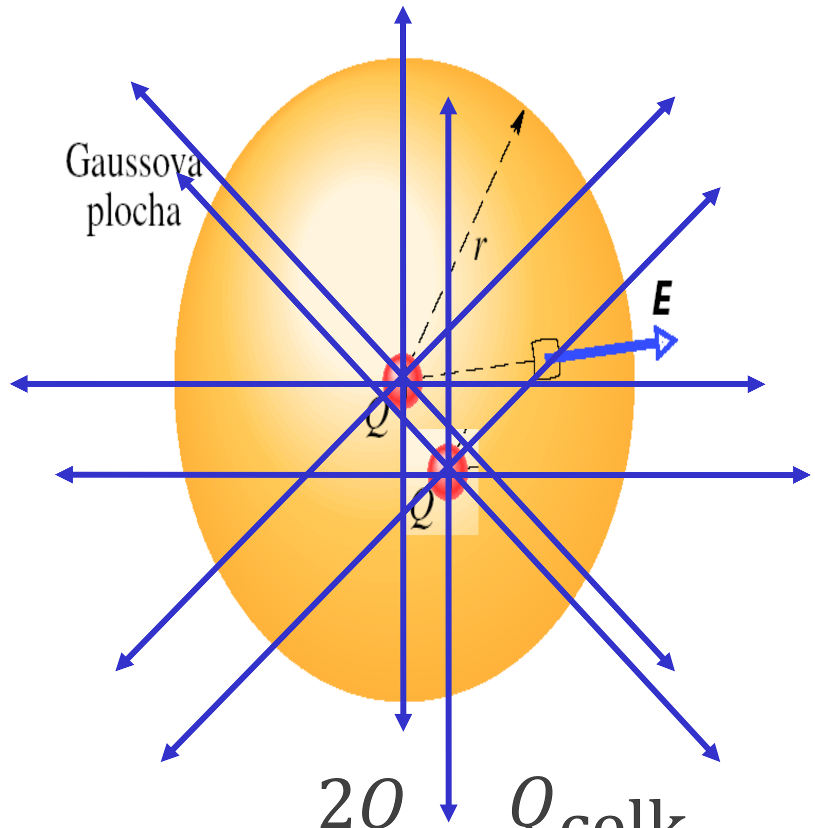
Celkový tok Φ_E Gaussovou (uzavřenou) plochou je úměrný celkovému počtu N průchodů siločar touto plochou (započtených s příslušnými znaménky)

Gaussův zákon intuitivně

Celkový tok Φ_E Gaussovou (uzavřenou) plochou je úměrný celkovému počtu N průchodů siločar touto plochou (započtených s příslušnými znaménky)

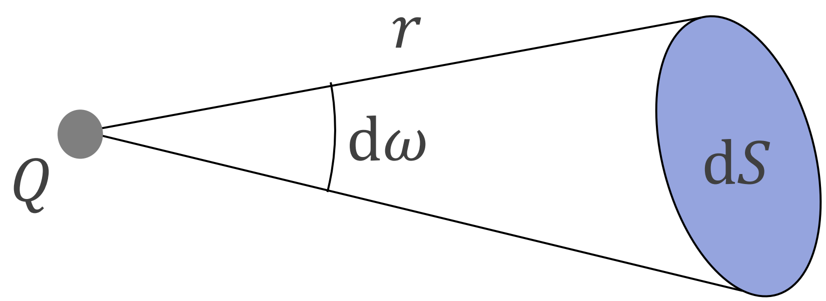


$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



$$\Phi_E = \frac{2Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{celk}}}{\varepsilon_0}$$

odvození Gaussova zákona



tok elektrického pole náboje Q plochou $\mathrm{d}S$ vymezenou elementem $\mathrm{d}\omega$ prostorového úhlu ve vzdálenosti r

$$\mathrm{d}\Phi_E = E\mathrm{d}S\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 \mathrm{d}\omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\omega$$

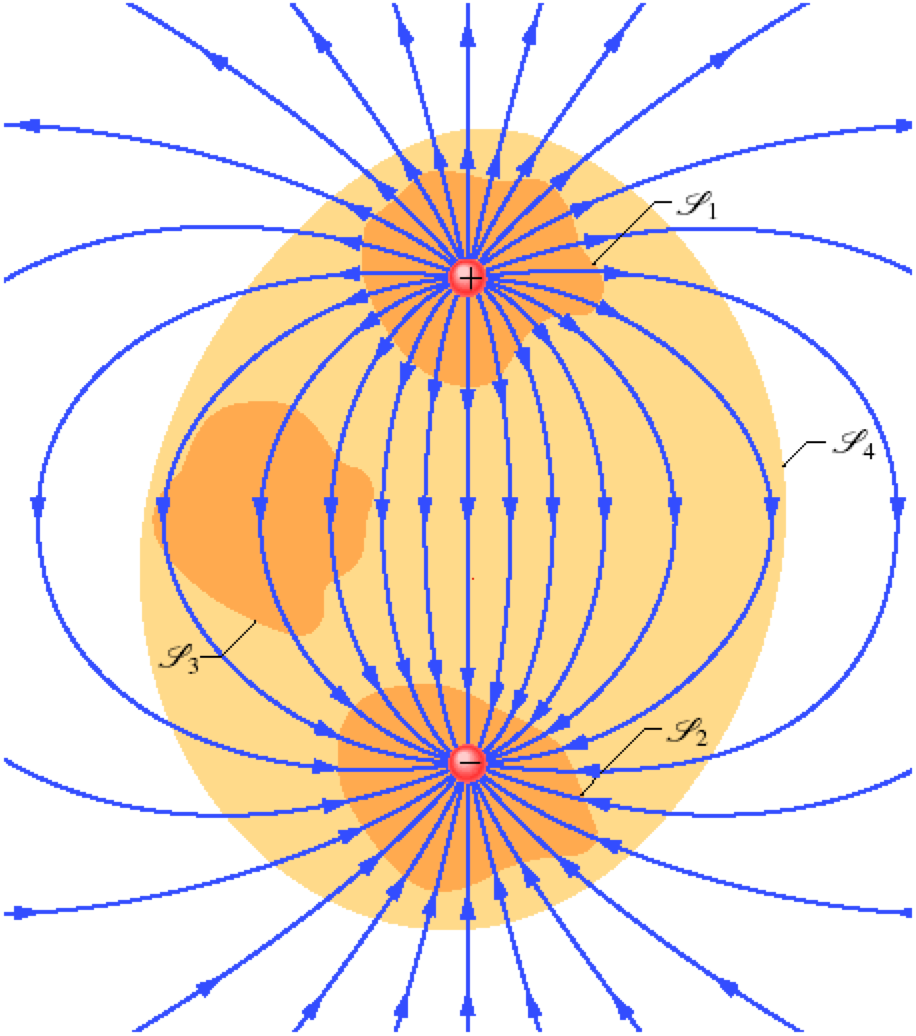
tok libovolnou uzavřenou plochou obklopující náboj Q

$$\Phi_E = \int \mathrm{d}\Phi_E = \int_{4\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\omega = \frac{Q}{\varepsilon_0}\int_{4\pi}\frac{\mathrm{d}\omega}{4\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

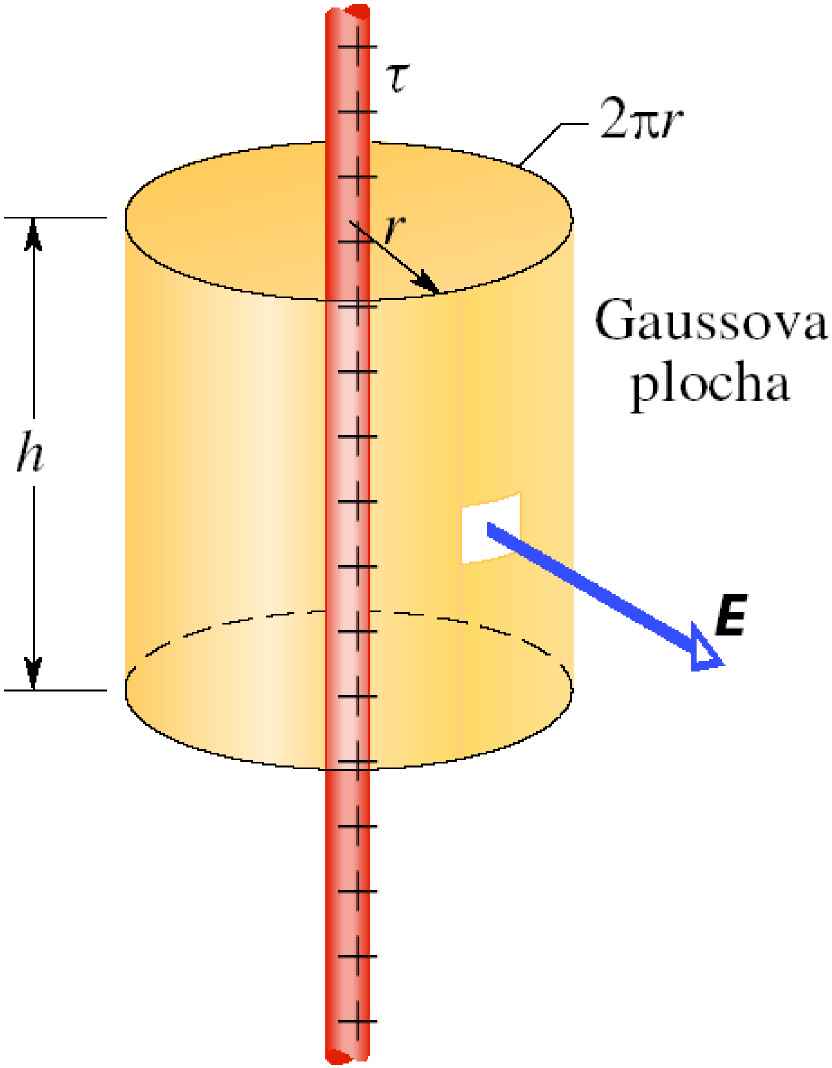
Gaussův zákon

Pro tok elektrické intenzity $\vec{E}$ libovolnou uzavřenou (Gaussovou) plochou S obklopující celkový náboj Q platí

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



válcová symetrie



přímé vlákno nekonečné délky:

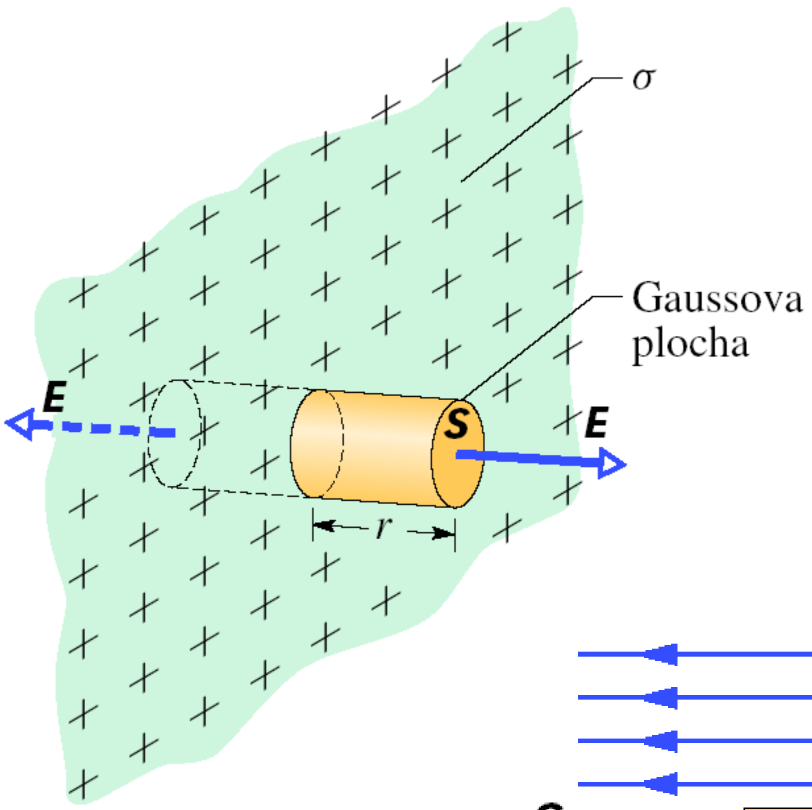
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

blesk

nábojová hustota elektronů:
$\tau \approx -1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C \cdot m^{-1}}$
ionizace vzduchu nastává při
$E_{\mathrm{ion}} \approx 3 \cdot 10^{6}\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}$

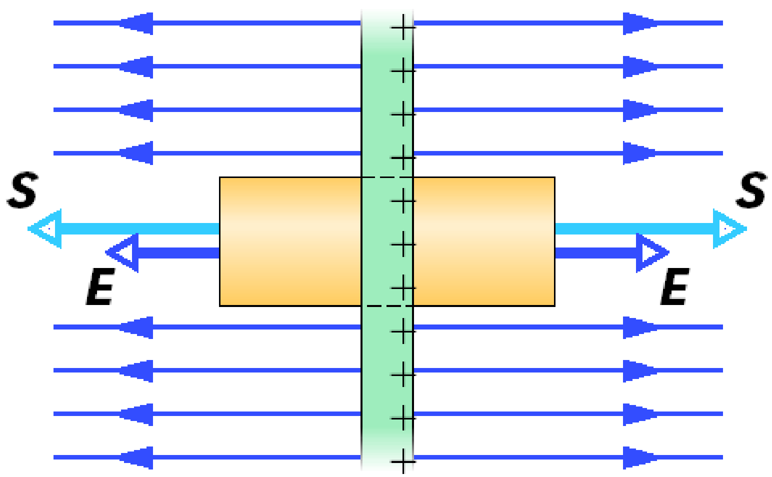
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

rovinná symetrie



nevodivá rovinná plocha:

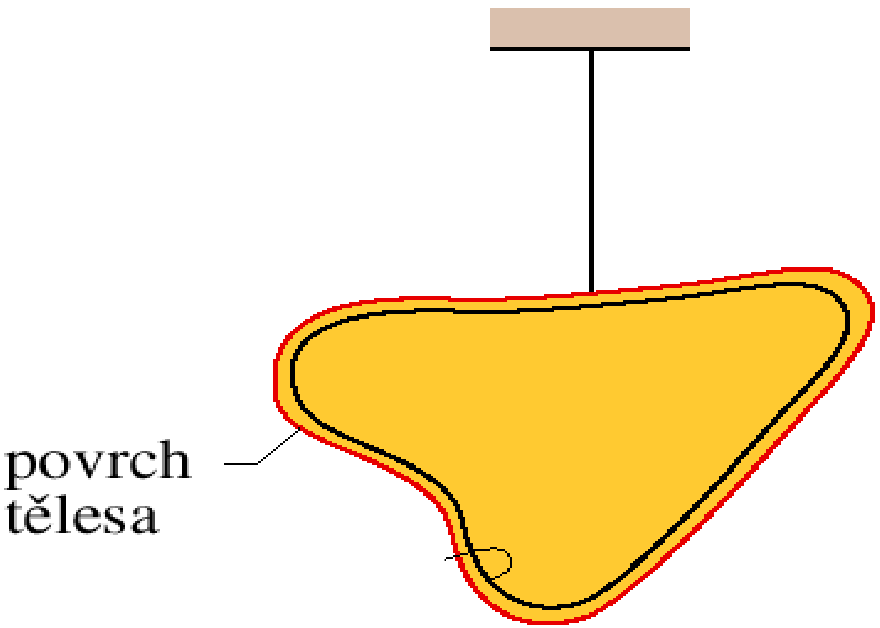
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



nabitý izolovaný vodič

vodič obsahuje volně pohyblivý náboj, z toho důvodu:

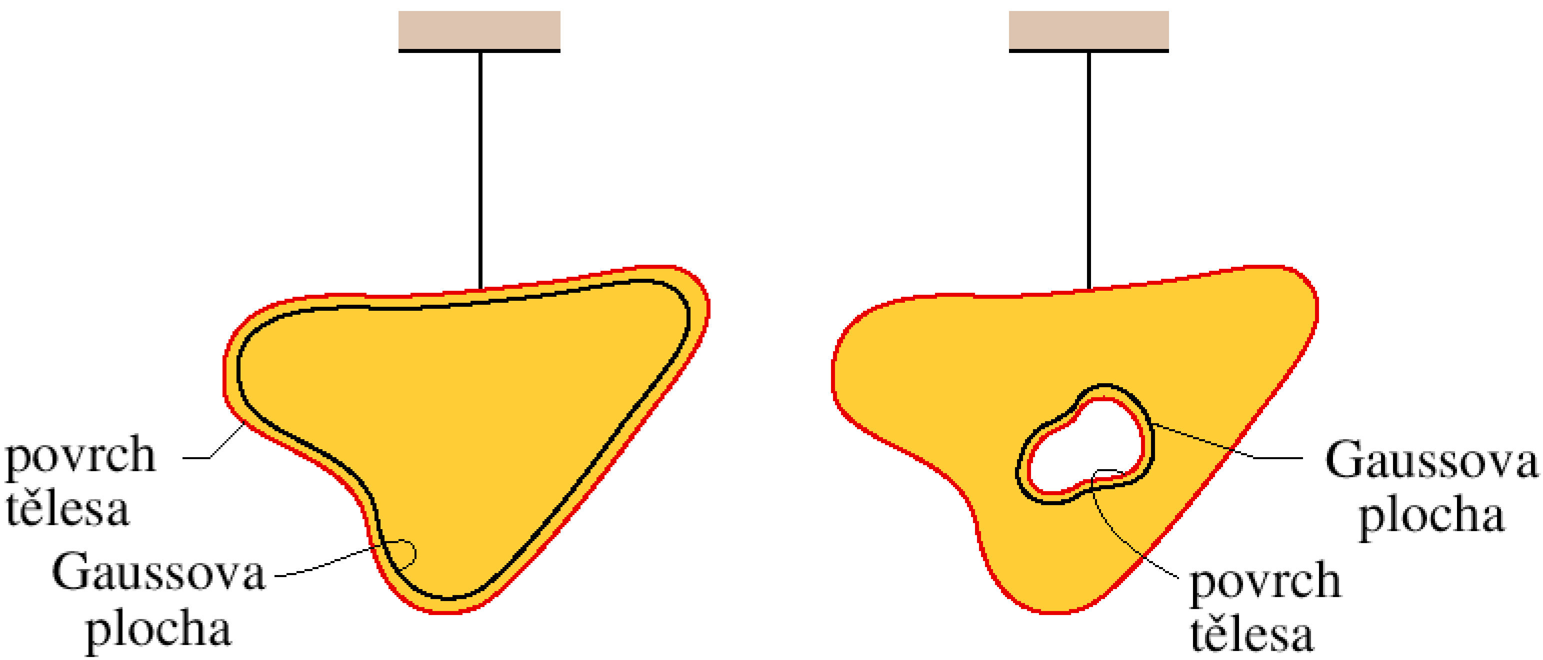
elektrická intenzita uvnitř vodiče v ustáleném stavu je vždy nulová



nabitý izolovaný vodič

elektrická intenzita uvnitř vodiče v ustáleném stavu je vždy nulová

Jestliže na izolovaný vodič přivedeme z vnějšku náboj, pak se všechen rozmístí na vnějším povrchu vodiče. Uvnitř vodiče nezůstane žádný volný náboj.



experimentální důkaz

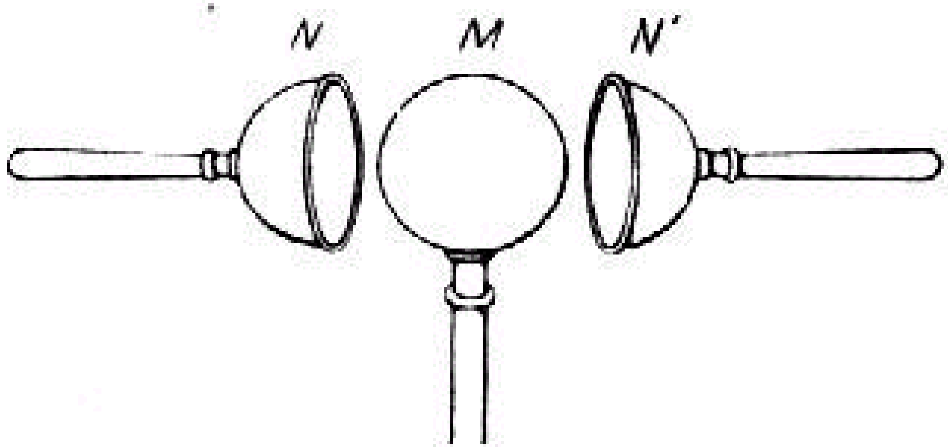


Fig. 450

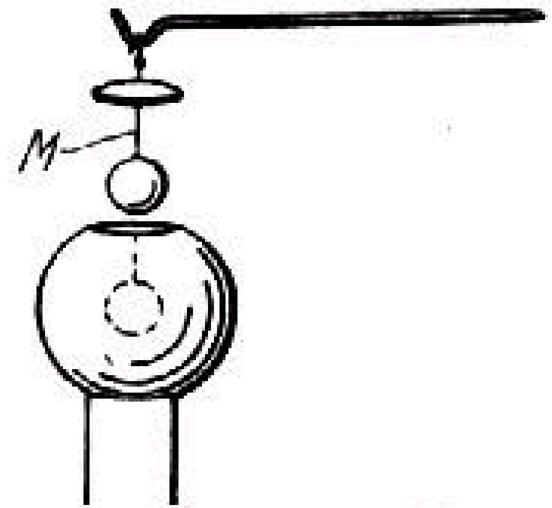


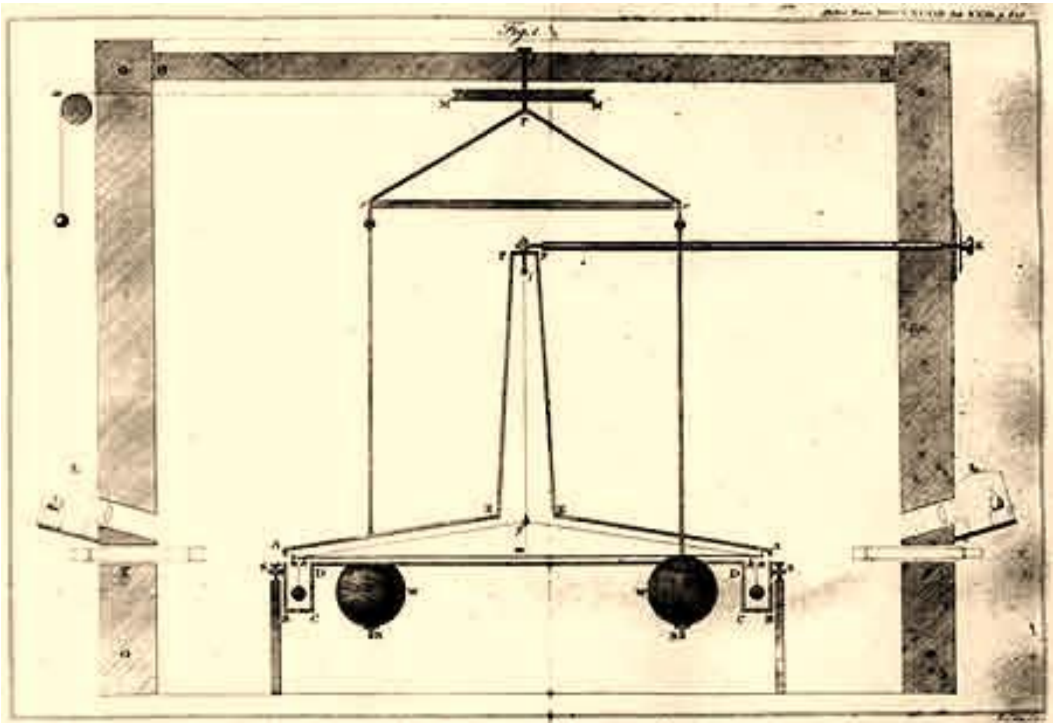
Fig. 451

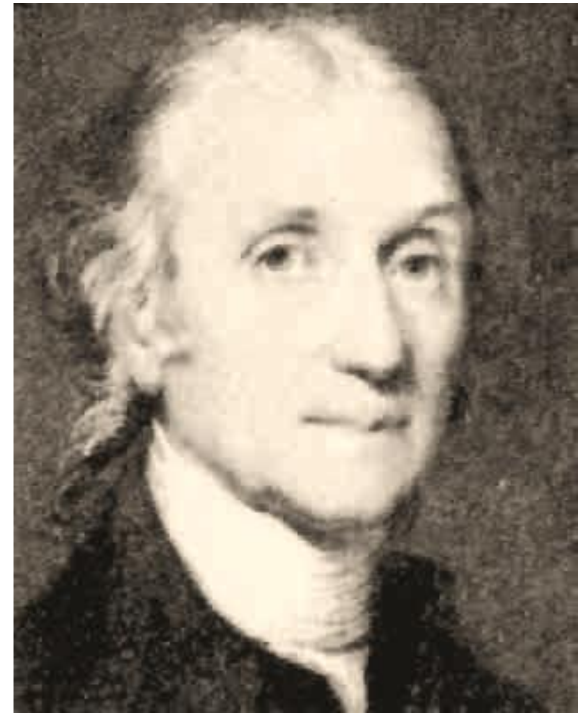
Proof that a charged conductor has only surface charge

Henry Cavendish
1731-1819

M is an insulated, charged metal sphere, *N* and *N*' are hemispherical shells with insulated handles into which *M* fits. If you place *N* and *N*' over *M*, so that they form a sphere as a metal skin and then remove again *N* and *N*', *M* is unloaded and the charge on *N* and *N*' equals the initial charge on *M*.

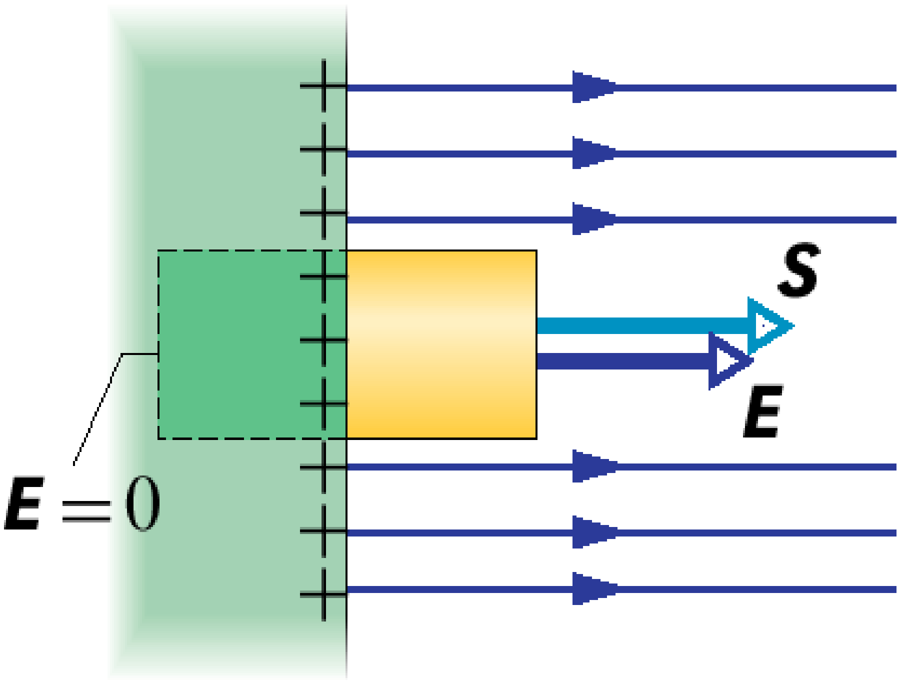
Henry Cavendish





The torsion balance experiment of Henry Cavendish who in 1797 was the first to experimentally measure the gravitational constant G. (Courtesy of the Journal of Measurement and Technology.)

povrch nabitého vodiče

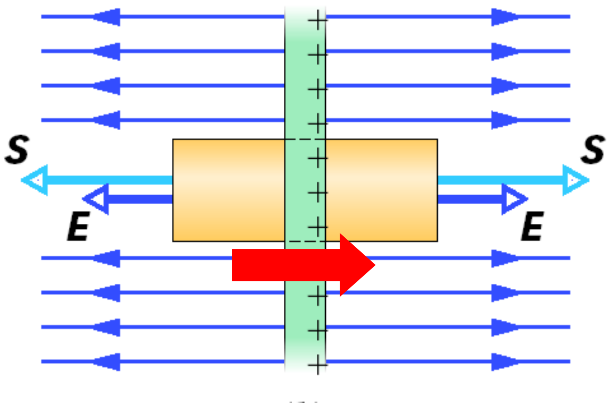


vodivý povrch:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

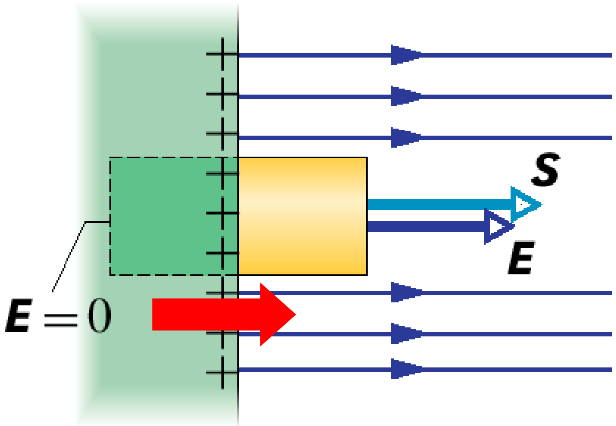
průchod nabitou vrstvou

při průchodu tenkou vrstvou náboje s plošnou hustotou σ ...



nevodivá plocha:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

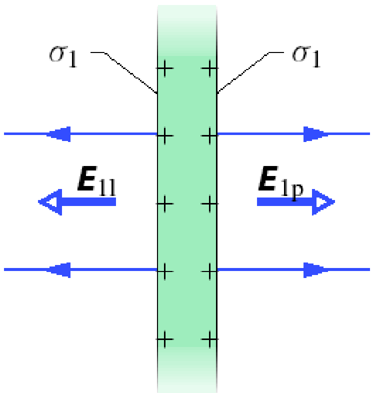


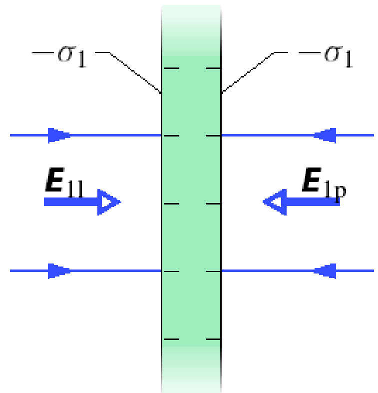
vodivý povrch:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

... vzroste intenzita elektrického pole o $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

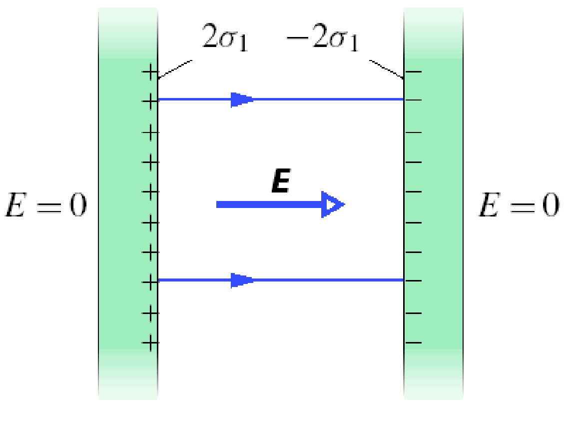
dvě vodivé desky





vodivý povrch:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$



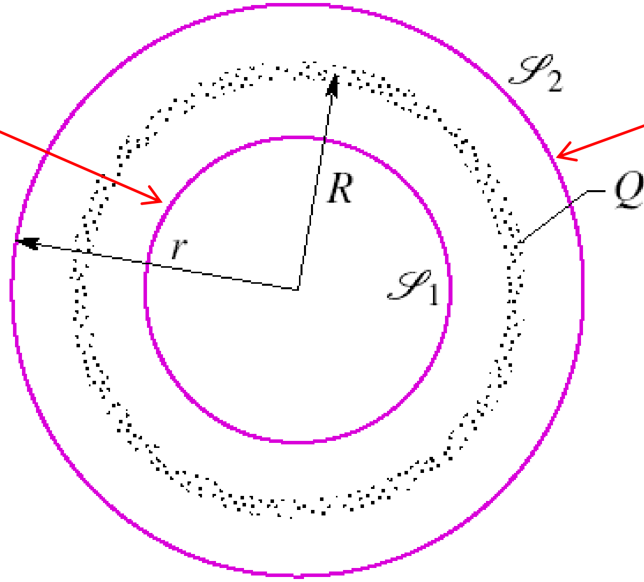
mezi vodivými deskami:

$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

kulová symetrie (kulová slupka)

$r < R$:
$E = 0$

$r > R$:
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



Obr. 24.18 Řez tenkou kulovou vrstvou, nesoucí rovnoměrně rozložený náboj Q, a dvěma Gaussovými plochami $\mathscr{S}_1$ a $\mathscr{S}_2$. Plocha $\mathscr{S}_2$ obklopuje kulovou vrstvu, plocha $\mathscr{S}_1$ obklopuje pouze prázdný prostor uvnitř vrstvy.

kulová symetrie (koule)

$r > R$:

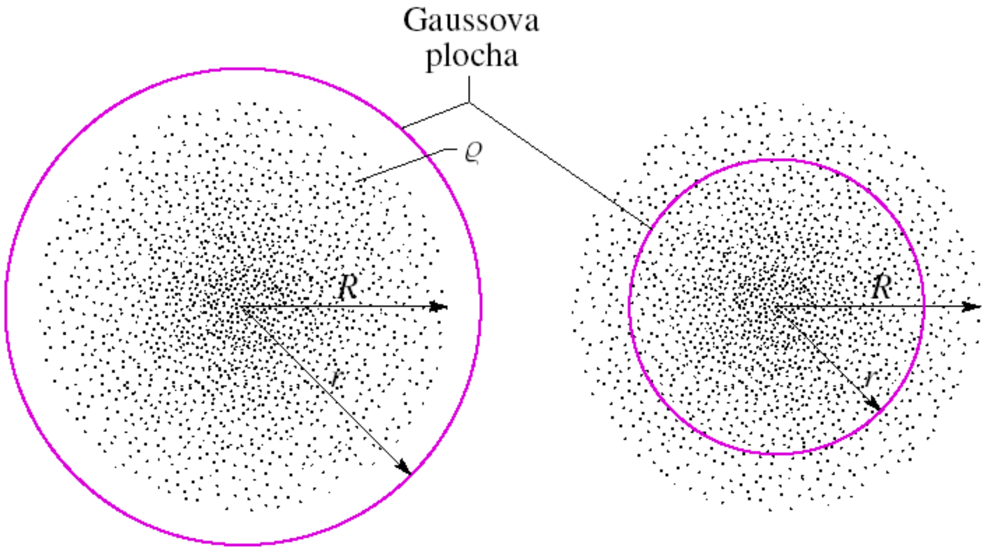
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$Q = \int_0^R \rho(r')4\pi r'^2 \mathrm{d}r'$$

$r < R$:

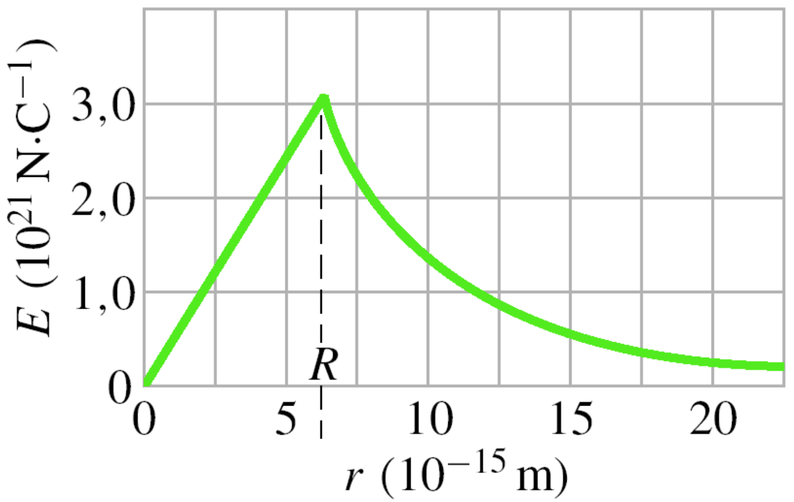
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r^2}$$

$$Q(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 \mathrm{d}r'$$



příklad (koule)

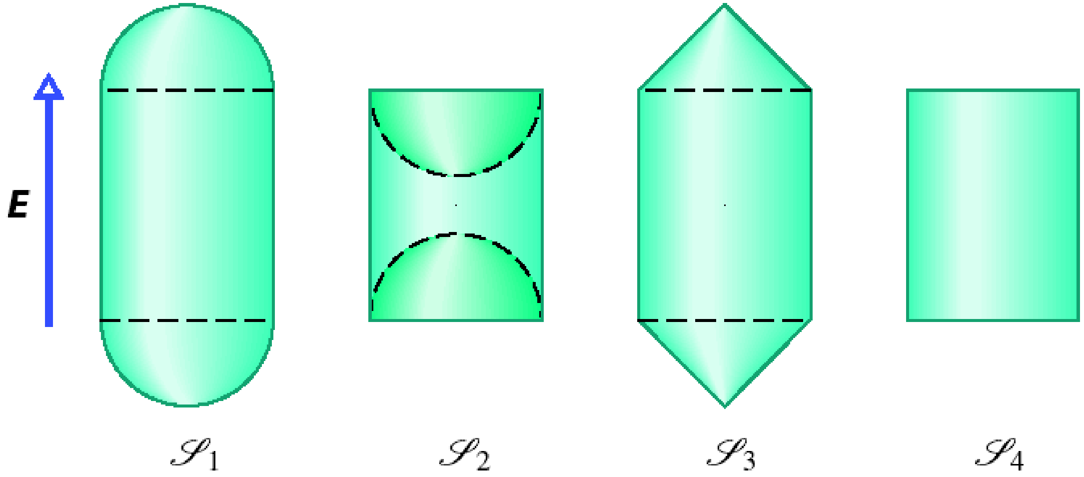
Jádro atomu zlata má poloměr $R = 6{,}2 \cdot 10^{-15}$ m a nese kladný náboj $Q = Ze$, kde $Z = 79$ je atomové číslo zlata. Nakreslete průběh intenzity elektrického pole od středu jádra až do vzdálenosti $2R$. Předpokládejme, že jádro má kulový tvar s prostorově homogenním rozložením náboje.



Obr. 24.20 Příklad 24.7. Závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti od středu jádra atomu zlata. Předpokládáme homogenní rozdělení kladného náboje v objemu jádra.

kontrolní otázky

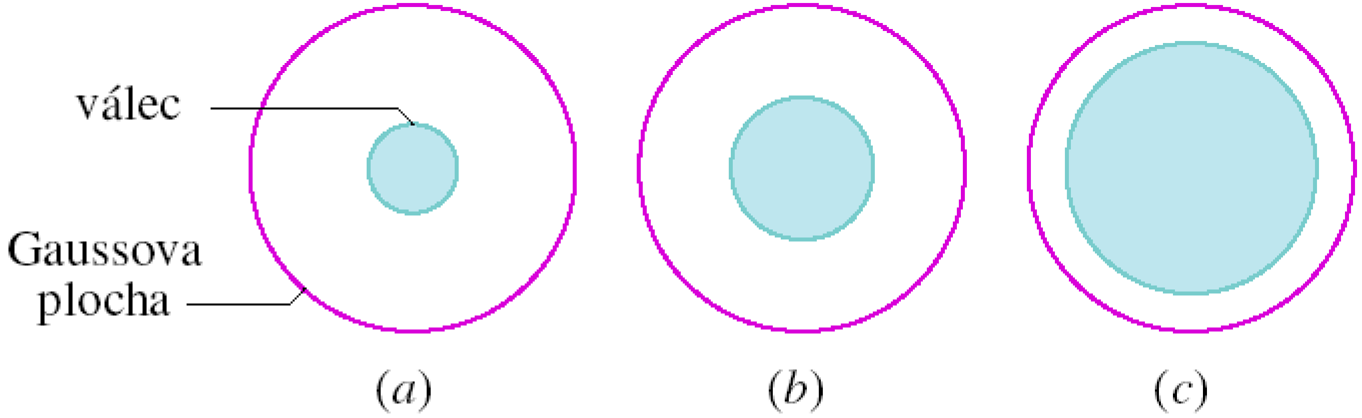
3. Na obr. 24.21 jsou čtyři válcovité Gaussovy plochy se stejným pláštěm a podstavami různého tvaru. Tyto plochy se nacházejí v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$, která je rovnoběžná s osou válcových ploch. Podstavy $\mathscr{S}_1$ mají tvar povrchu konvexních polokoulí, podstavy $\mathscr{S}_2$ konkávních polokoulí, podstavy $\mathscr{S}_3$ kuželů a podstavy $\mathscr{S}_4$ tvar kruhů. Seřaďte sestupně tyto plochy podle (a) velikosti celkového toku intenzity elektrického pole, (b) podle toku elektrické intenzity horními podstavami.



Obr. 24.21 Otázka 3

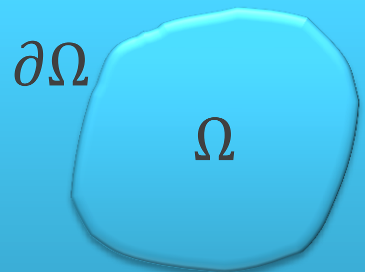
kontrolní otázky

9. Na obr. 24.25 je znázorněn řez třemi válci, z nichž každý nese náboj Q. Gaussova plocha je tvořená povrchem souosého válce a má ve všech třech případech stejný poloměr. Seřaďte v sestupném pořadí tyto případy podle velikosti elektrické intenzity na Gaussově ploše.



Obr. 24.25 Otázka 9

Gaussova-Ostrogradského věta



$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A}\,\mathrm{d}V$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Q

Gaussův zákon: $$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\Omega} \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\Omega} \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\iiint_{\Omega} \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}V = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

libovolné Ω