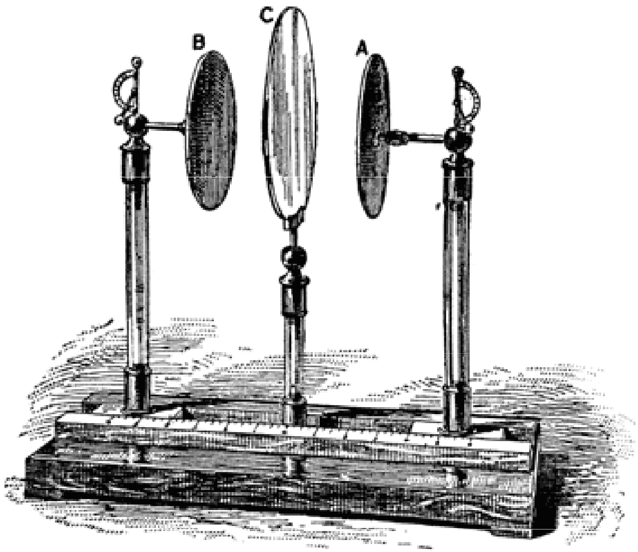
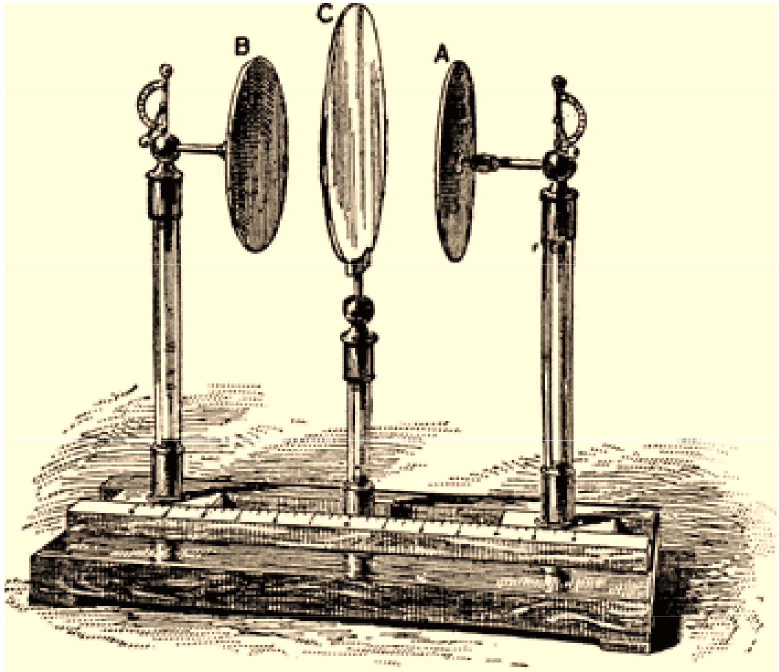
kapacita



jak uchovat elektrickou energii?

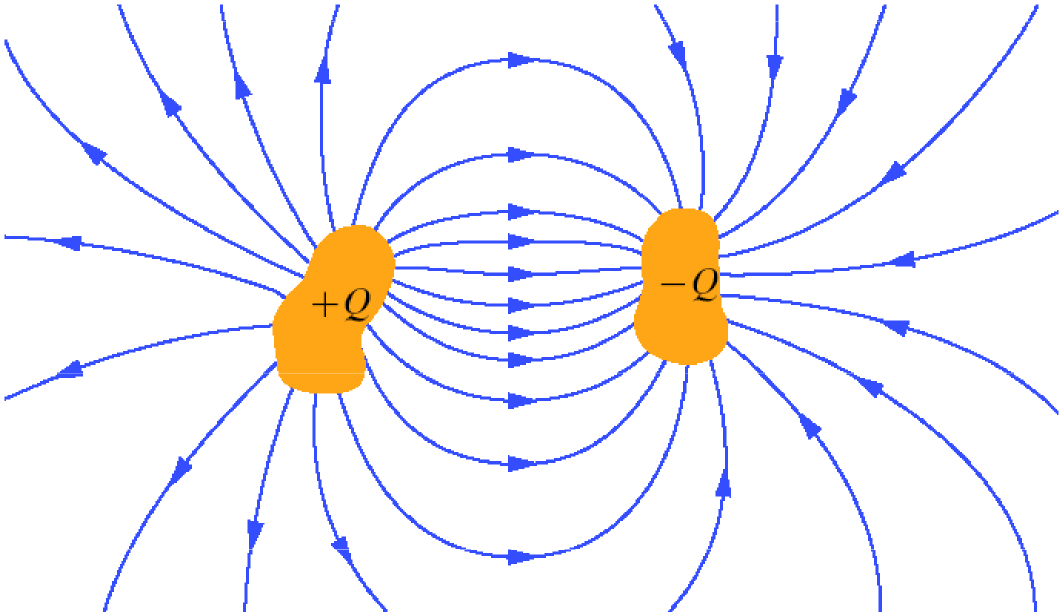
v kondenzátoru!



William & Robert Chambers *Encyclopaedia - A Dictionary of Universal Knowledge for the People* (Philadelphia: J. B. Lippincott & Co., 1881)1173

definice kapacity

kondenzátor:

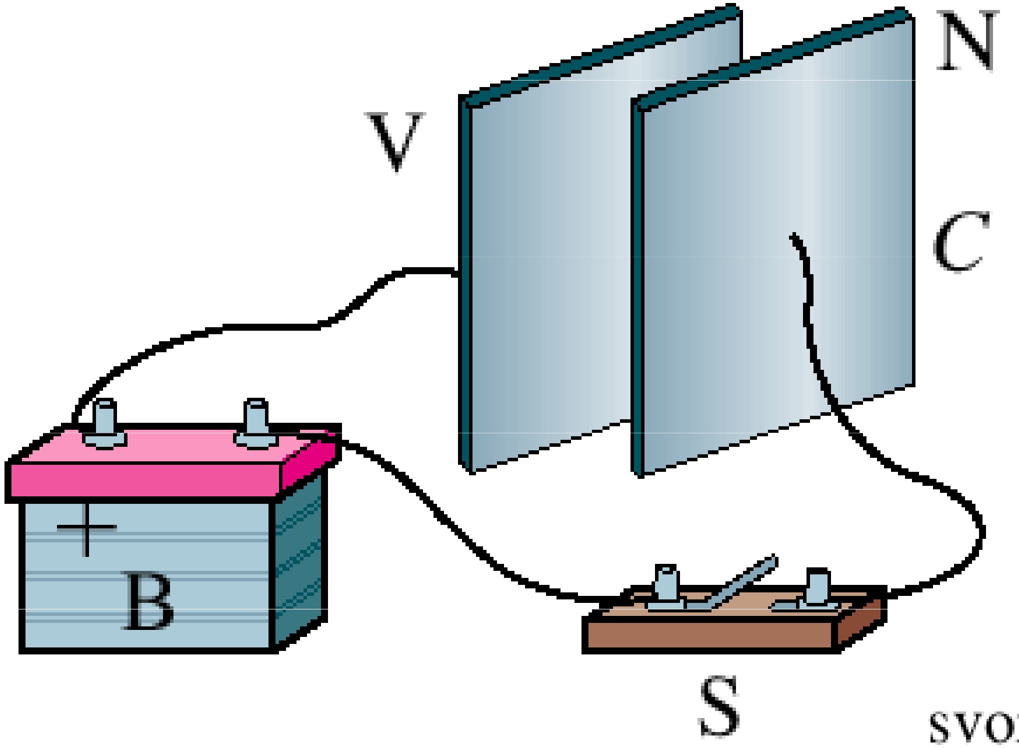


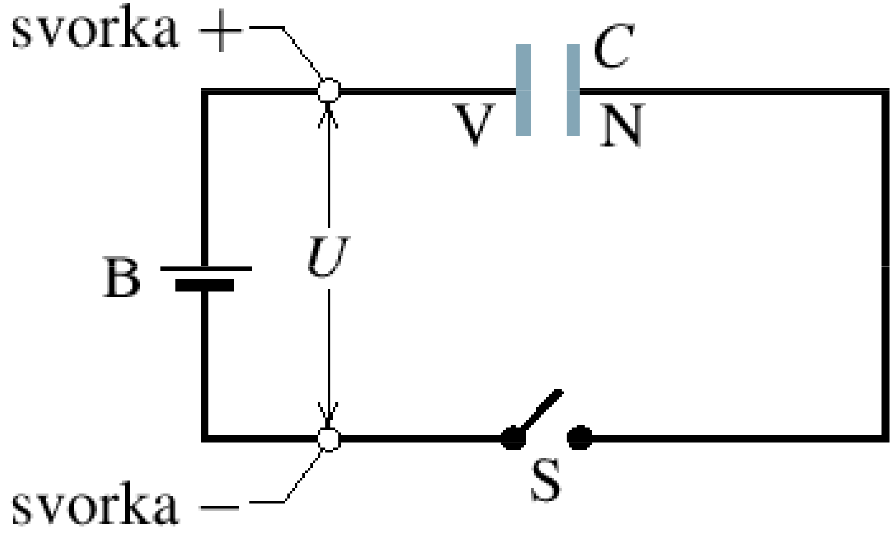
$$U \propto E \propto Q$$

definice kapacity: $\boxed{C = Q/U}$

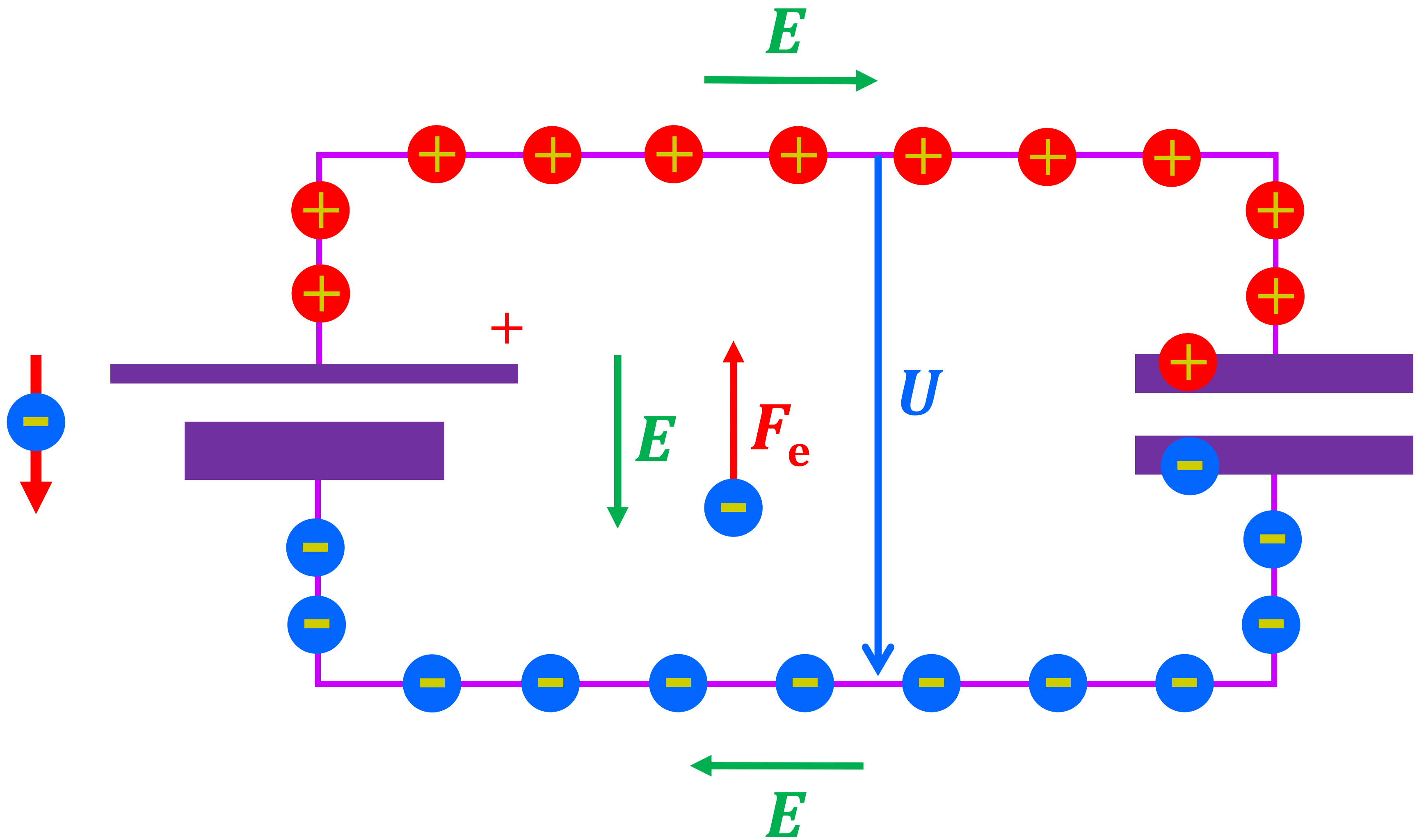
jednotka kapacity: 1 F (Farad) = 1 C·V^{-1}

nabíjení kondenzátoru





nabíjení kondenzátoru



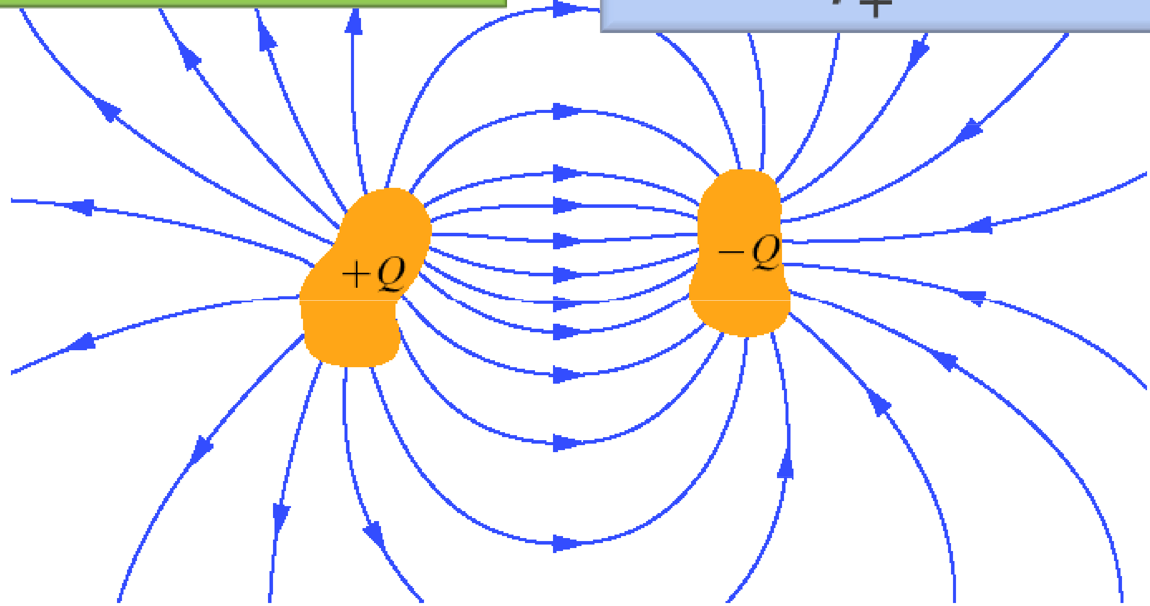
výpočet kapacity

$$C = Q/U$$

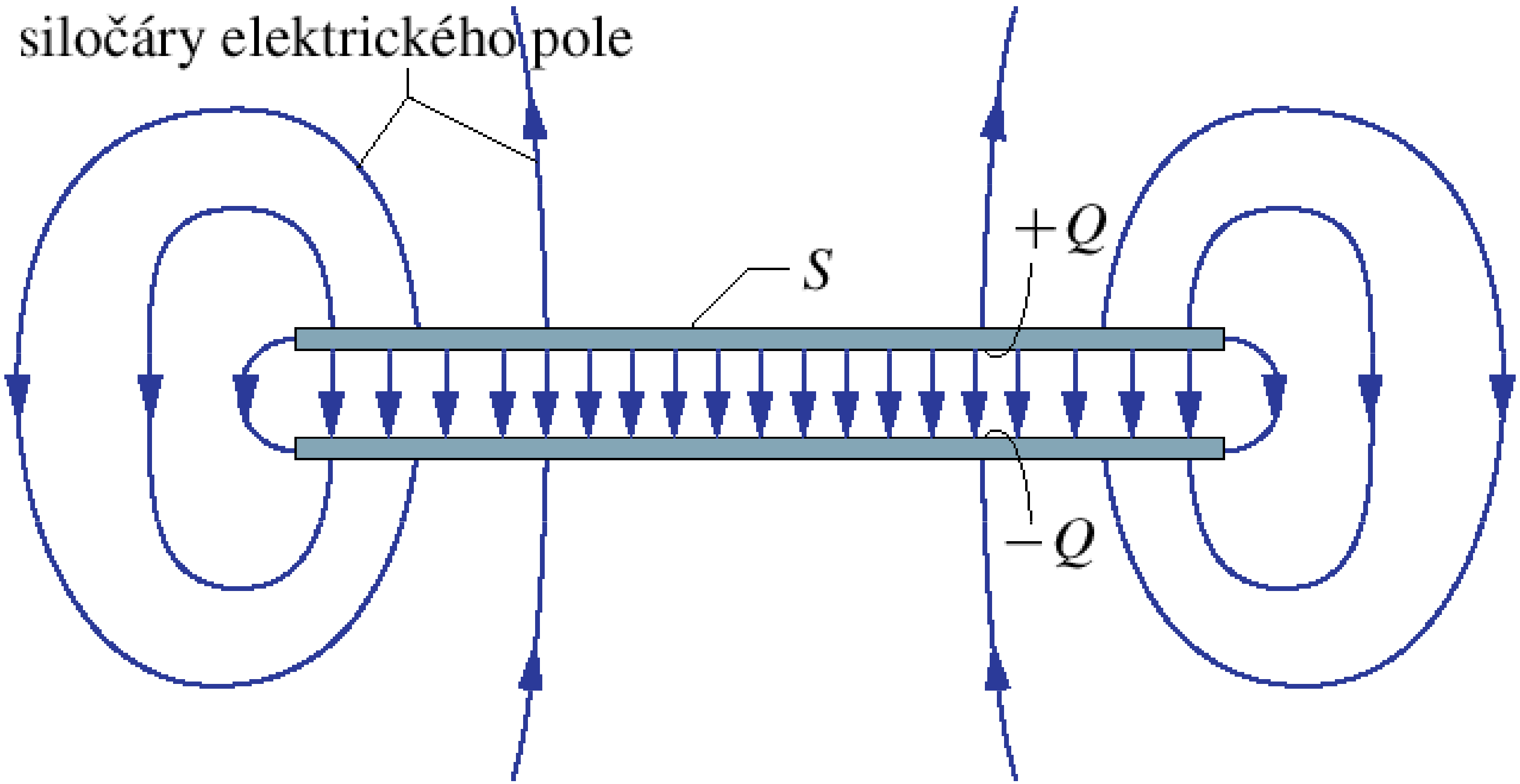
$$Q \rightarrow \vec{E} \rightarrow U$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

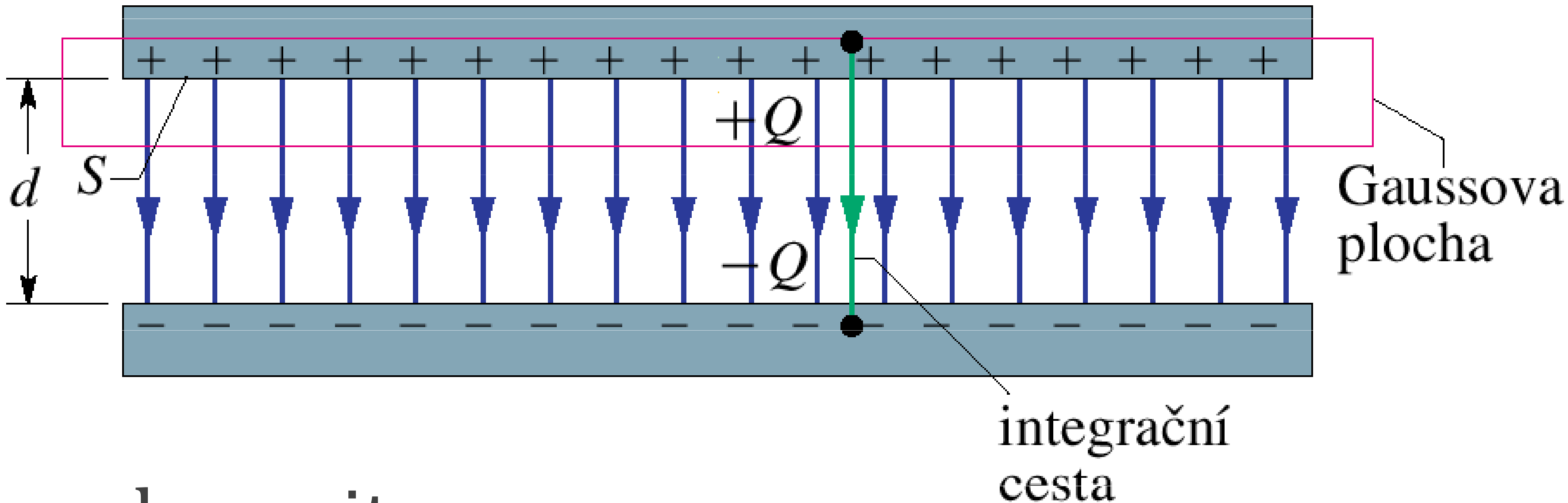
$$U = \int_{\vec{r}_+}^{\vec{r}_-} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$



deskový kondenzátor



deskový kondenzátor

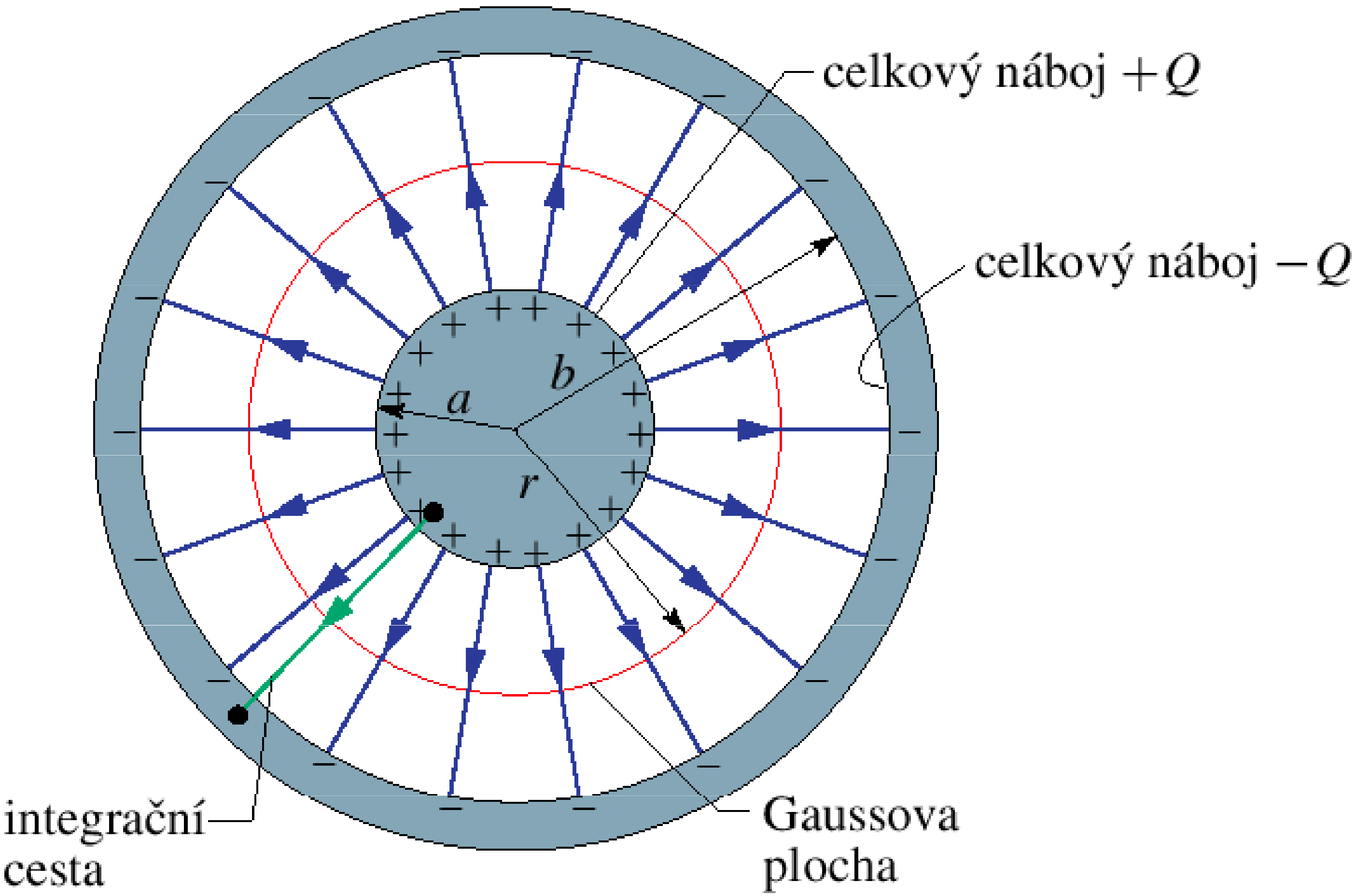


kapacita:

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

rozměr ε_0: F·m^{-1}

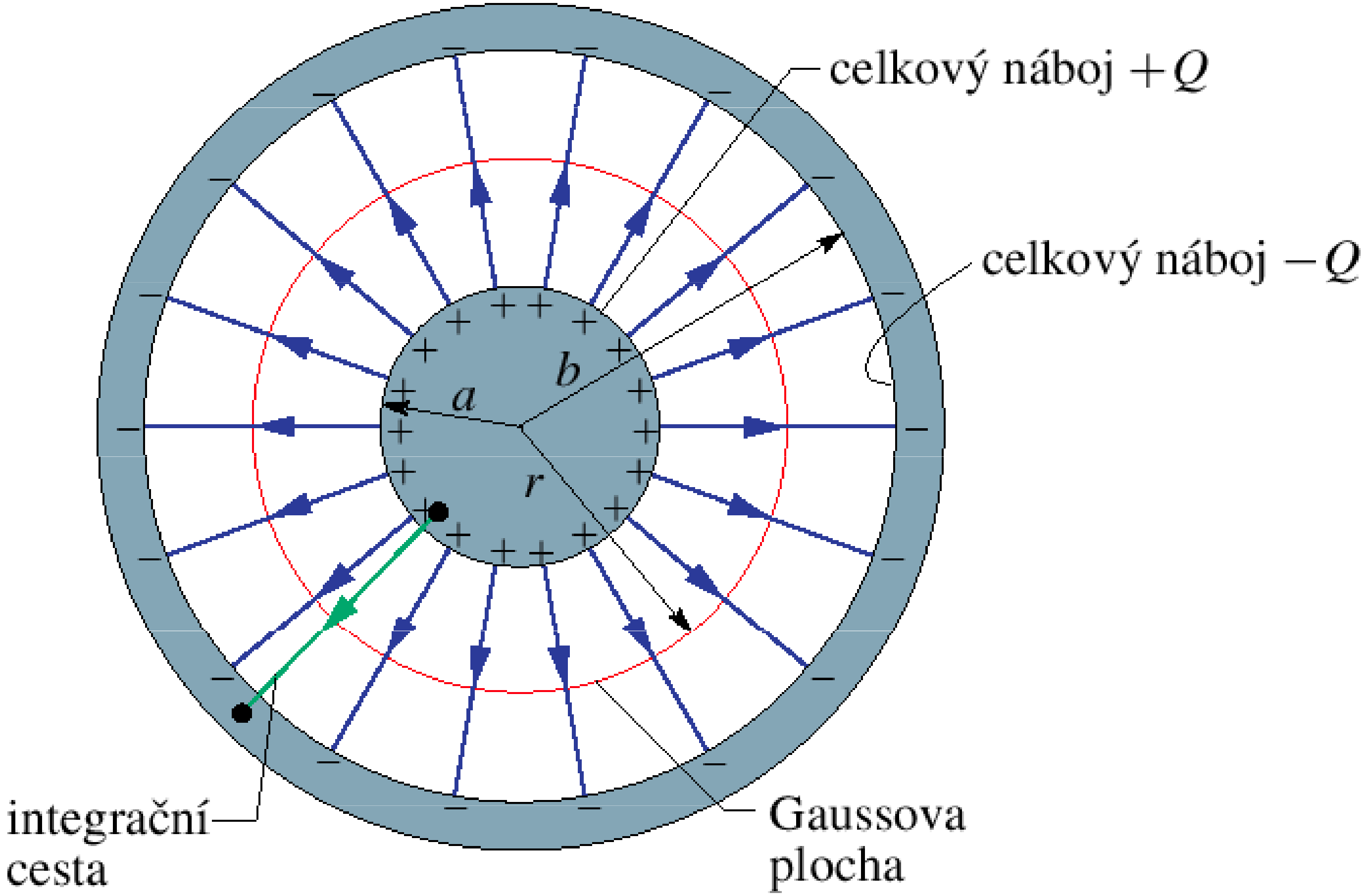
válcový kondenzátor



kapacita:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$

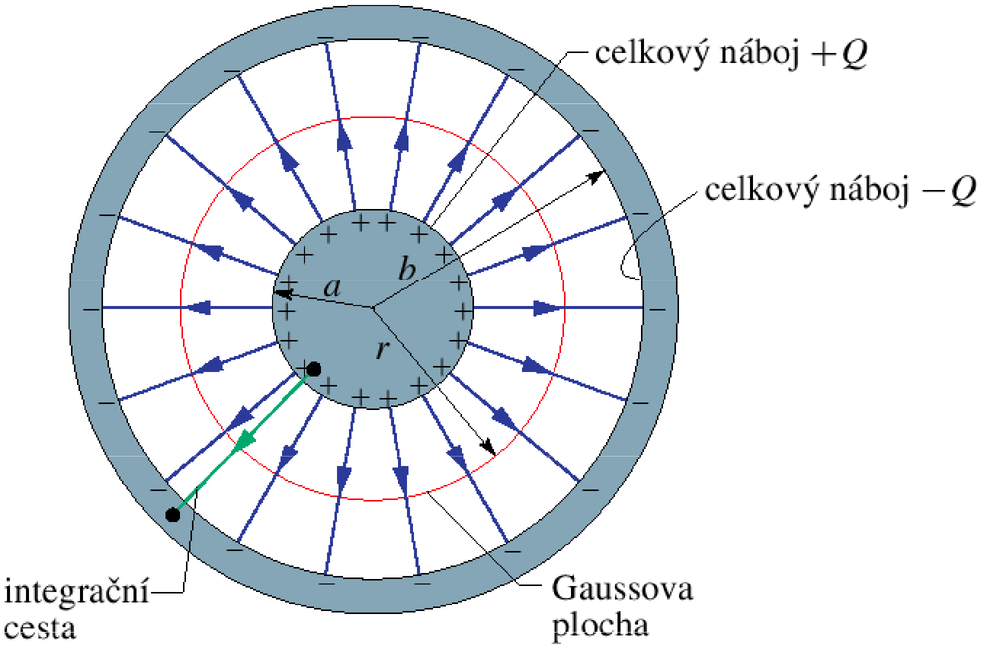
kulový kondenzátor



kapacita:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

vlastní kapacita osamocené koule



$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

$$a = R \quad b \to \infty$$

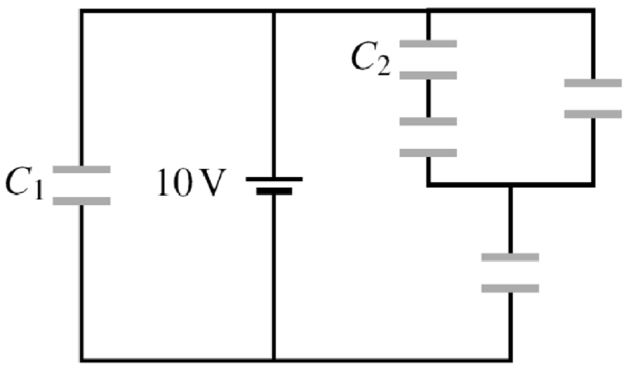
kapacita:

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

Příklady vlastní kapacity:

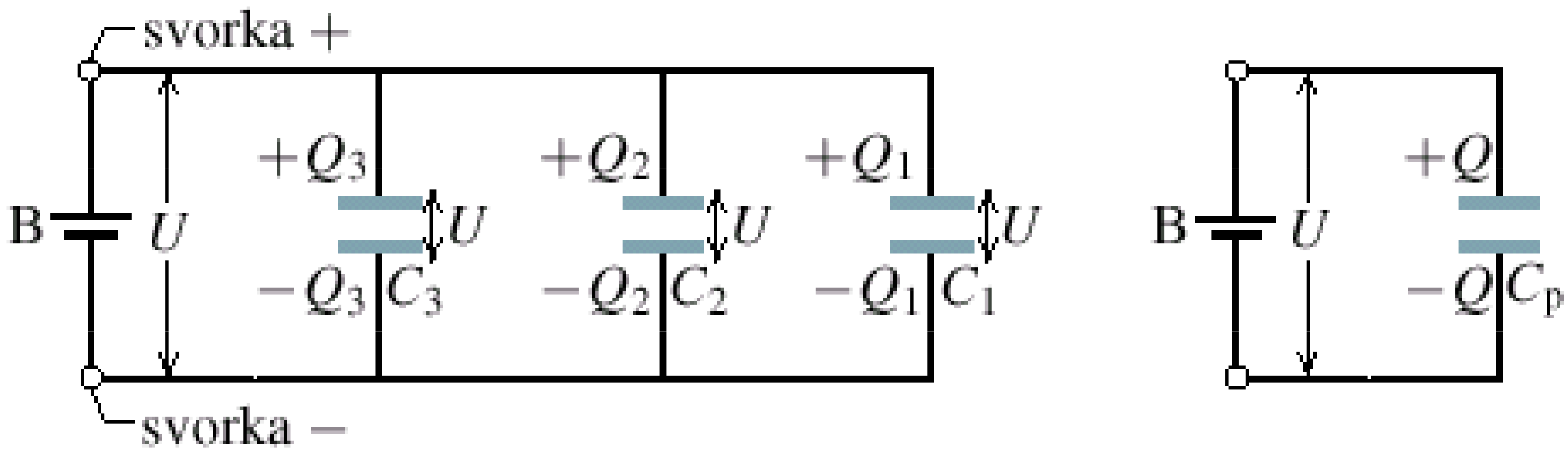
- horní elektroda van de Graaffova generátoru (typicky sféra o poloměru 20 cm): 20 pF
- planeta Země: okolo 710 μF

spojování kondenzátorů



paralelní spojení (vedle sebe)

Napětí na celé skupině kondenzátorů je **stejné**, jako napětí na každém z nich.

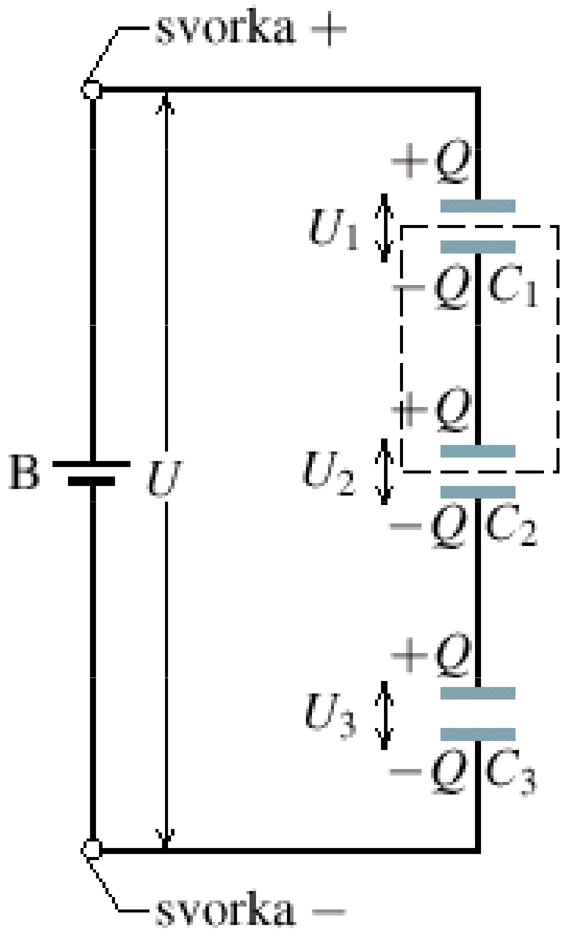


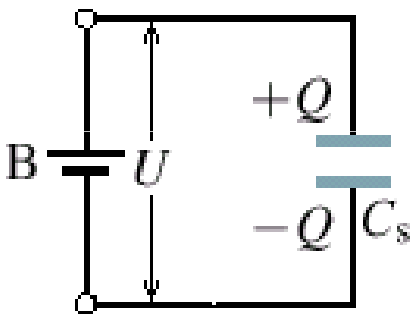
kapacita skupiny *n* kondenzátorů:

$$C_p = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

sériové spojení (za sebou)

Napětí na celé skupině kondenzátorů je rovno **součtu** napětí na jednotlivých kondenzátorech.

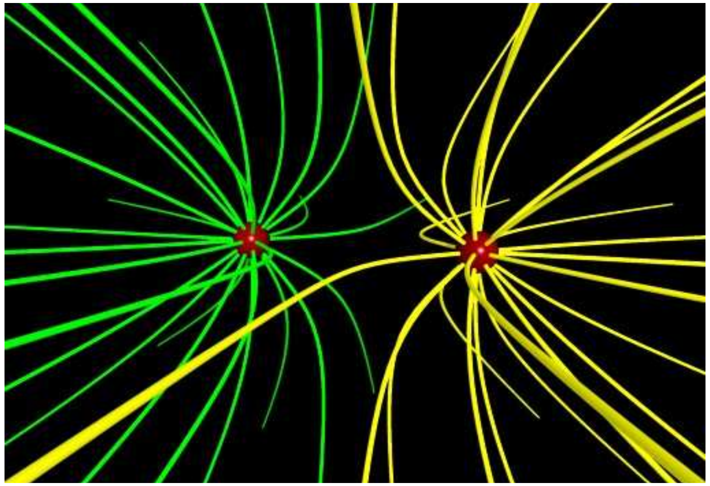




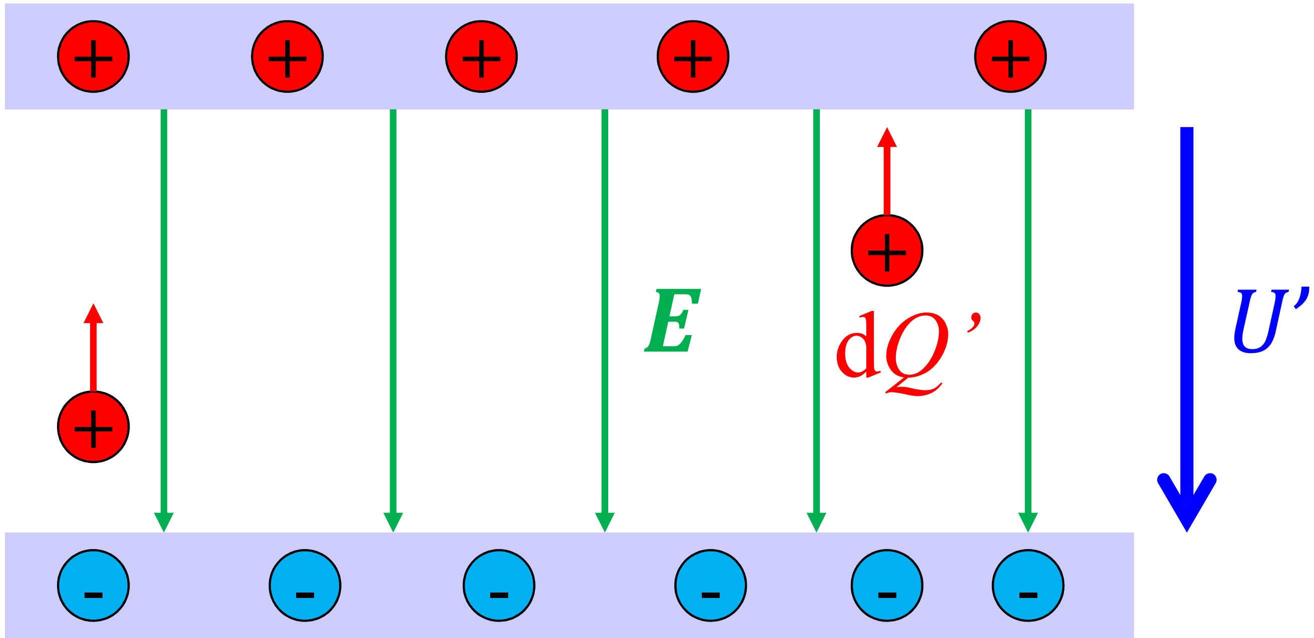
kapacita skupiny *n* kondenzátorů:

$$\frac{1}{C_p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$$

energie elektrického pole



práce na nabití kondenzátoru



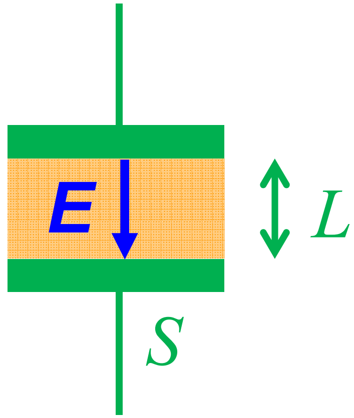
$$\mathrm{d}W_{ext} = U'\mathrm{d}Q' = \frac{Q'}{C}\mathrm{d}Q'$$

energie nabitého kondenzátoru:

$$W_{ext} = \int_0^Q \frac{Q'}{C}\mathrm{d}Q' = \boxed{\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = E_{el}}$$

kde je energie? v elektrickém poli.

deskový kondenzátor



$\varepsilon_0 ES$

EL

V

$$E_{el} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 ES)(EL) = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2\right)(SL)$$

hustota energie

$$\boxed{w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$$

energie soustavy nábojů vs. pole

elektrická potenciální energie soustavy nábojů

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i Q_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{Q_j}{r_{ij}}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\,\varphi_i$$

energie elektrického pole

$$E_{el} = \iiint w_{el}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint E^2\,\mathrm{d}V$$

Elektrostatická energie soustavy nábojů

$$(1) \qquad W = \frac{1}{2} \iint\limits_{(\infty)} \frac{\rho(1)\,\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\, dV_1\, dV_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{(\infty)} \rho(1)\,\varphi(1)\, dV_1$$

$$\varphi(1) = \int\limits_{(\infty)} \frac{\rho(2)\, dV_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

Energie pole

$$(2) \qquad W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int\limits_{(\infty)} \vec{E}\cdot\vec{E}\, dV$$

Důkaz, že z (1) plyne (2)

$$W = \frac{1}{2} \int\limits_{(\infty)} \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int\limits_{(\infty)} \varphi\, \Delta\varphi\, dV$$

$$\rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0\, \Delta\varphi(\vec{r})$$

$$\varphi\,\Delta\varphi \equiv \varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \dots \equiv$$

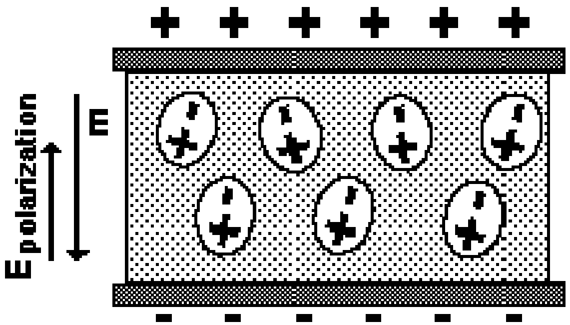
$$\equiv \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi) - (\operatorname{grad}\varphi)^2$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{(\infty)} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{(\infty)} \underline{\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)}\, dV$$

$$\int\limits_{V} \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)\, dV = \oint\limits_{S(V)} (\varphi \operatorname{grad}\varphi)\cdot\vec{n}\, dS$$

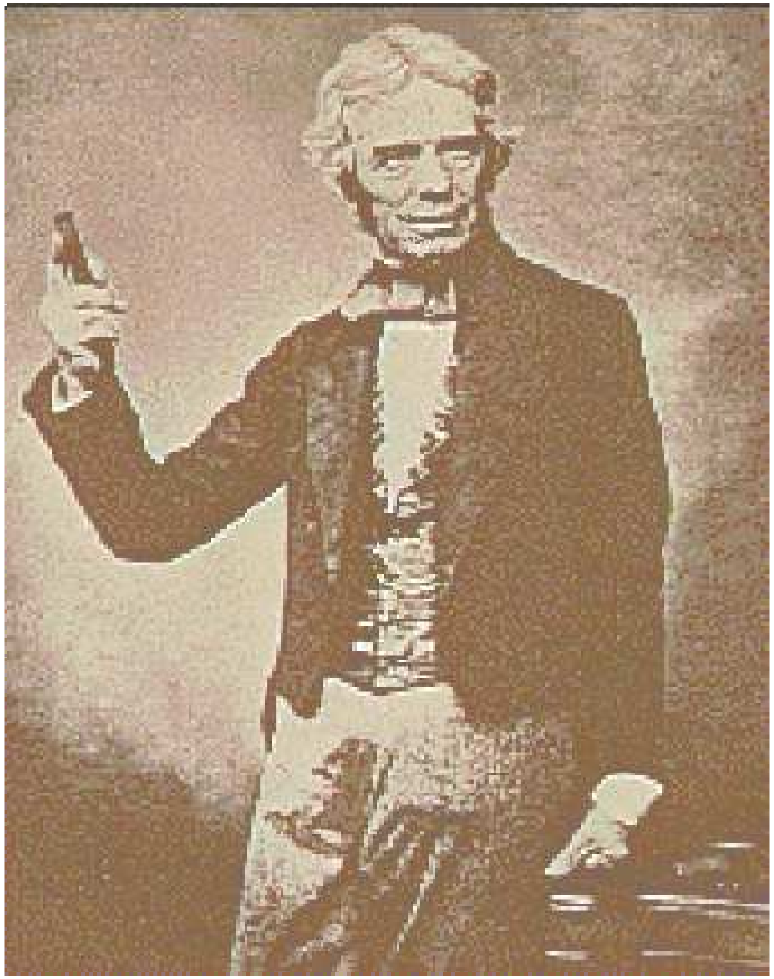
$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2\, dV, \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

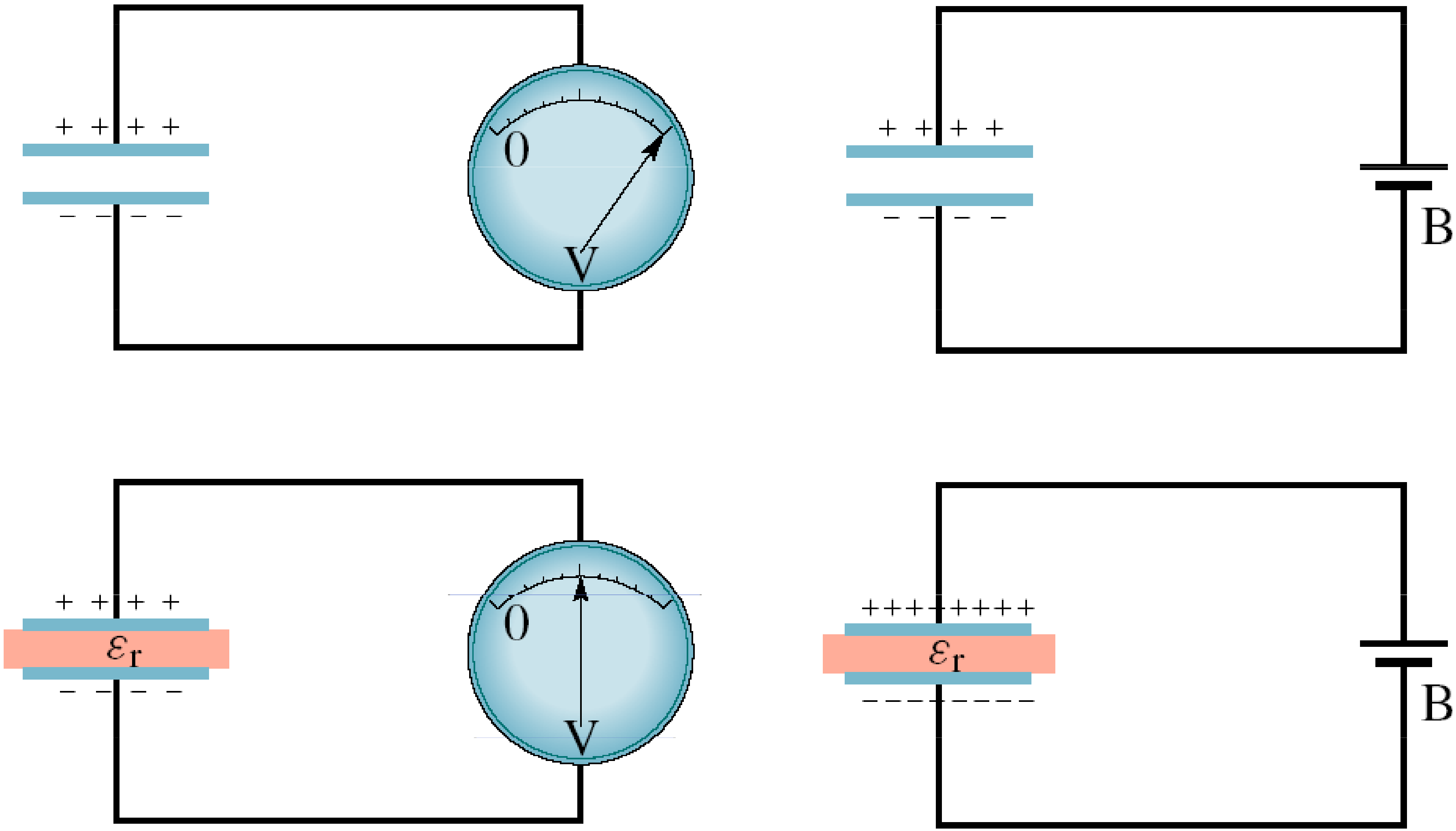
dielektrika



kondenzátor s dielektrikem

Michael Faraday
(1791 – 1867)

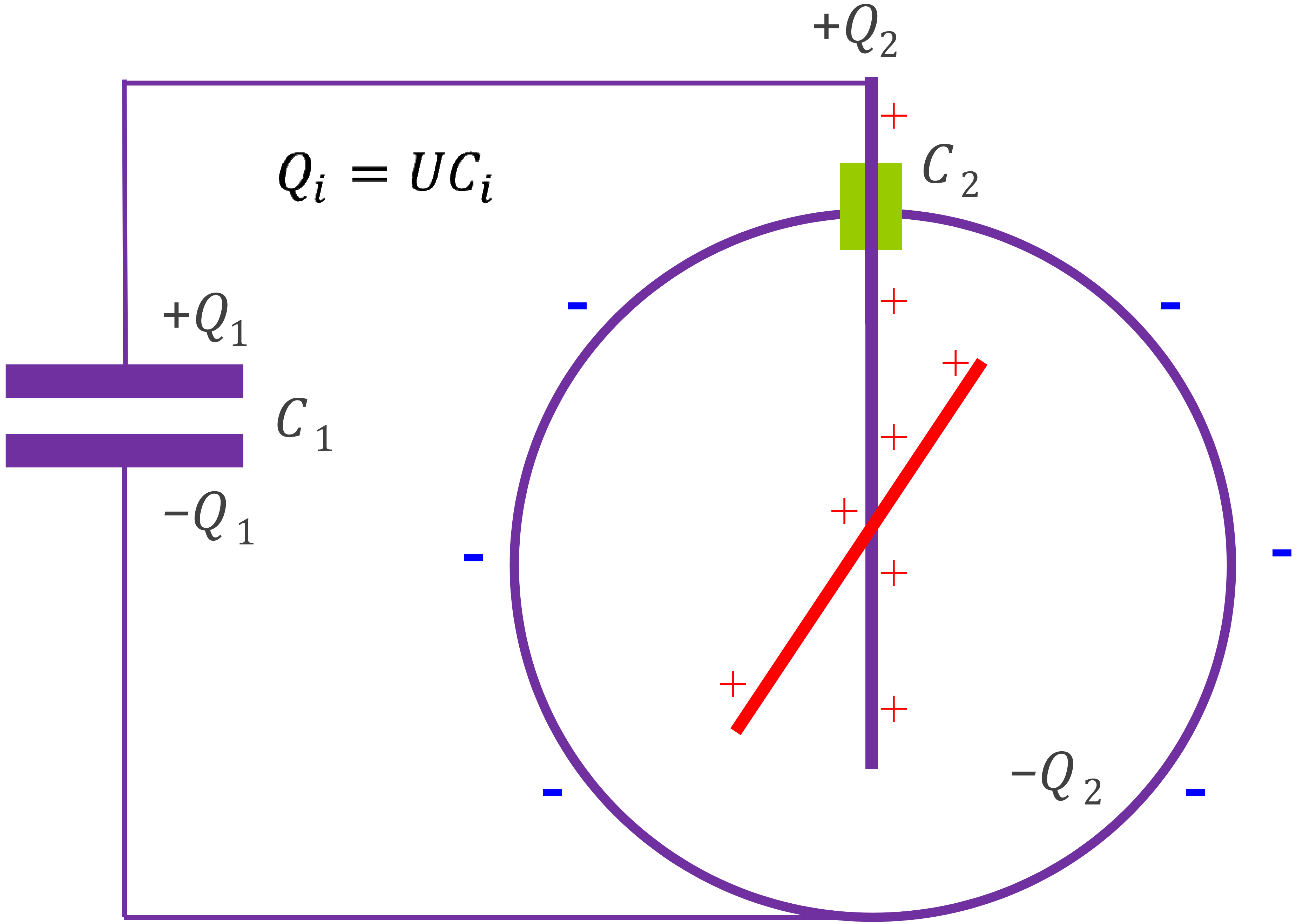




$Q = \text{konst.}$ $\qquad$ $U = \text{konst.}$

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 L = \varepsilon_r C_0$$

experiment



změna energie

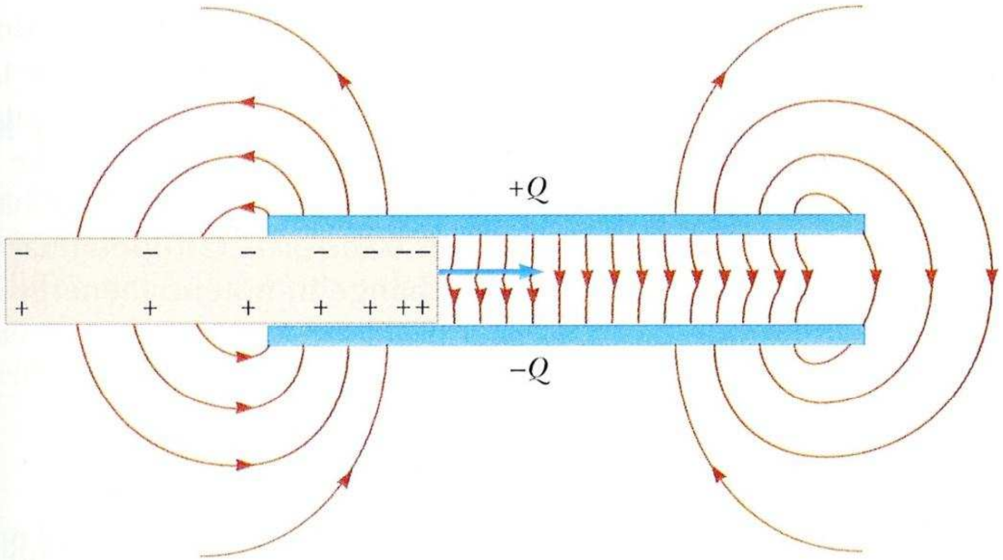


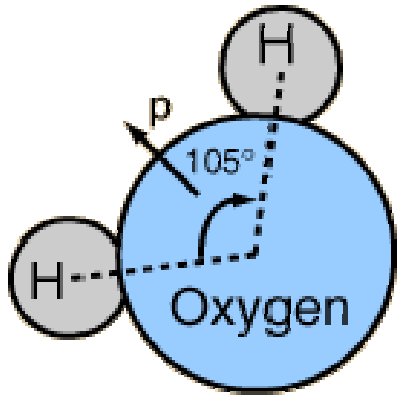
FIGURE 26.14 The nonuniform electric field near the edges of a parallel-plate capacitor causes a dielectric to be pulled into the capacitor. Note that the field acts on the induced surface charges on the dielectric that are nonuniformly distributed.

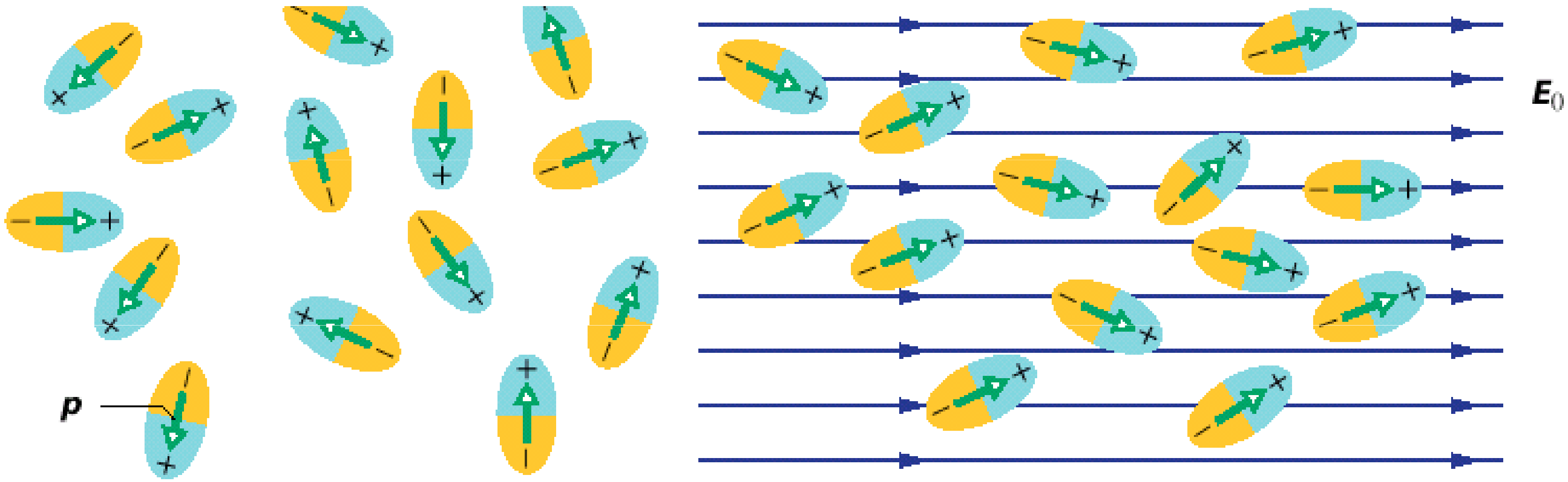
$$E_{el}(\varepsilon_r = 1) = \frac{Q^2}{2C} \longrightarrow E_{el}(\varepsilon_r > 1) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_r C} < E_{el}(\varepsilon_r = 1)$$

$$E_{el}(\varepsilon_r = 1) = \frac{1}{2}CU^2 \longrightarrow E_{el}(\varepsilon_r > 1) = \frac{1}{2}\varepsilon_r CU^2 > E_{el}(\varepsilon_r = 1)$$

polární dielektrika

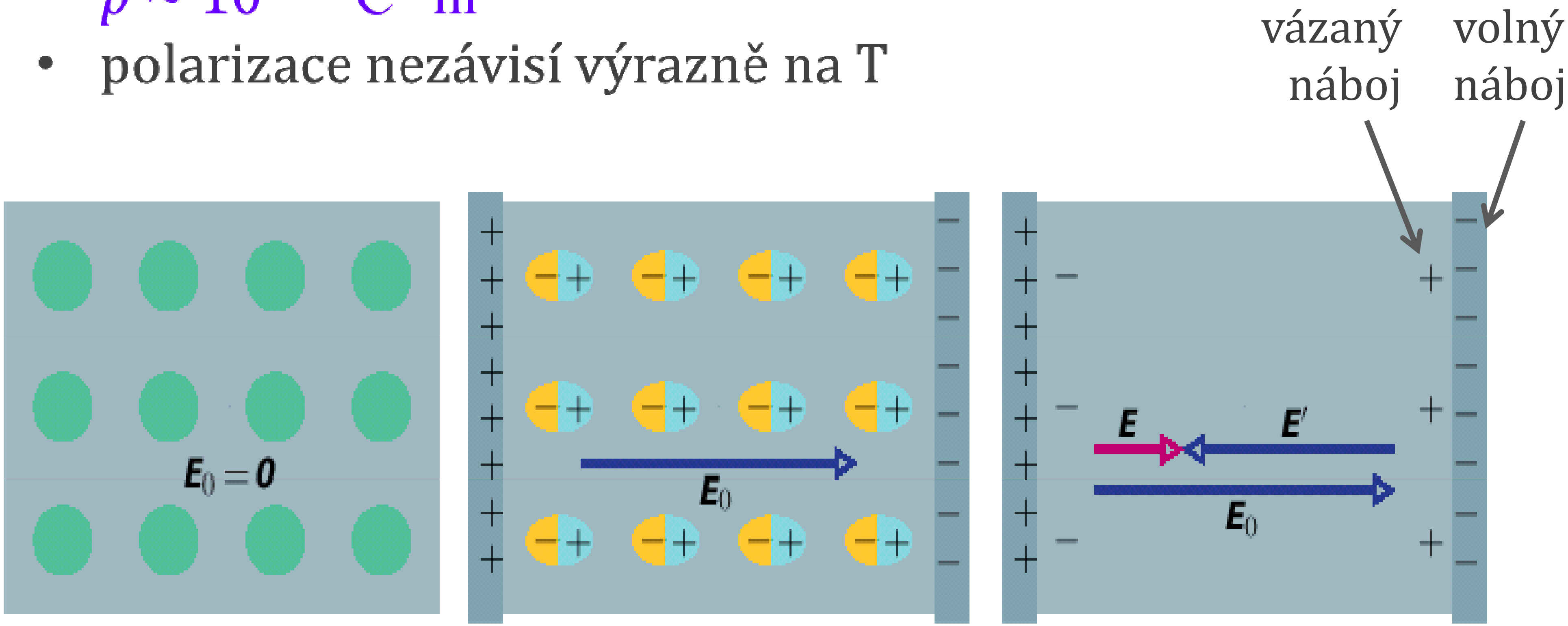
- orientační polarizace permanentních elektrických dipólů v látce (polárních molekul) ve vnějším elektrickém poli
- například HCl, H_2O: $p = 6{,}2 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C \cdot m}$
- tepelný pohyb narušuje uspořádání, polarizace závisí na $1/T$





nepolární dielektrika

- vychýlení kladného a záporného náboje v původně nepolárních atomech či molekulách ve vnějším elektrickém poli
- podstatně slabší efekt, než u polárních dielektrik: $p \sim 10^{-35}\,\mathrm{C \cdot m}$
- polarizace nezávisí výrazně na T



Tabulka 26.1 Některé vlastnosti dielektrik[a]

Materiál	ε_r	$\frac{E_{max}}{kV \cdot mm^{-1}}$
vzduch[b]	1,000 54	3
polystyren	2,6	24
papír	3,5	16
transformátorový olej	4,5	
pyrex (varné sklo)	4,7	14
slída	5,4	
porcelán	6,5	
křemík	12	
germanium	16	
ethanol	25	
voda (20 °C)	80,4	
voda (25 °C)	78,5	
titanová keramika	130	
titaničitan strontnatý	310	8

Pro vakuum je $\varepsilon_r = 1$.

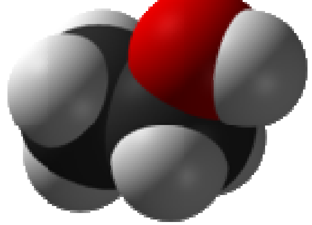
[a] měřeno při 20 °C, není-li uvedeno jinak

[b] za normálních podmínek

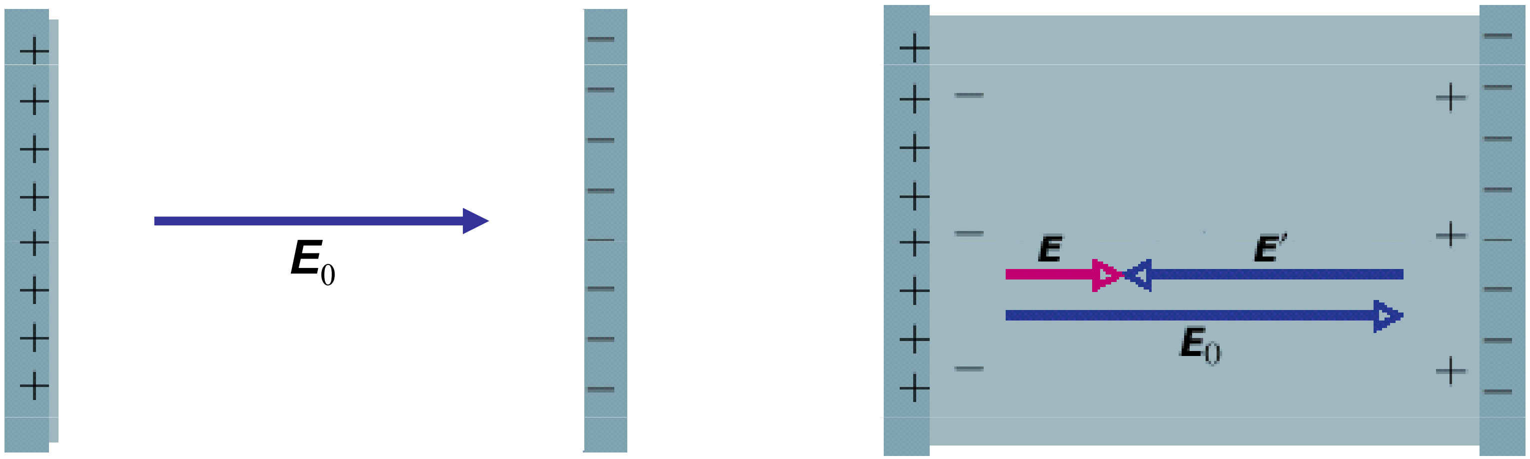
dielektrická pevnost

...při vysoké intenzitě pole dochází k ionizaci atomů

$p = 5{,}6 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C \cdot m}$



pole v dielektriku



$$U_0 = E_0 d > U = Ed = (E_0 - E')d$$

$$Q = U_0 C_0 = UC \quad \Rightarrow C = \frac{U_0}{U} C_0 = \frac{E_0}{E_0 - E'} C_0 = \varepsilon_r C_0$$

$$\Rightarrow \frac{E_0}{E_0 - E'} = \varepsilon_r = \frac{E_0}{E} \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_r E = E_0}$$

zákony elektrostatiky v dielektriku

V prostoru zcela vyplněném dielektrikem s relativní permitivitou ε_r platí i nadále všechny rovnice elektrostatiky vakua, pokud výraz ε_0 nahradíme výrazem $\varepsilon_0 \varepsilon_r$.

Bodový náboj vložený do (rozlehlého) dielektrika v něm tedy vytváří elektrické pole, jehož intenzita má velikost

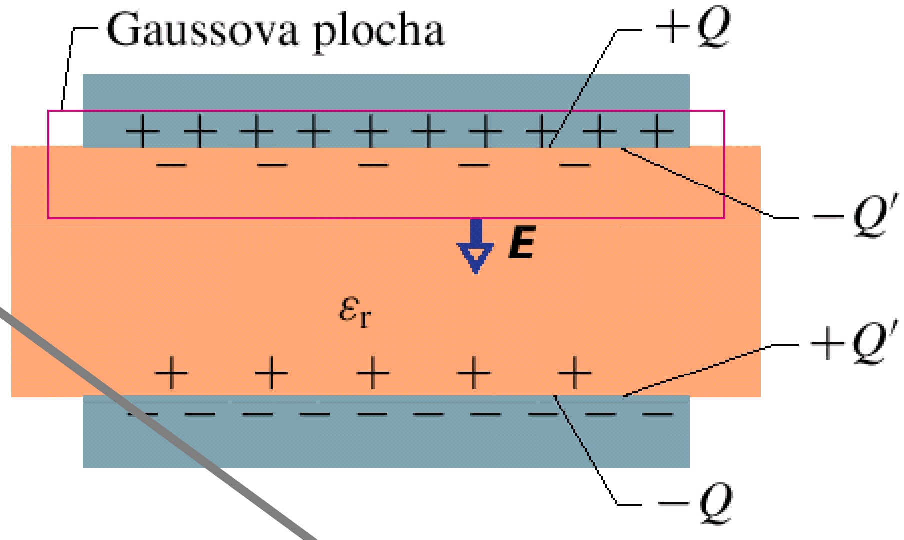
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Nad povrchem nabitého vodiče vloženého do dielektrika vzniká elektrické pole o intenzitě

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}.$$

Gaussův zákon pro dielektrikum

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 S = Q$$



$$\varepsilon_r \vec{E} = \vec{E}_0$$

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \varepsilon_0 \oiint_S \varepsilon_r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E S = Q$$

Gaussův zákon pro dielektrika (platí obecně):

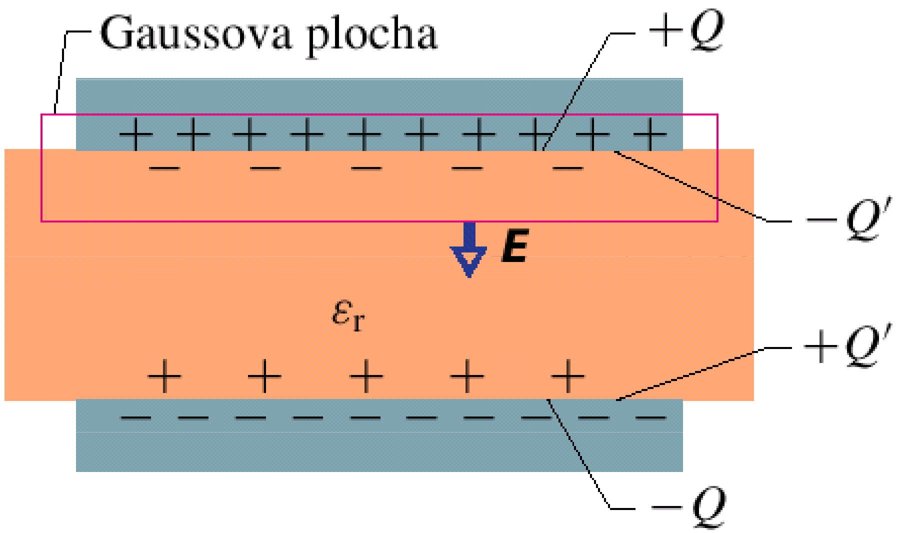
$$\varepsilon_0 \oiint_S \varepsilon_r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q$$

volný náboj

Gaussův zákon pro dielektrika (platí obecně):

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\left(\varepsilon_r \vec{E}\right) = \rho$$

vázaný náboj



$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E S = Q$$

volný náboj

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E S = Q - Q'$$

celkový náboj

vázaný náboj

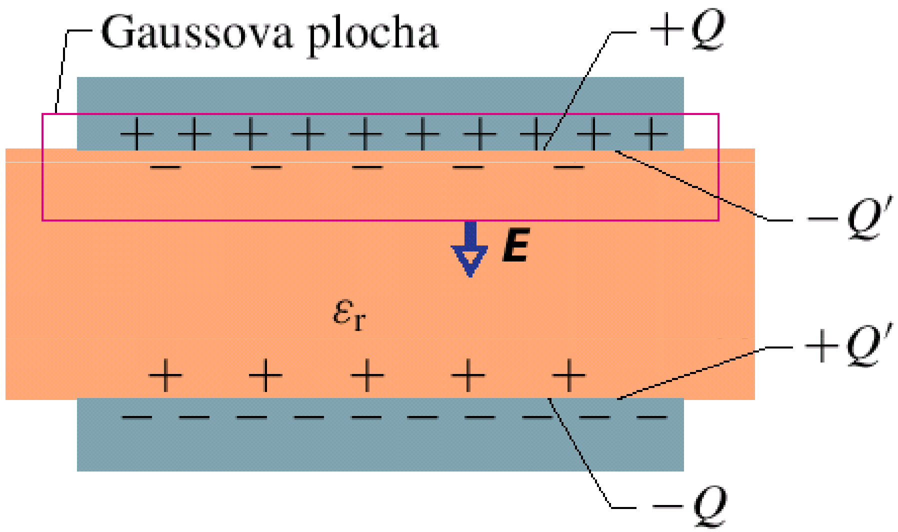
$$Q' = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

tři elektrické vektory

elektrická intenzita $\vec{E}$

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q - Q' = Q + Q_p$$

$$\varepsilon_0 \oiint_S \varepsilon_r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q$$



elektrická indukce $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q$$ (volný náboj)

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{div}\, \vec{P} = -\rho_p$$

elektrická polarizace $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$

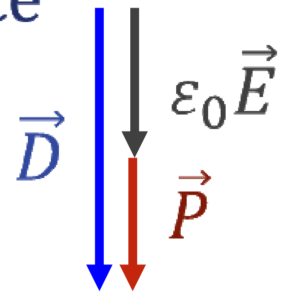
$$\oiint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \left(\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q - \left(Q + Q_p\right) = -Q_p$$

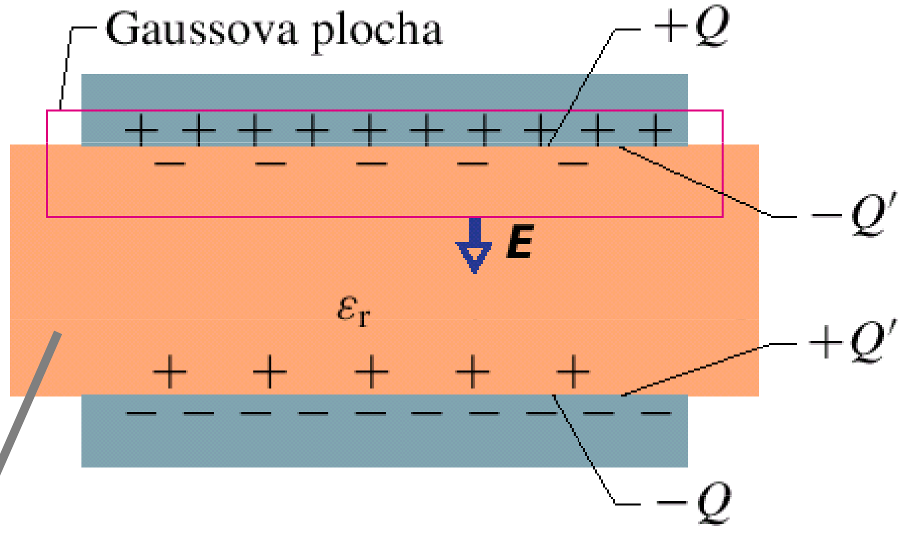
(vázaný náboj)

tři elektrické vektory

elektrická indukce

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$





$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

χ_e ... elektrická susceptibilita (lineární dielektrikum)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

elektrická polarizace

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i}$$

$$P = \frac{\sigma_p SL}{SL} = \sigma_p \qquad \oiint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\sigma_p S = -Q_p$$

na rozhraní dielektrik

ε_{r1} | ε_{r2}

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

(žádný volný náboj)

$\Rightarrow D_{n1} = D_{n2}$
$\varepsilon_{r1}E_{n1} = \varepsilon_{r2}E_{n2}$
(normálové složky $\vec{D}, \vec{E}$)

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

(nevírové pole)

$\Rightarrow E_{t1} = E_{t2}$
(tečné složky $\vec{E}$)

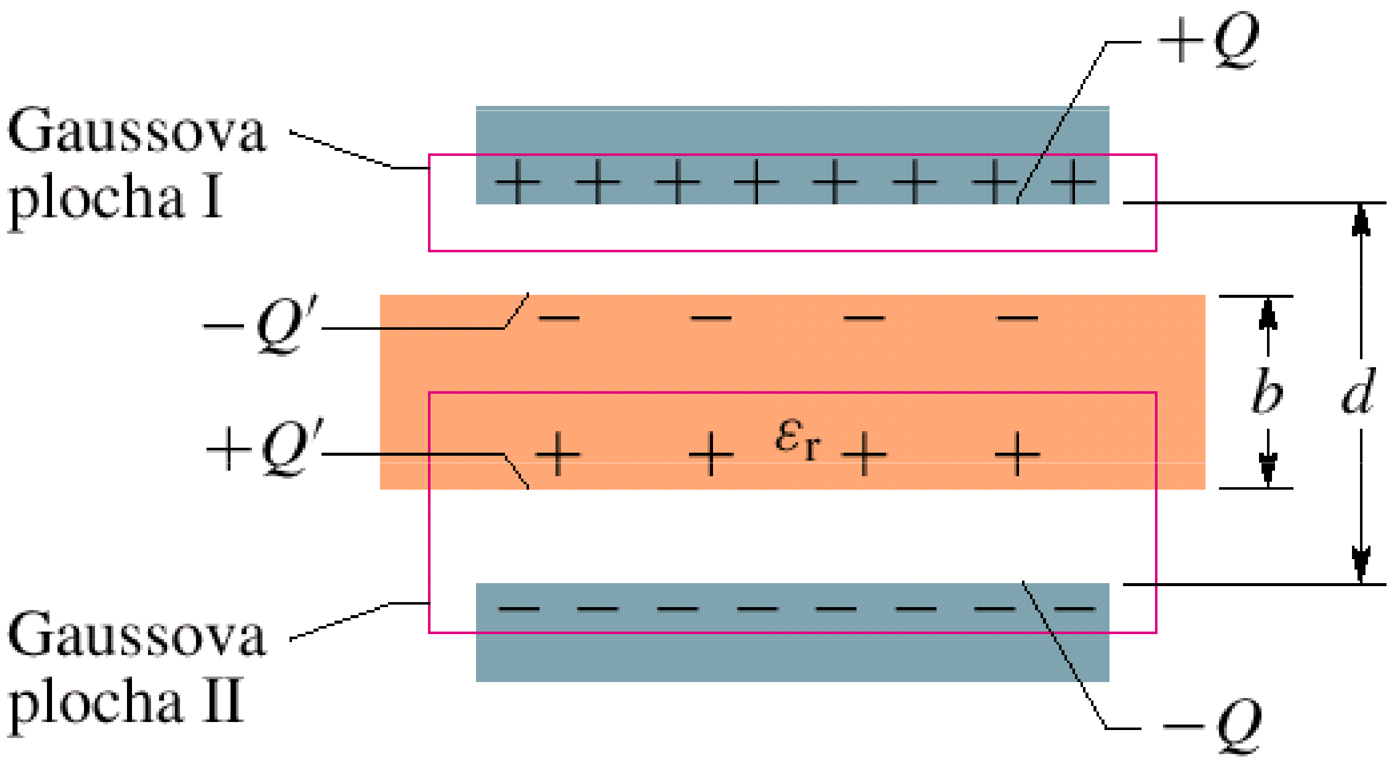
Three Electric Vectors

Name	Symbol	Associated with	Boundary Condition
Electric field strength	**E**	All charges	Tangential component continuous
Electric displacement	**D**	Free charges only	Normal component continuous
Polarization (electric dipole moment per unit volume)	**P**	Polarization charges only	Vanishes in a vacuum

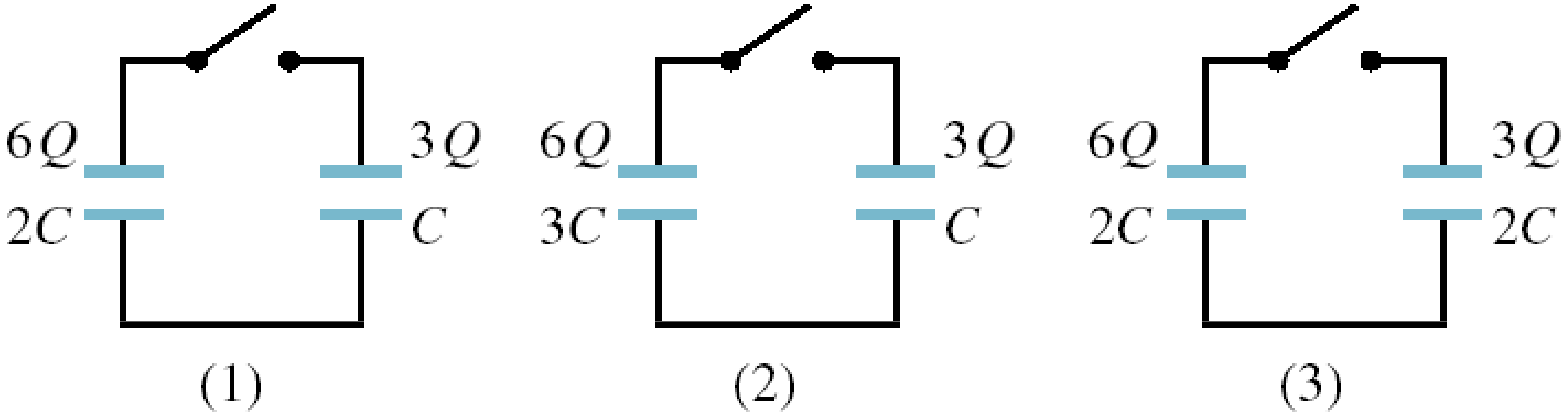
Defining equation for **E**	$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$	Eq. 27–2
General relation among the three vectors	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$	Eq. 30–21
Gauss's law when dielectric media are present	$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q$ (q = free charge only)	Eq. 30–24
Empirical relations for certain dielectric materials *	$\mathbf{D} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E}$ $\mathbf{P} = (\kappa - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$	Eq. 30–22 Eq. 30–23

PŘÍKLAD 26.8

Obr. 26.16 znázorňuje deskový kondenzátor s elektrodami o obsahu S, které jsou ve vzdálenosti d. Na elektrodách je napětí U_0. Po nabití kondenzátoru byla baterie odpojena a mezi elektrody byla vsunuta deska z dielektrika tloušťky b o relativní permitivitě ε_r tak, jak je znázorněno na obr. 26.16. Uvažujme hodnoty $S = 115\,\mathrm{cm}^2$, $d = 1{,}24\,\mathrm{cm}$, $U_0 = 85{,}5\,\mathrm{V}$, $b = 0{,}780\,\mathrm{cm}$, $\varepsilon_r = 2{,}61$.

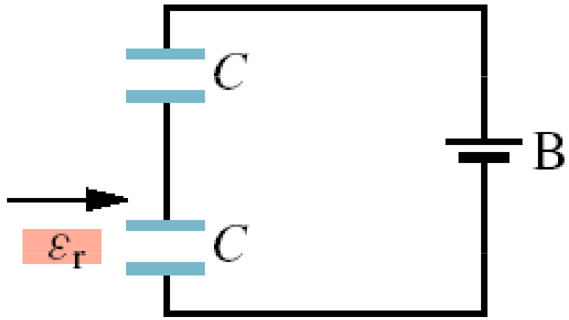


13. Na obr. 26.21 jsou tři obvody, z nichž každý obsahuje spínač a dva kondenzátory, které jsou na počátku nabité tak, jak je znázorněno. Ve kterém z těchto obvodů náboj na levém kondenzátoru po sepnutí spínače (a) vzroste, (b) klesne, (c) zůstane beze změny?



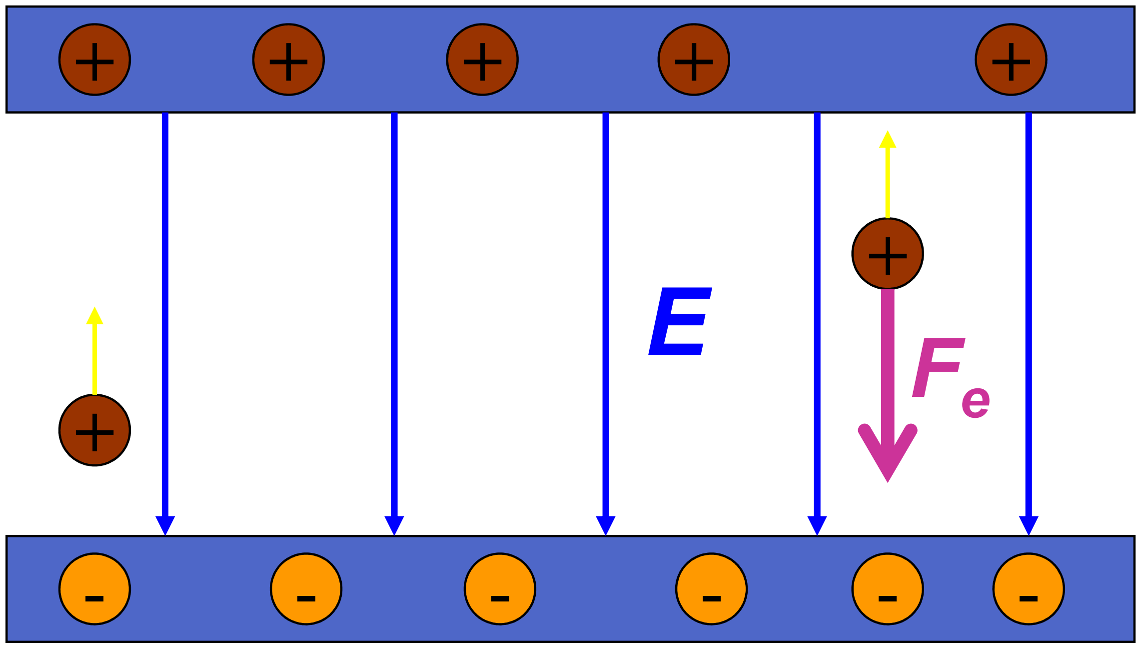
Obr. 26.21 Otázka 13

16. Deska dielektrika je vsunuta mezi elektrody jednoho ze dvou stejných kondenzátorů (obr. 26.22). Rozhodněte, zda se hodnoty níže uvedených veličin tohoto kondenzátoru zvětší, zmenší, či zda se nezmění: (a) kapacity, (b) náboje, (c) napětí, (d) elektrické energie. (e) Jak budou znít odpovědi na tytéž otázky pro druhý kondenzátor?



Obr. 26.22 Otázka 16

Nabíjení kondenzátoru



$$E = \frac{Q'}{\varepsilon_0 S}$$

$$\mathrm{d}W_{ext} = \left(\mathrm{d}Q' E\right) L$$

Mechanická práce při nabíjení kondenzátoru

$$W_{\mathrm{ext}} = \frac{L}{\varepsilon_0 S}\int_0^Q Q'\,\mathrm{d}Q' = \frac{1}{2}\frac{L}{\varepsilon_0 S}Q^2$$

Energie kondenzátoru

$$E_{\mathrm{el}} = W_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}\overset{1/C}{\frac{L}{\varepsilon_0 S}}Q^2 = \frac{Q^2}{2C}$$