

letní semestr 2011- 2012

F4110

Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2011- 2012

F4110 Kvantová fyzika atomárních soustav

Přírodovědecká fakulta

jaro 2012

Rozsah

2/1. 4 kr. (příf plus uk plus > 4). Ukončení: zk.

Vyučující

prof. Bedřich Velický, CSc. (přednášející)

Garance

prof. RNDr. Michal Lenc, Ph.D.

Rozvrh

St 13:00--13:50 **F3** St 14:00--15:50 **F3**

Předpoklady

(F1040 Mechanika a molekulová fyzika && F2070 Elektřina a magnetismus)

| (F1030 Mechanika a molekulová fyzika && F2050 Elektřina a magnetismus)

Anotace

Tento kurs je pojat jako proseminář doplňující přednášky

Úvod do fyziky mikrosvěta F4100 nebo F4050.

F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2011- 2012

Přednášející
Bedřich Velický ÚTFA
velicky@karlov.mff.cuni.cz

F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2011- 2012

Přednášející
Bedřich Velický ÚTFA
velicky@karlov.mff.cuni.cz

- Prosím e-mailovou korespondenci vést na tuto adresu

F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2011- 2012

Rozvrh

St 13:00--13:50 F3 cvičení

St 14:00--15:50 F3 přednáška

F4110**Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2011- 2012
PLÁNOVANÉ PŘEDNÁŠKY**

1	Měřítka kvantového světa	29. 2.
2	Brownův pohyb	7. 3.
3	Langevinova rovnice pro Brownův pohyb	14. 3.
4	Elektronová optika	21. 3.
5	Synchrotronové záření v kosmu a na Zemi	28. 3.
6	Neutronová interference	4. 4.
7	Kvantová interferometrie (II. část)	11. 4.
8	Jev Bohma a Aharonova	18. 4.
9	Vibrace v polyatomických molekulách	25. 4.
10	Molekulové vibrace a skleníkový jev	2. 5.
11	Inversní linie čpavku: Sláva a pád	9. 5.
12	Fyzika nízkých a extrémně nízkých teplot	16. 5.
13	Studené atomy: BE kondensace	23. 5.

F4110

**Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2011- 2012**

PODMÍNKY PRO VYKONÁNÍ ZKOUŠKY

Podmínky

1. Úspěšné vykonání písemného testu na posledním cvičení nebo jednom ze zápočtových termínů
2. Forma zkoušky: Zpracování a seminární přednesení dílčí otázky k některému z přednesených témat po dohodě s přednášejícím

Termíny

Termíny zkoušky budou

- vyhlášeny na poslední přednášce a
- vystaveny na SIS

Úvodem

- Dnes: čekám, až trochu postoupí hlavní přednášky
- Odvolám se na znalosti středoškolské a z předchozí části Kursu
- Cíl ... orientace v nepřehledné oblasti atomárních soustav
- Fundamentální konstanty a zavedení přirozených jednotek
- Rozměrové a jiné kvalitativní úvahy
- Zamyšlení nad Bičákovým diagramem velikostí a hmotností objektů

Klasický a kvantový svět

vs.

mikrosvět a makrosvět

Klasický a kvantový svět

Kvantové zákony ovládají titěrné mikroobjekty,
jako jsou atomy a molekuly.

V každodenním životě však kvantové efekty
zpravidla nepozorujeme.

Kde je rozhraní obou světů a jak je můžeme
rozpoznat a charakterisovat?

Klasický a kvantový svět

Kvantové zákony ovládají titěrné mikroobjekty,
jako jsou atomy a molekuly.

V každodenním životě však kvantové efekty
zpravidla nepozorujeme.

Kde je rozhraní obou světů a jak je můžeme
rozpoznat a charakterisovat?

Moje stará formulace

Nový pokus

odpovídající na kritiku se strany filosofů

Makrosvět a mikrosvět spolutvoří svět fyziky.

Makrosvět se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence podsunout jej za přirozený svět.

Mikrosvět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly. Přirozenému světu je cizí.

Nový pokus

Makrosvět a mikrosvět spolutvoří svět fyziky.

Makrosvět se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence podsunout jej za přirozený svět.

Mikrosvět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly. Přirozenému světu je cizí.

Nový pokus

Makrosvět a mikrosvět spolutvoří svět fyziky.

Makrosvět se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence podsunout jej za přirozený svět.

Mikrosvět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly. Přirozenému světu je cizí.

Nový pokus

Makrosvět a mikrosvět spolutvoří svět fyziky.

Makrosvět se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence podsunout jej za přirozený svět.

Mikrosvět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly. Přirozenému světu je cizí.

Nový pokus

Makrosvět a mikrosvět spolutvoří svět fyziky.

Makrosvět se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence podsunout jej za přirozený svět.

Mikrosvět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly. Přirozenému světu je cizí.

Umíme však rozmezí těchto různých světů přesně rozpoznat a charakterisovat?

Fyzikální svět a přirozený svět

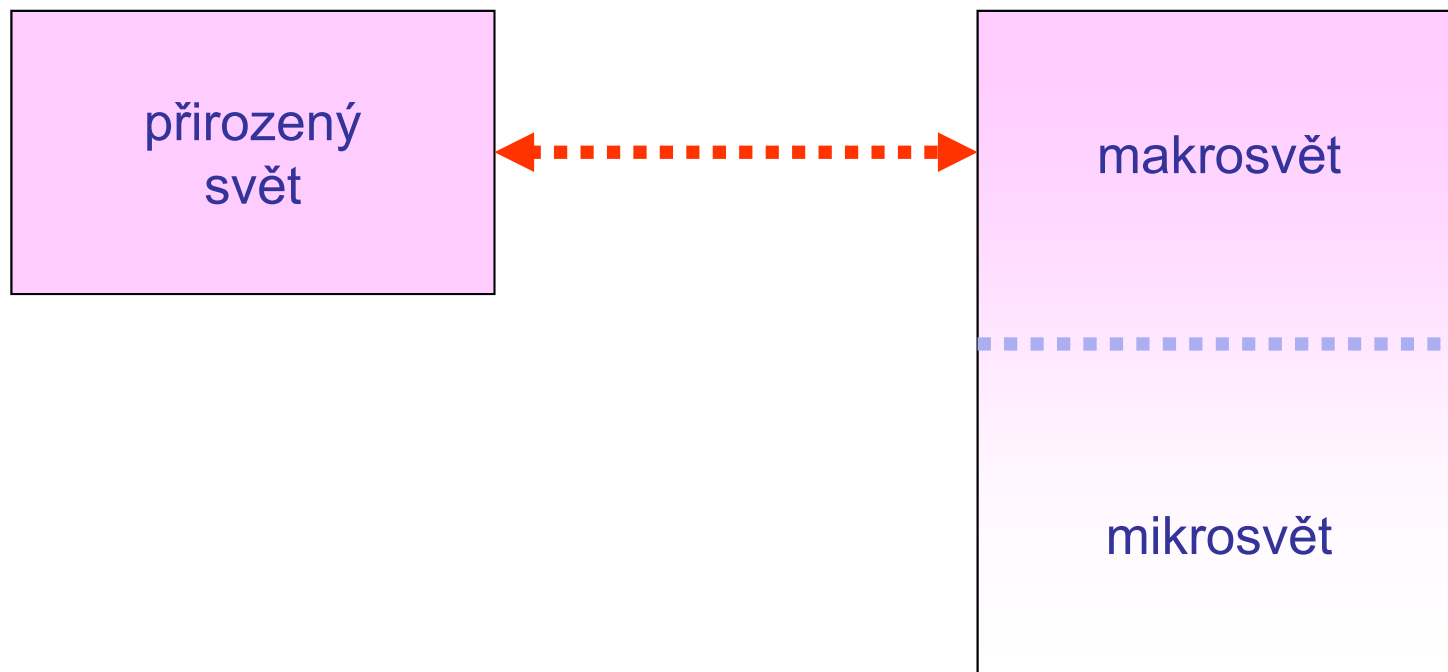
přirozený
svět

fyzikální
svět

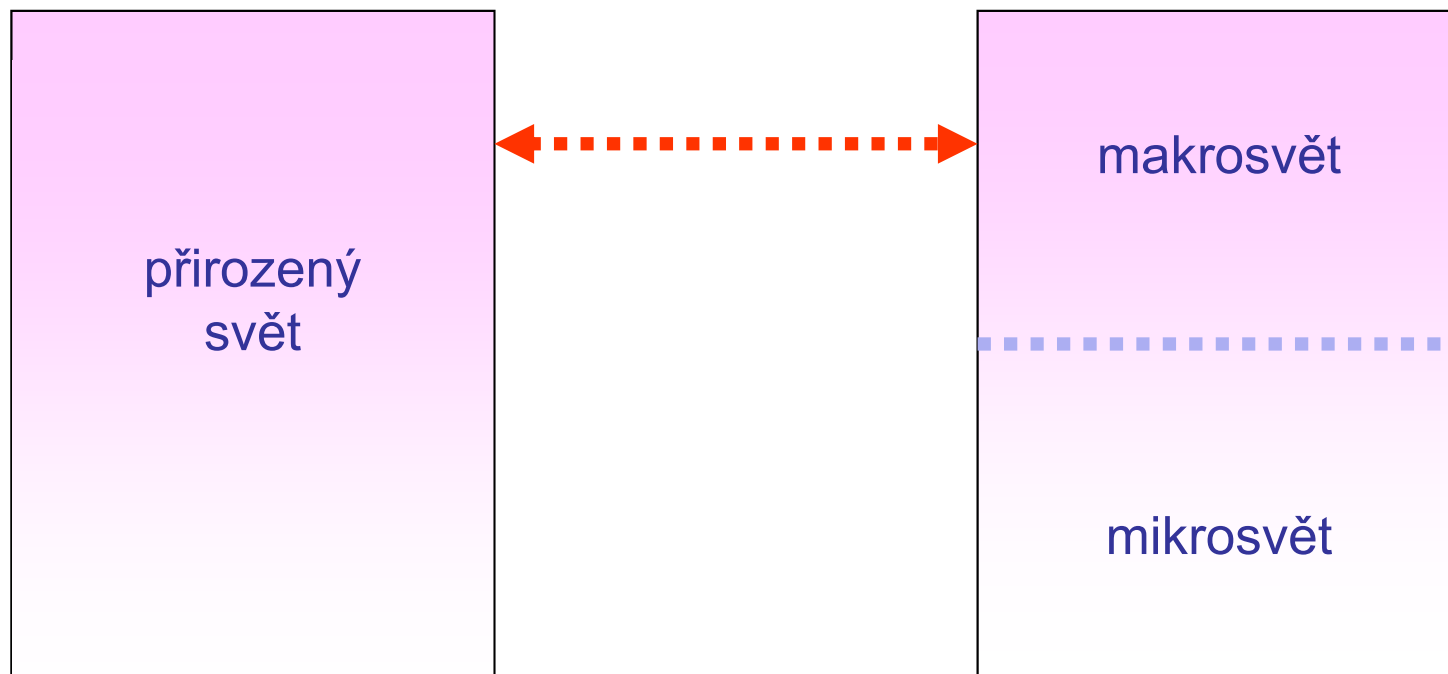
Fyzikální svět a přirozený svět



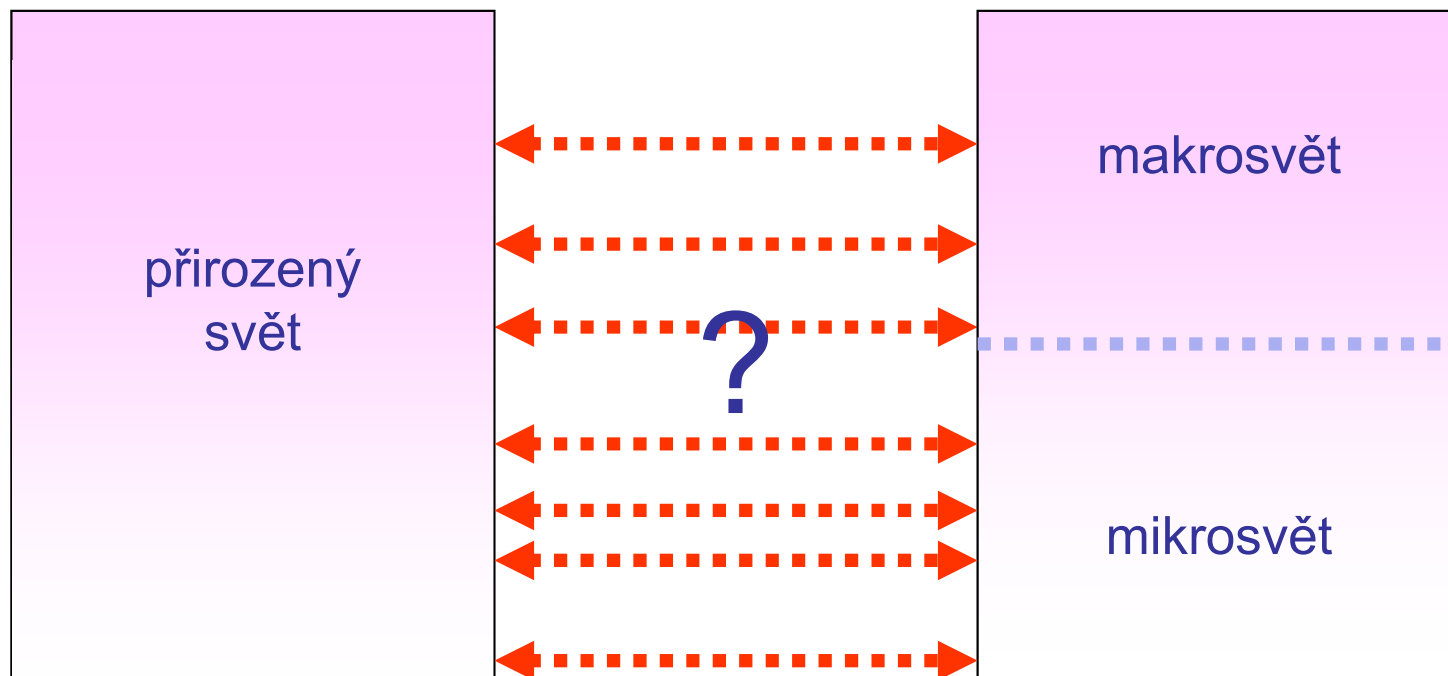
Fyzikální svět = Makrosvět + Mikrosvět



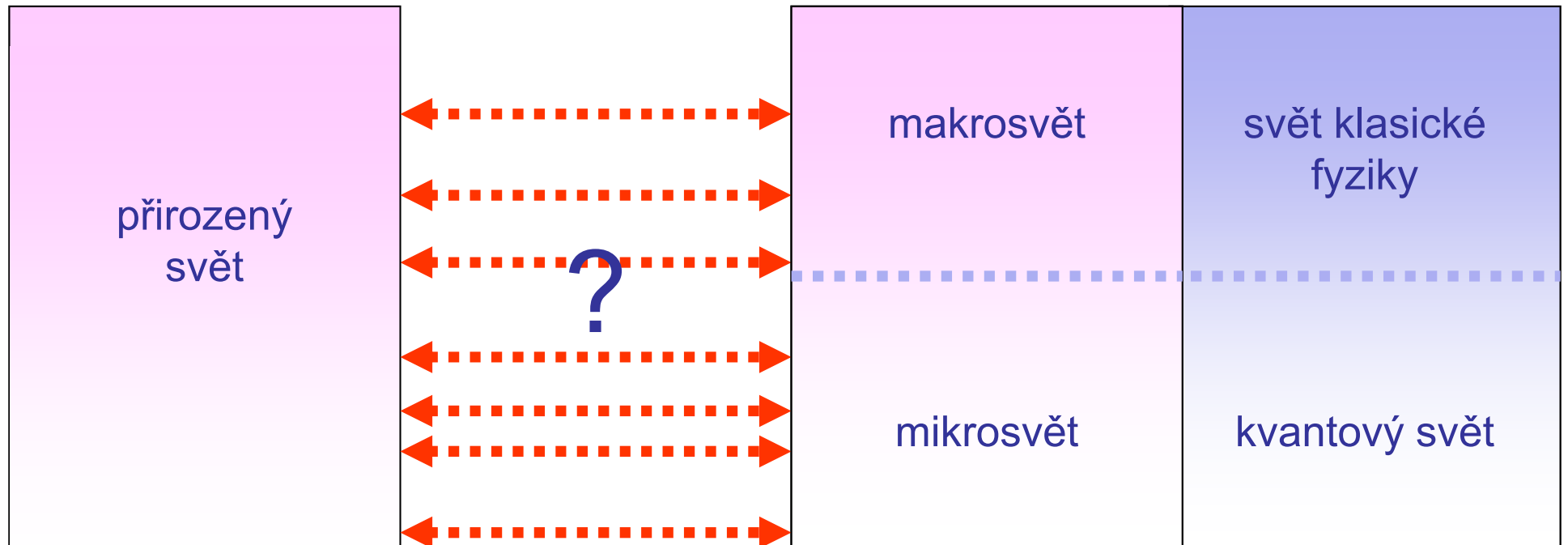
Mikrosvět proniká do přirozeného světa



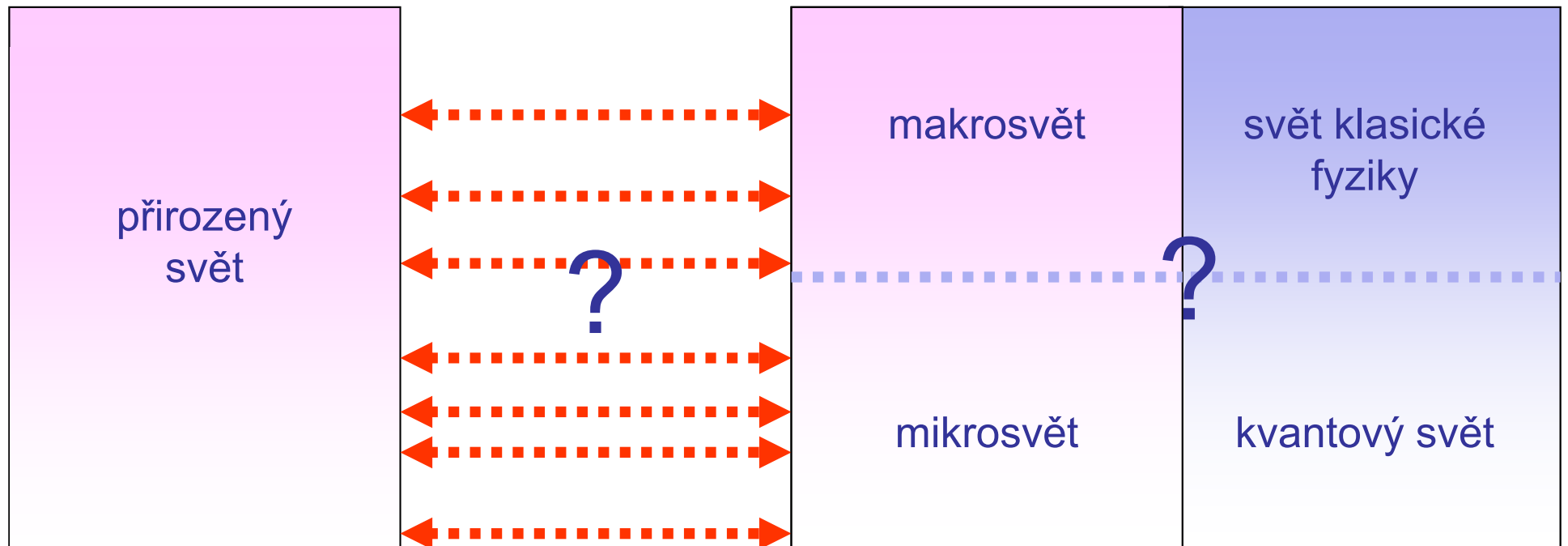
Mikrosvět proniká do přirozeného světa



Makrosvět + Mikrosvět vs. Klasický svět + Kvantový svět

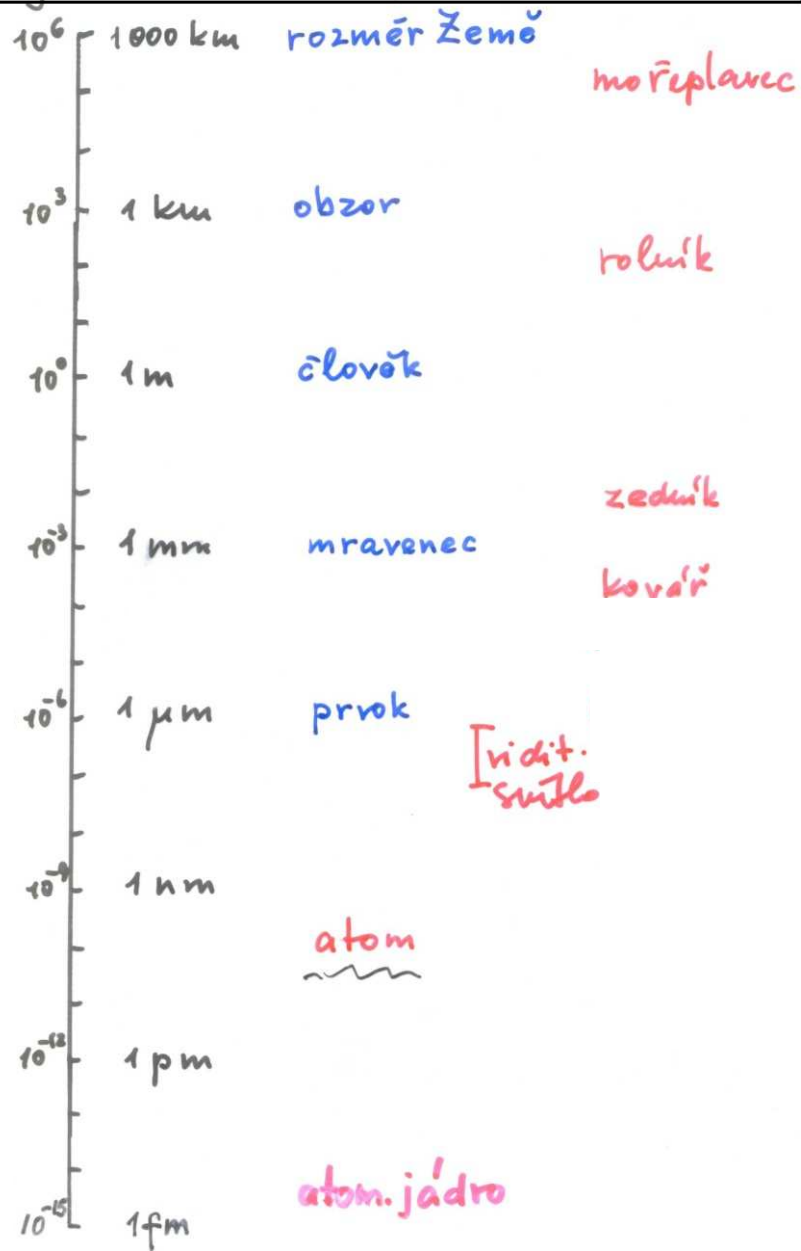


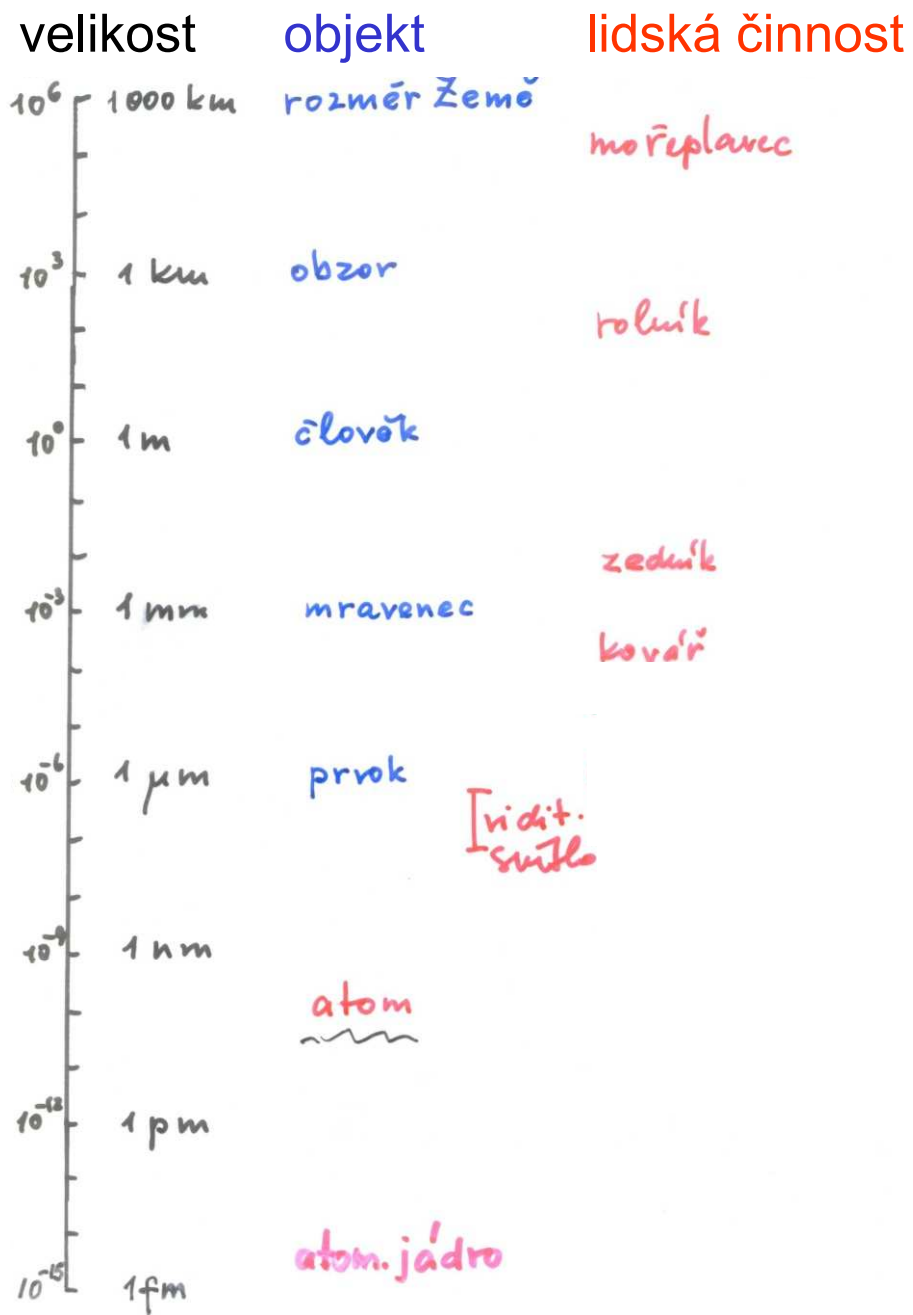
Makrosvět + Mikrosvět vs. Klasický svět + Kvantový svět



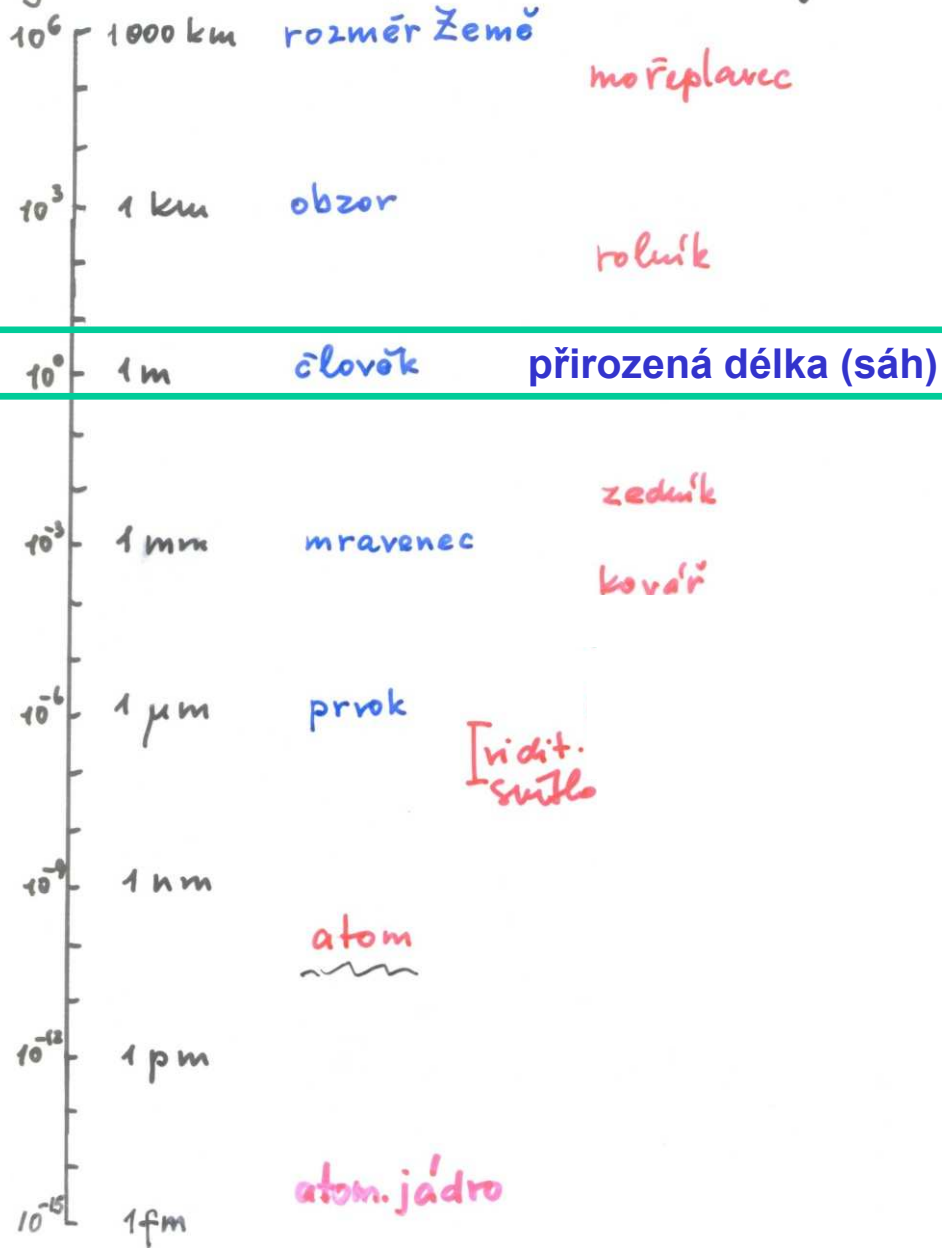
ne tak docela!!

Logaritmická škála velikosti objektů

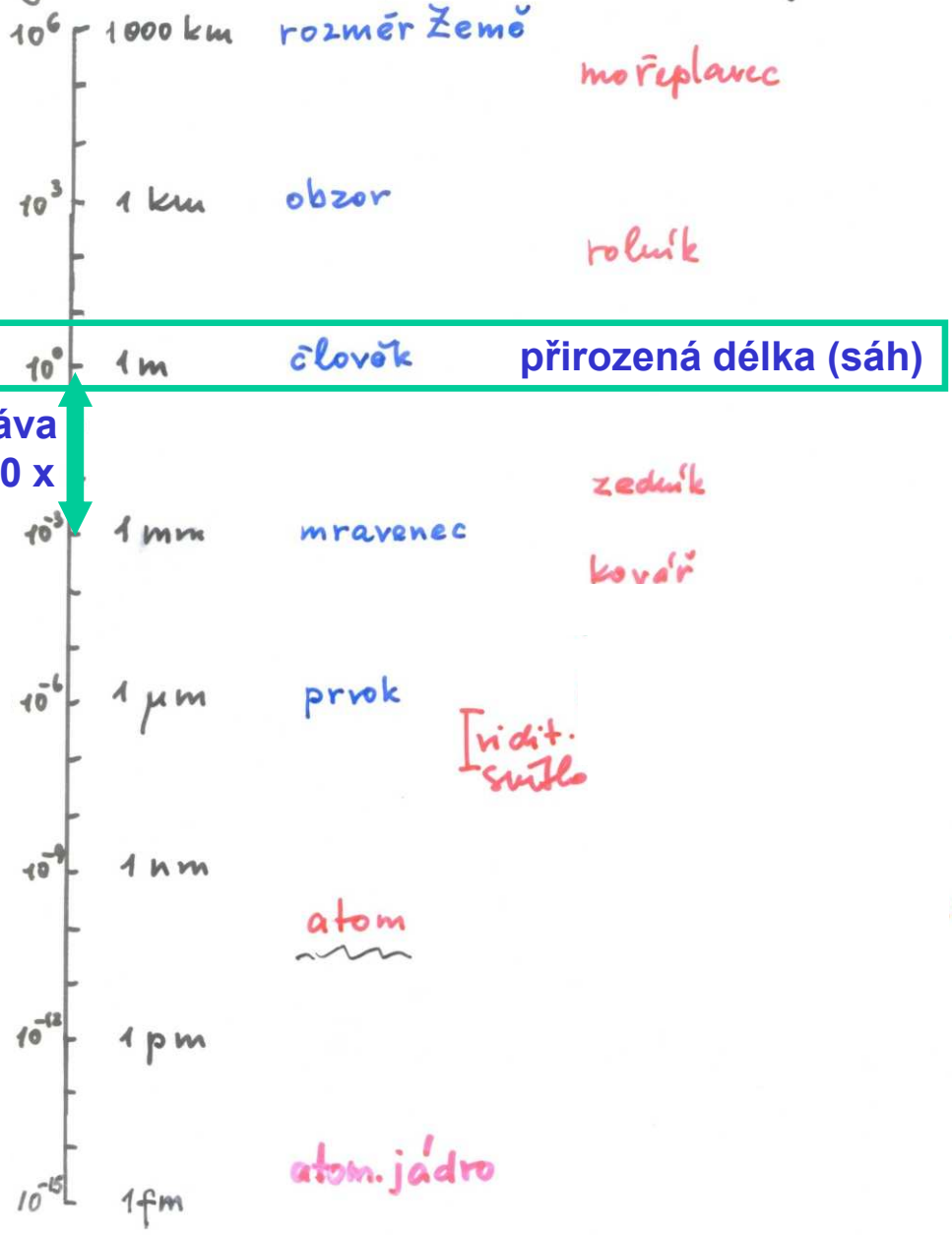




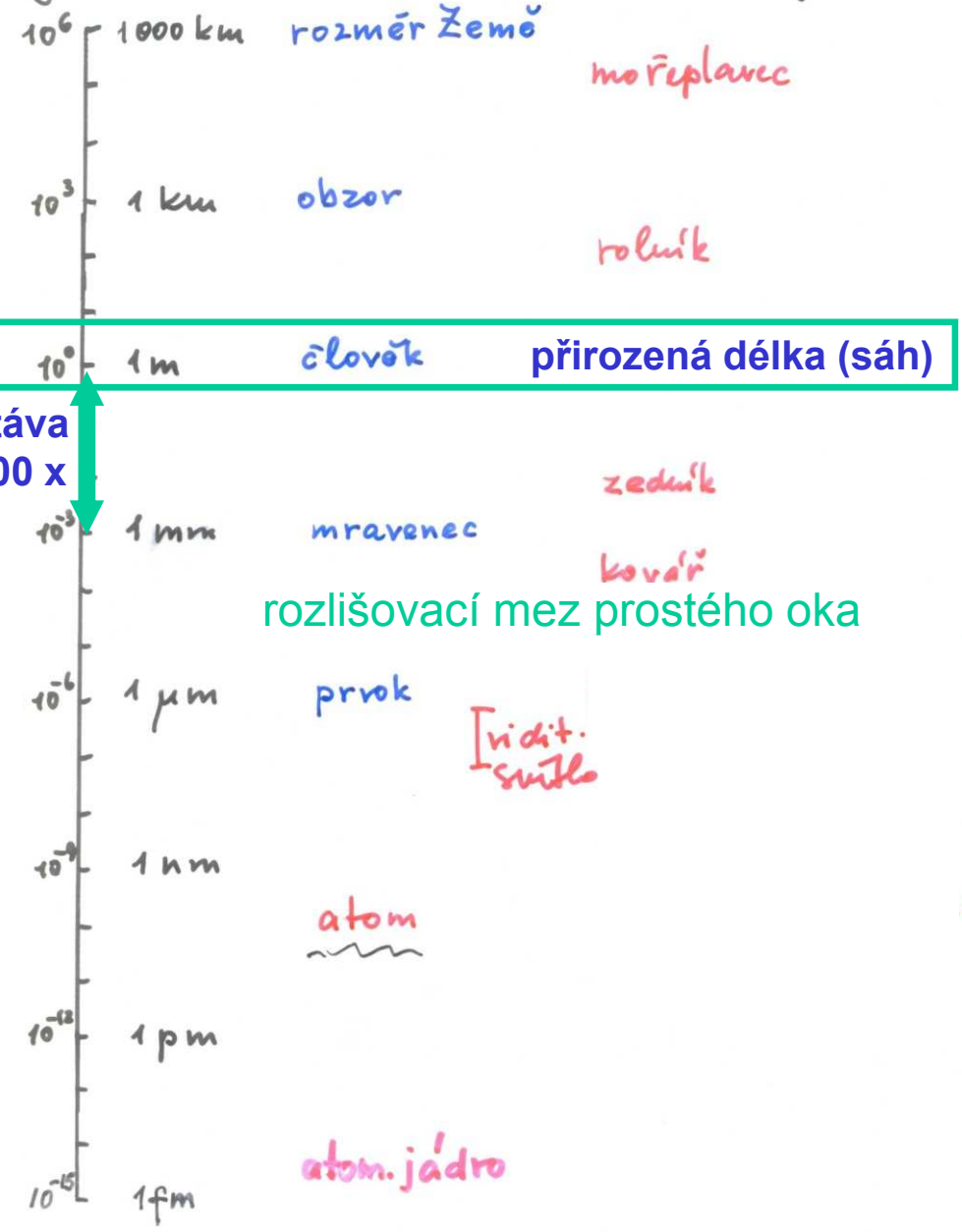
Logaritmická škála velikosti objektů



Logarithmická škála velikosti objektů



Logarithmická škála velikosti objektů



oktáva
1000 x

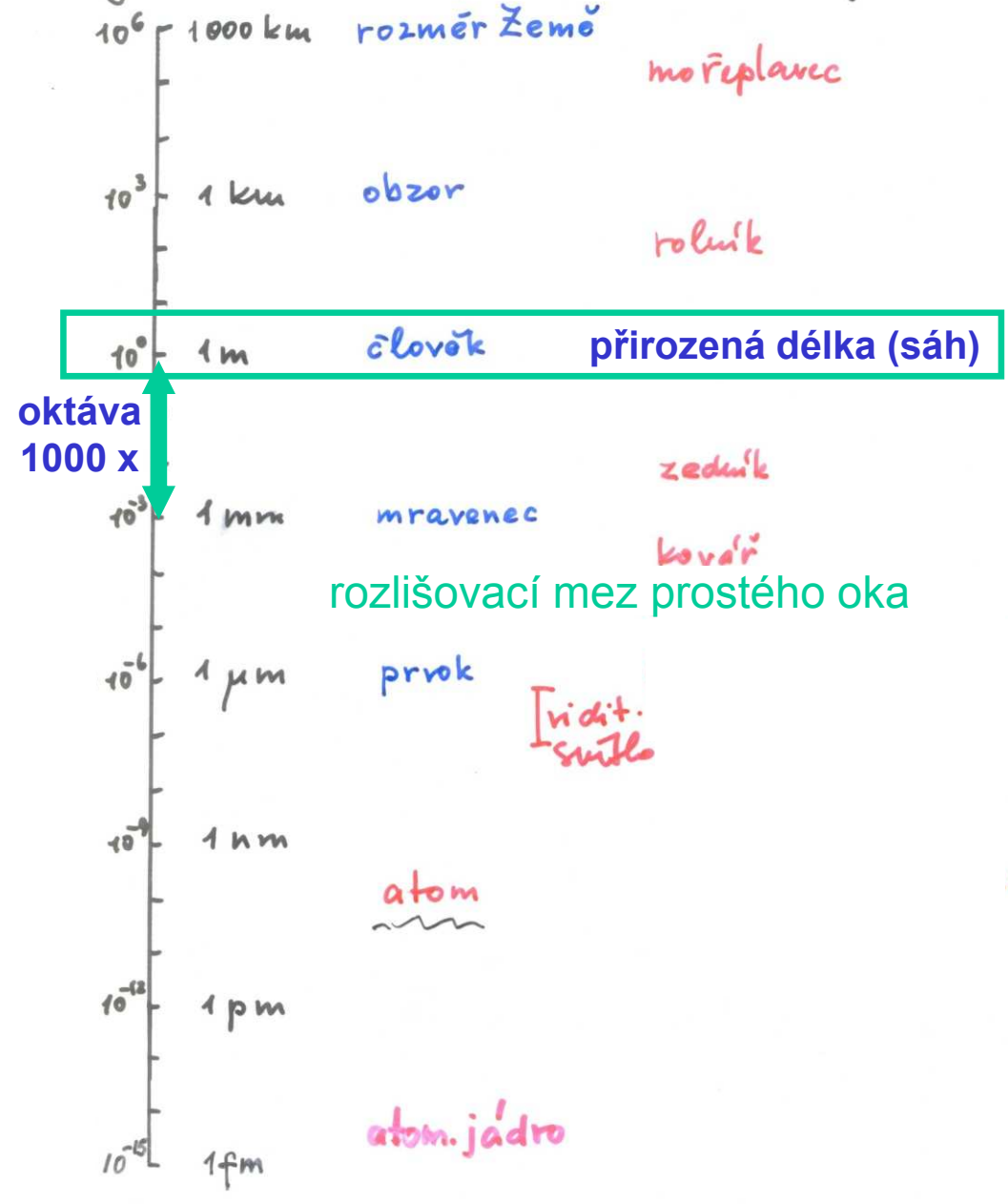
1 m člověk přirozená délka (sáh)

rozlišovací mez prostého oka

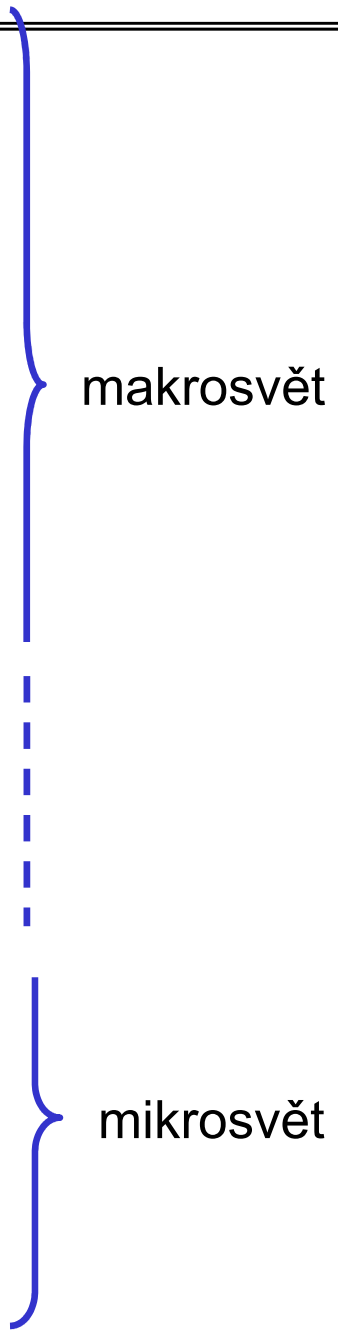
vidit. světlo

Velikosti objektů

Logaritmická škála velikosti objektů



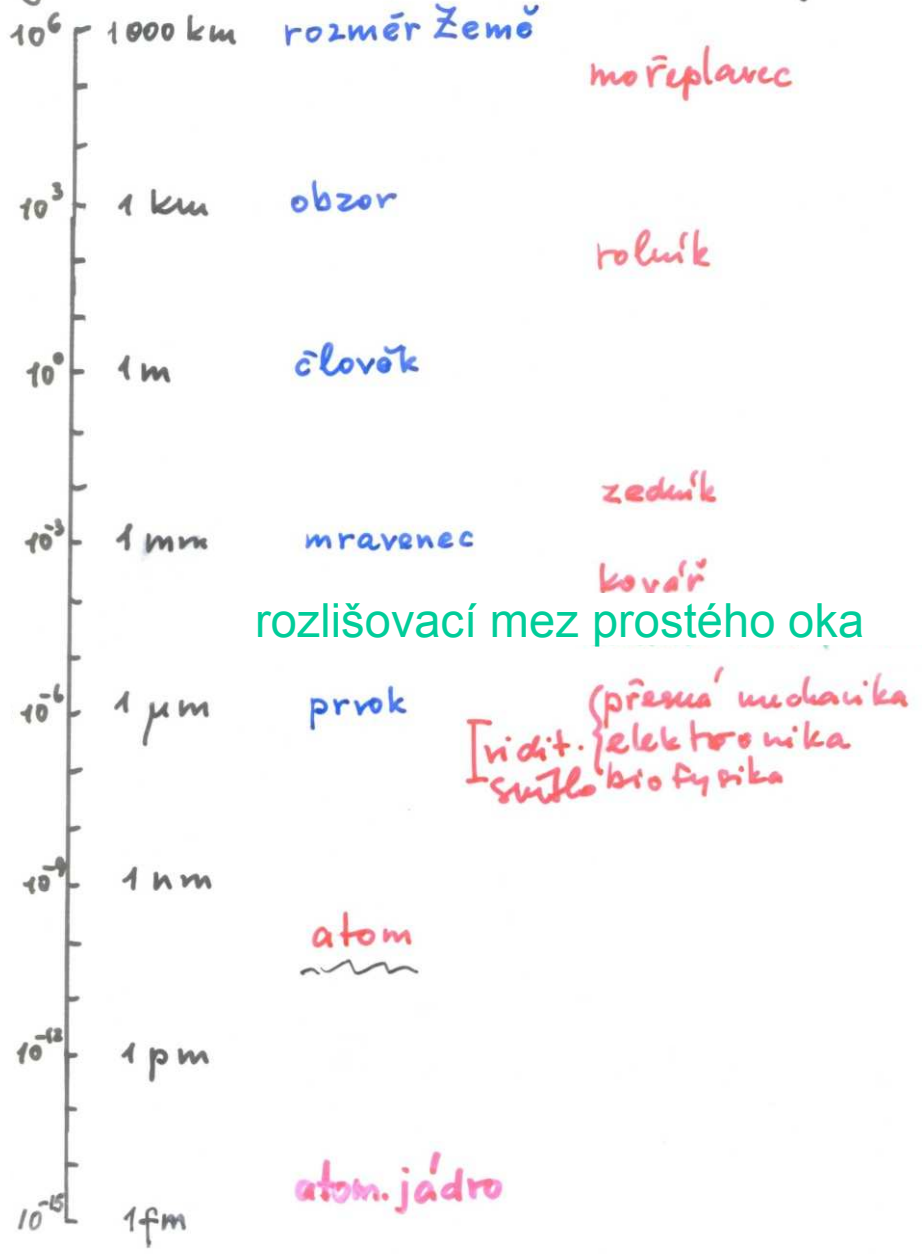
oktáva
1000 x



makrosvět

mikrosvět

Logaritmická škála velikosti objektů



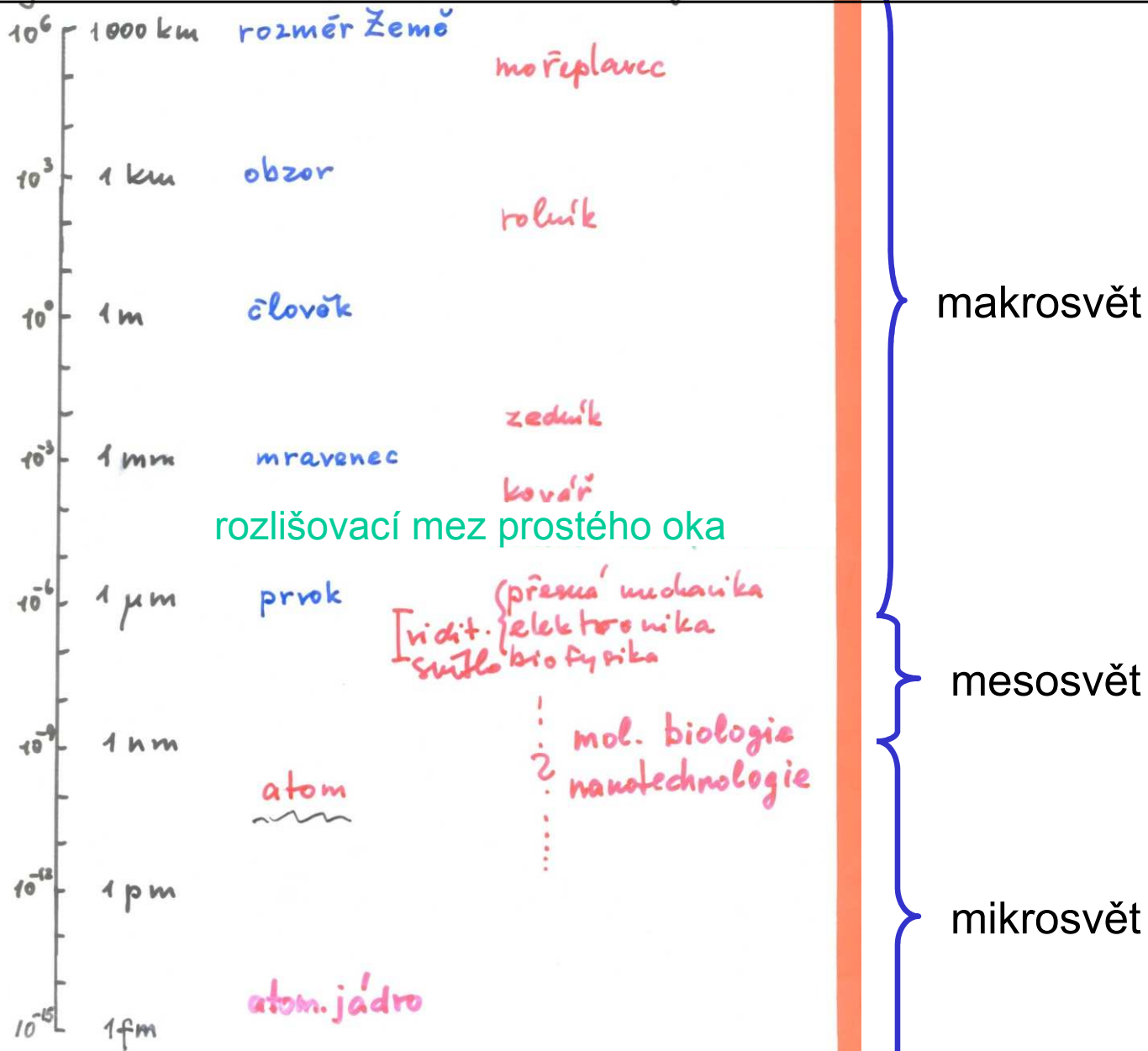
rozlišovací mez prostého oka

makrosvět

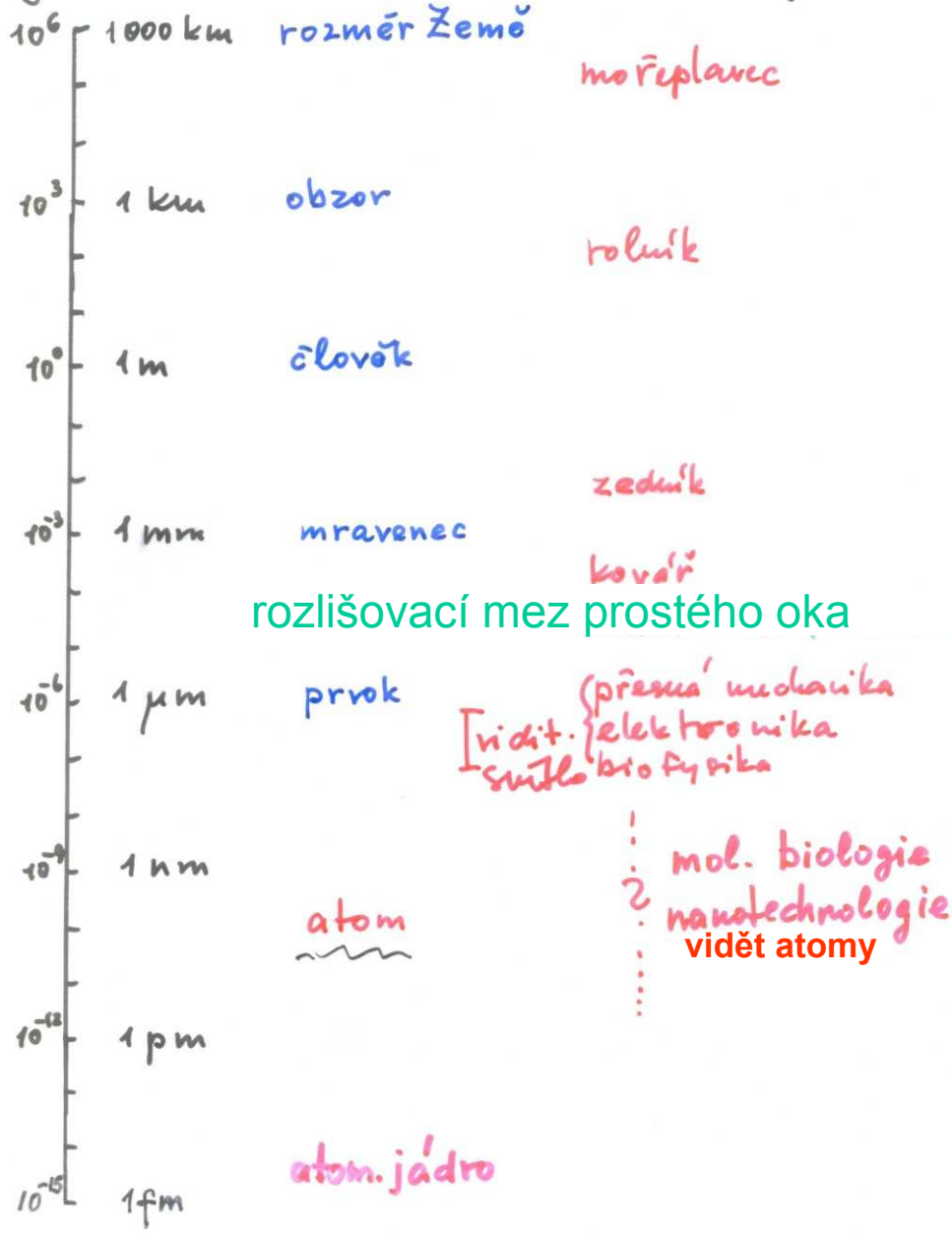
mesosvět

mikrosvět

Logaritmická škála velikosti objektů



Logaritmická škála velikosti objektů

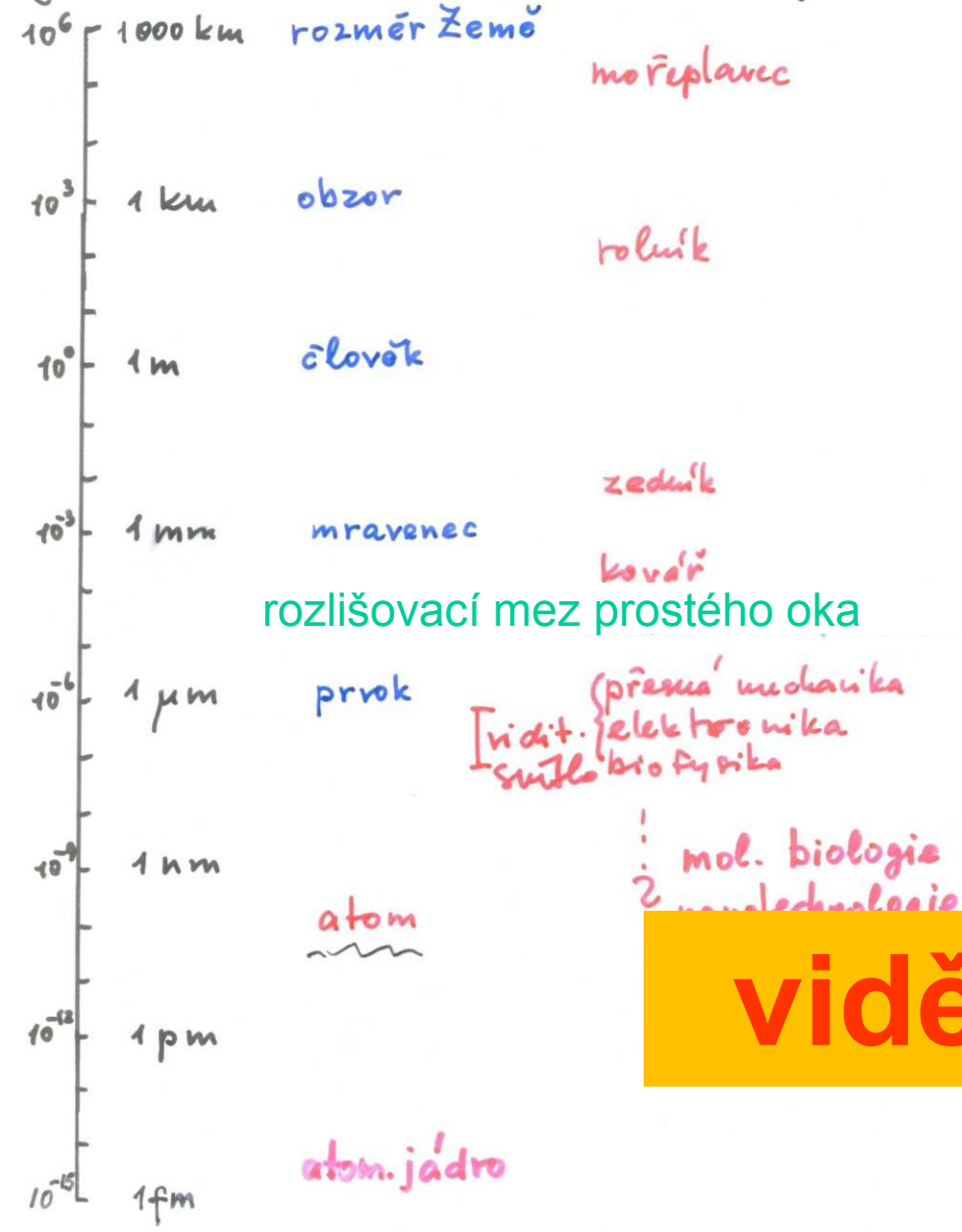


makrosvět

mesosvět

mikrosvět

Logaritmická škála velikosti objektů



makrosvět

mesosvět

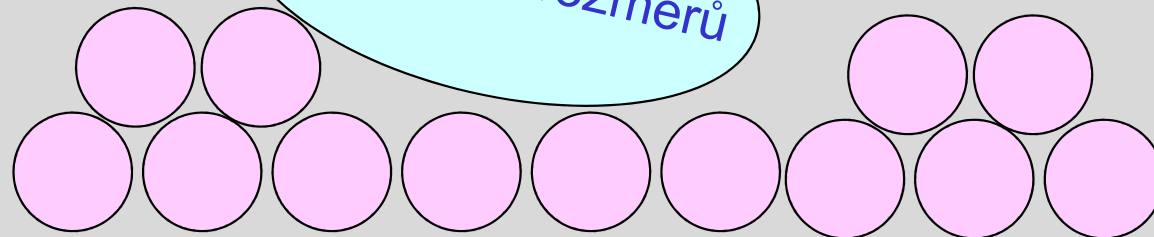
vidět atomy

Vidět atomy

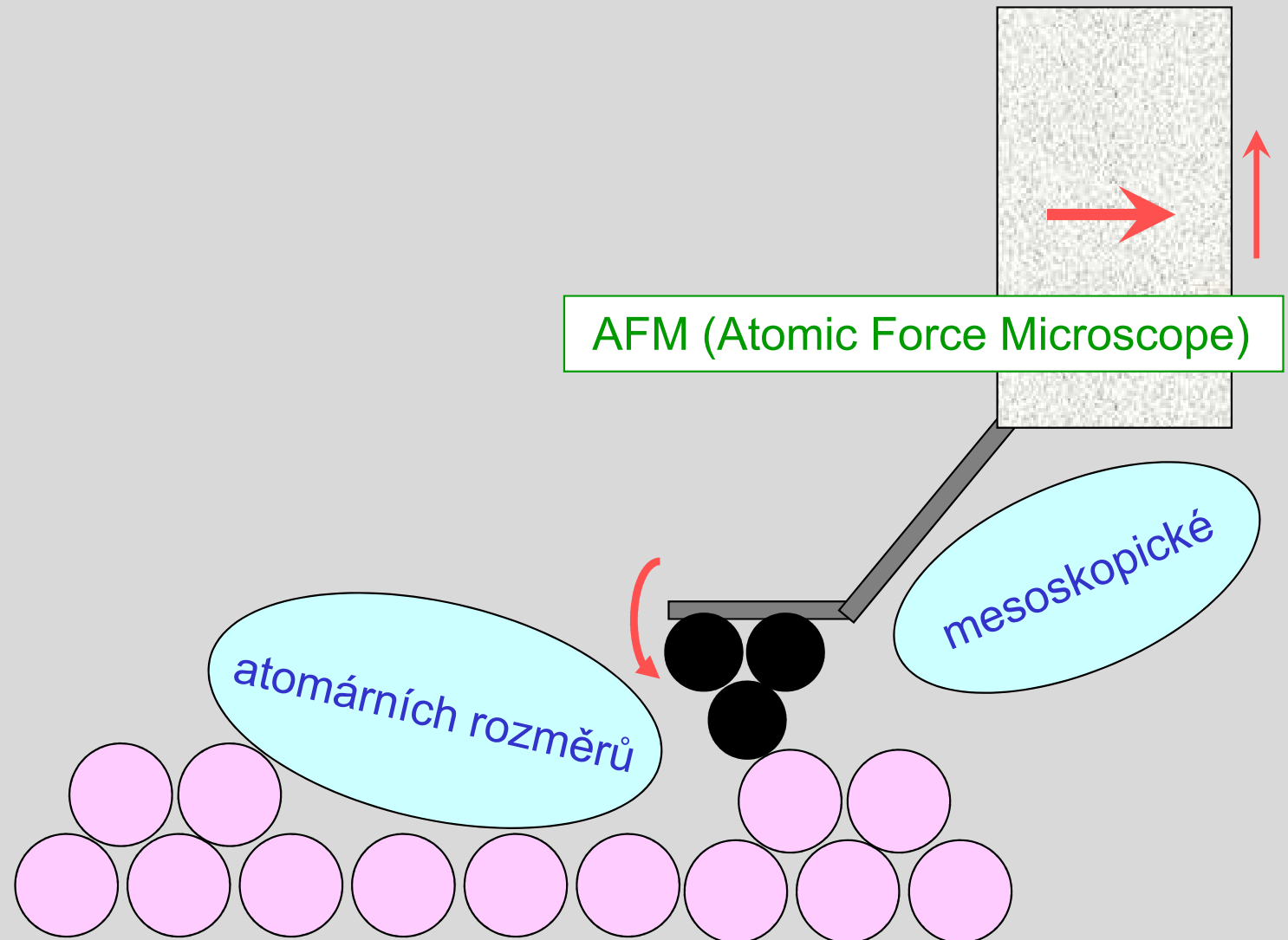
Stačí dvaapůl oktávy

AFM (Atomic Force Microscope)

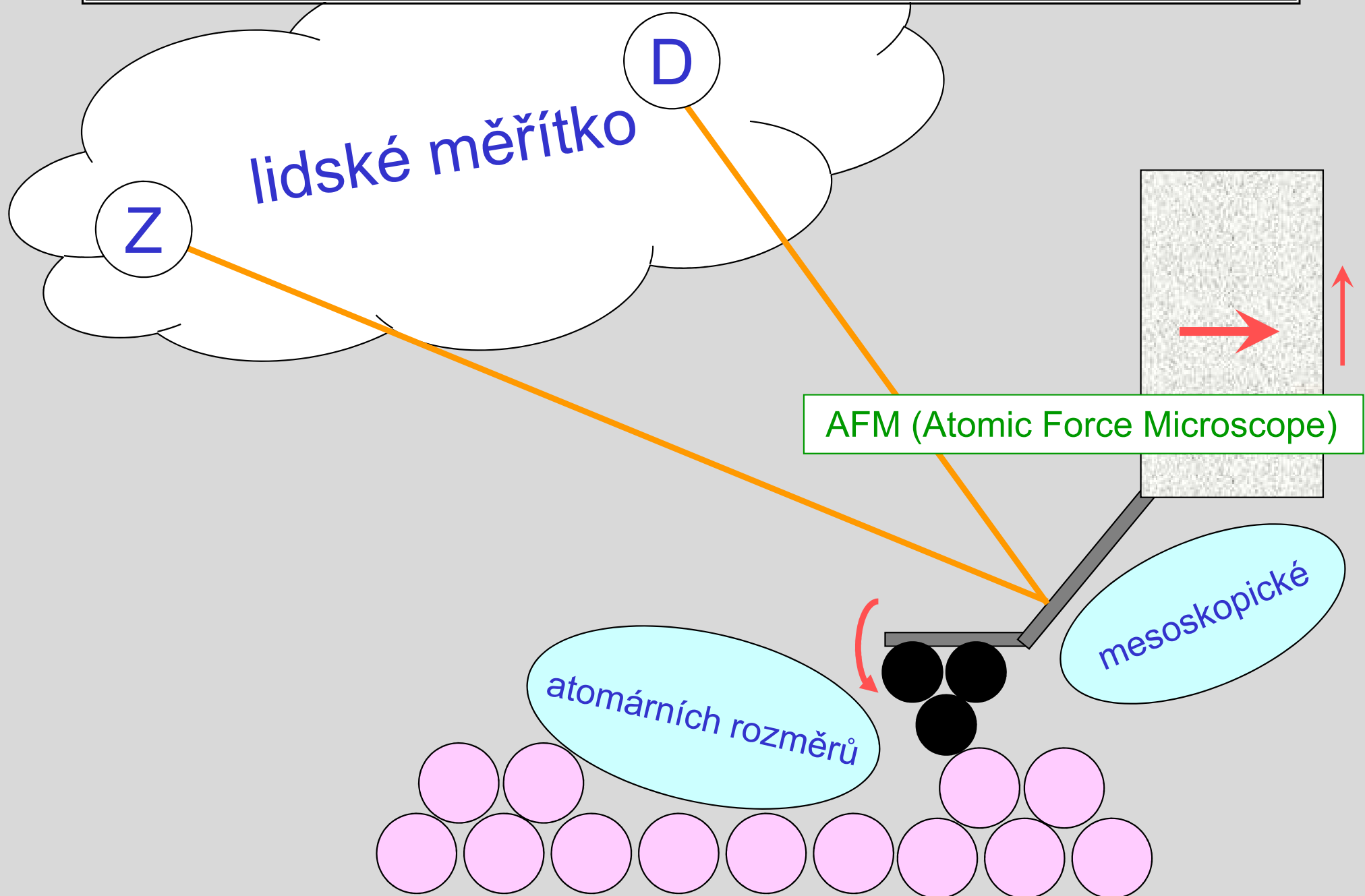
atomárních rozměrů



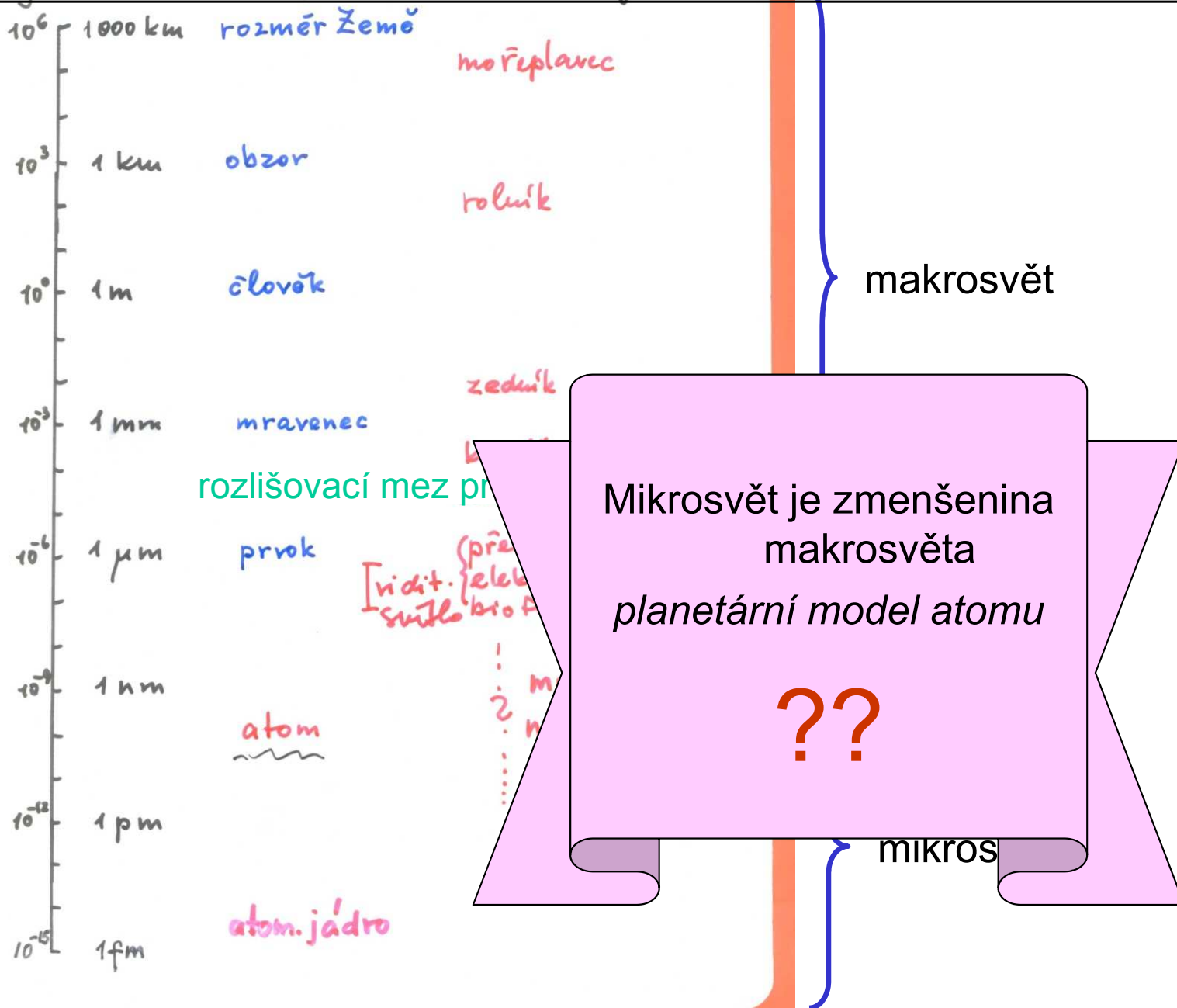
Vidět atomy



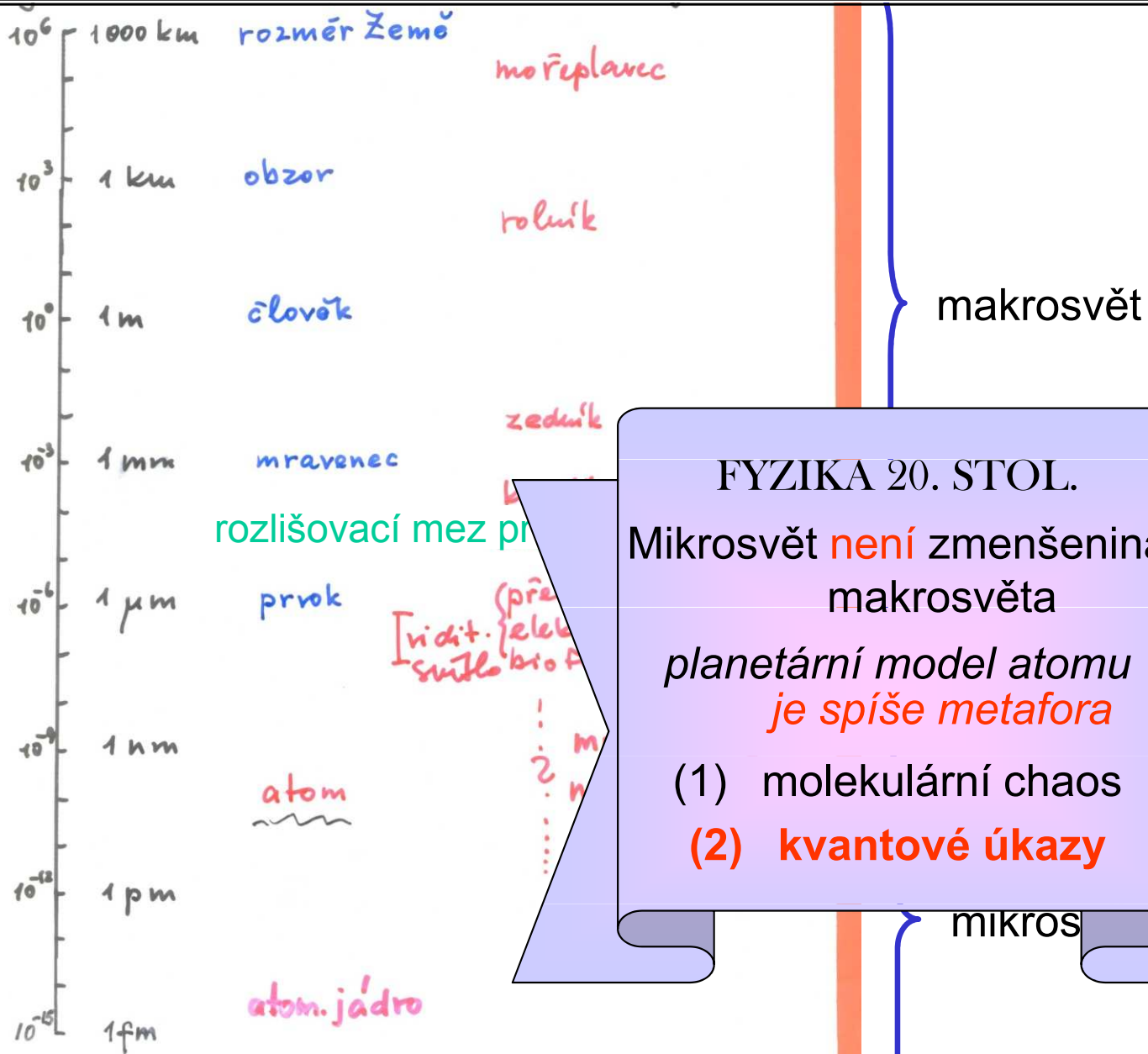
Vidět atomy



Představa klasické fyziky o hierarchii měřítek



Obraz "moderní" fyziky je jiný

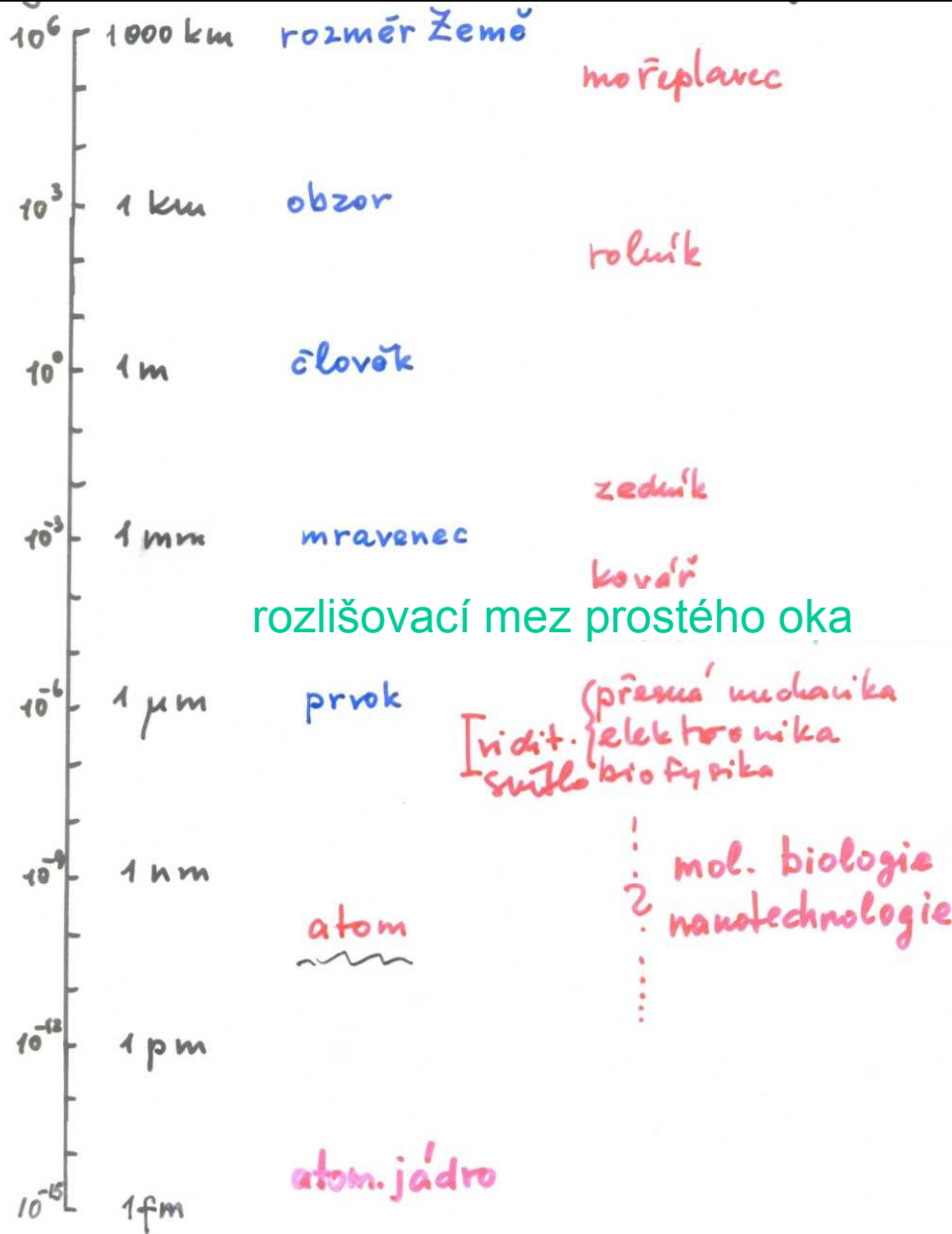


*Procházka kvantovými jevy
v celé škále velikostí objektů*

Samotná velikost objektů není rozhodující pro
jejich kvantové chování.

Kvantové projevy mohou být různorodé a
neočekávané

Souběh dvou stupnic



makrosvět

mesosvět

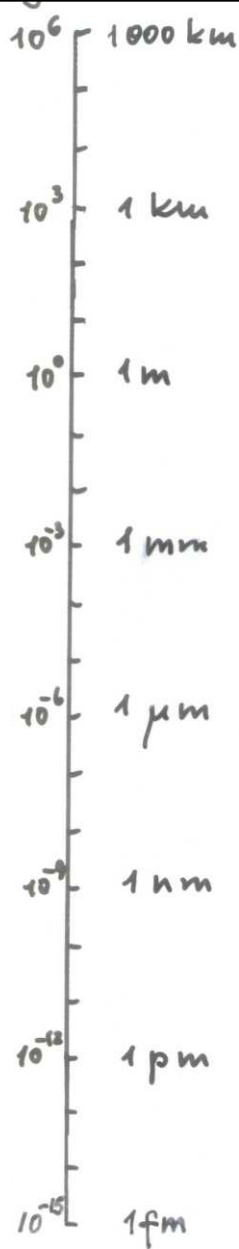
mikrosvět

Klasický svět

Kvantový svět



Klasický a kvantový svět v různých měřítkách



KVANTOVÉ OBJEKTY
makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium
BE kondensace v atom. oblacích
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,
vortexové struktury, qubity

mikroskopické
molekuly
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět
makrosvět

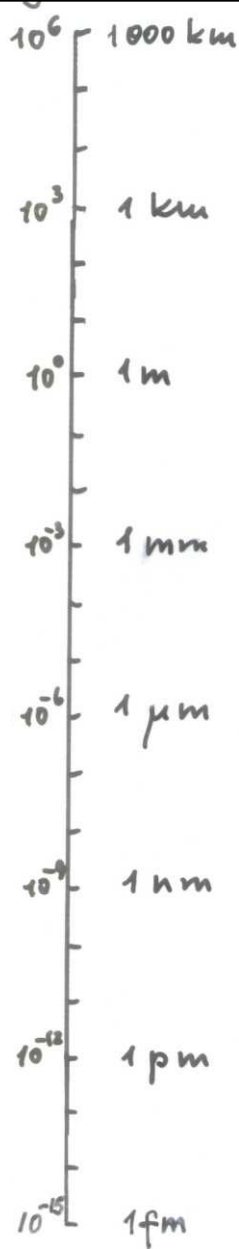


mesosvět

kvantový svět
mikrosvět

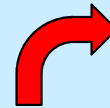
- KVANTOVÉ ÚKAZY**
- kvantování energií
 - vlnové šíření – interference, difrakce ...
 - provázané stavy
 - korelované chování identických částic

Klasický a kvantový svět v různých měřítkách



KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj



supravodiče, supratekuté helium
BE kondensace v atom. oblacích
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,
vortexové struktury, qubity

mikroskopické
molekuly
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět
makrosvět

mesosvět

kvantový svět
mikrosvět

KVANTOVÉ ÚKAZY

- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

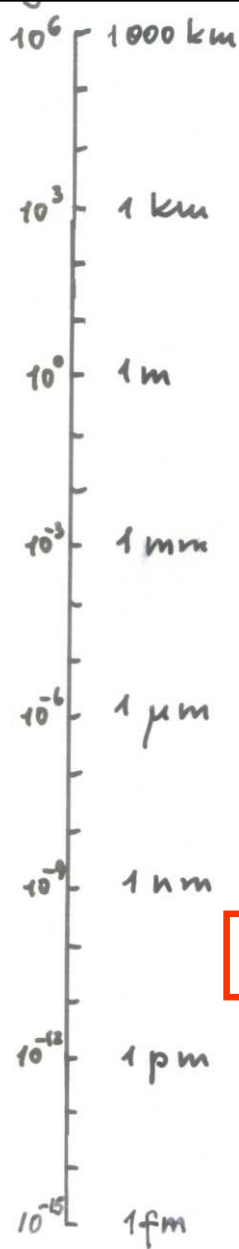
THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

CLASSICAL DOMAIN



Klasický a kvantový svět



KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium
BE kondensace v atom. oblacích
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické

kvantové multivrstvy, kvant. tečky,
vortexové struktury, qubity

mikroskopické

molekuly

atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický

makrosvět

vět



mesosvět

kvantový

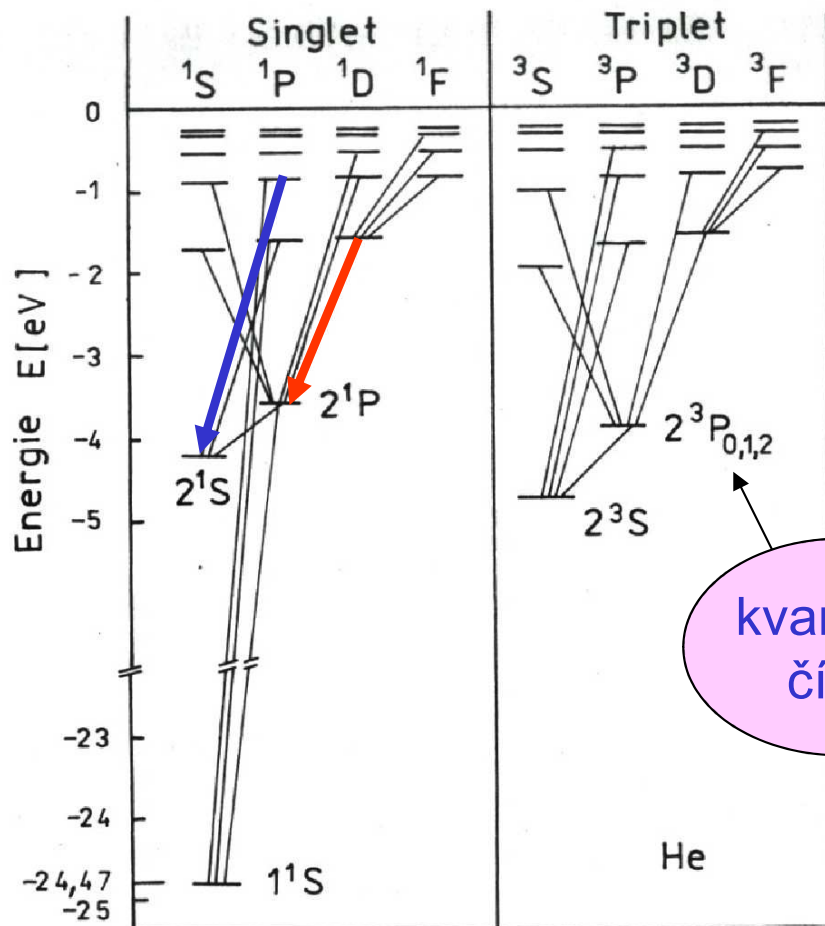
mikrosvět

svět

KVANTOVÉ ÚKAZY

- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

Kvantování energie v atomu (helia)

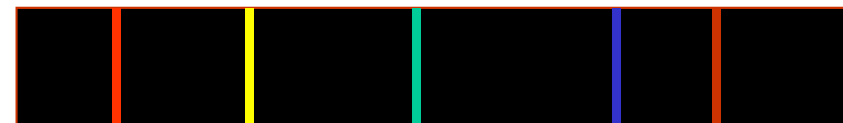


Bohrova podmínka

$$h\nu = E_1 - E_2$$

dává fotony s určitou energií,
čili ostré spektrální linie

Uvidíme něco takového:

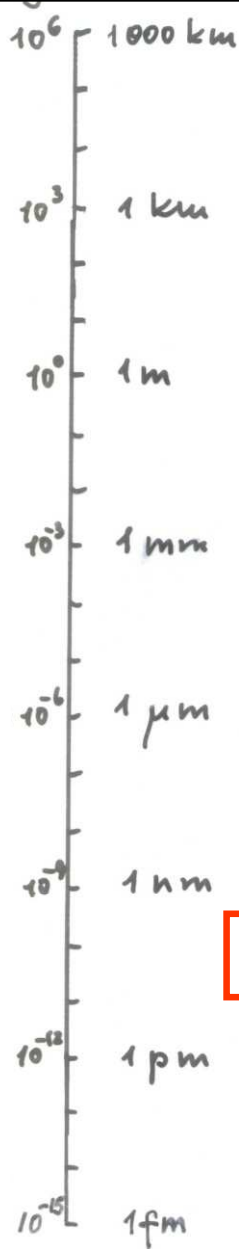


Celkový spin 0

Celkový spin 1

2-elektronové hladiny

Klasický a kvantový svět



KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium
BE kondensace v atom. oblacích
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,
vortexové struktury, qubity

mikroskopické

molekuly

atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět
makrosvět



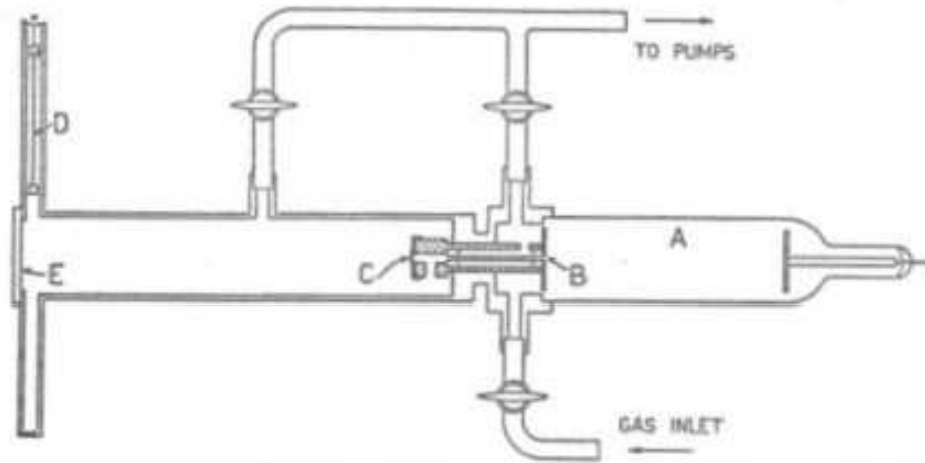
mesosvět

kvantový svět
mikrosvět

KVANTOVÉ ÚKAZY

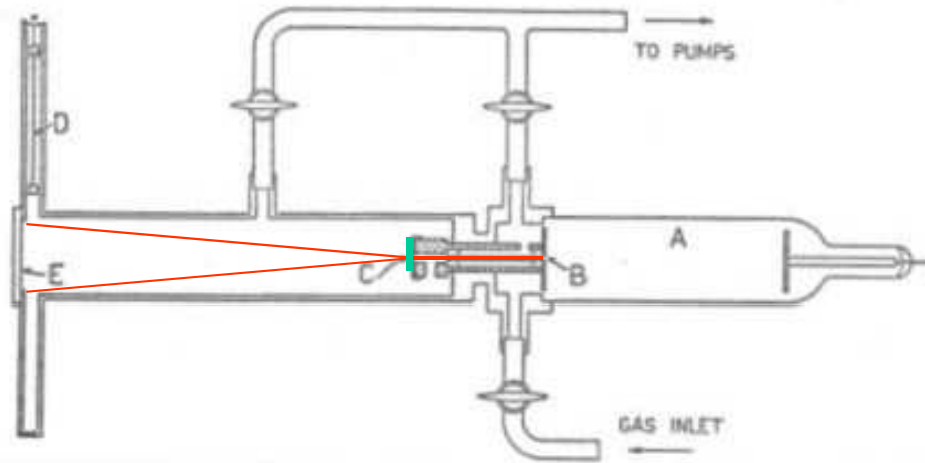
- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

Difrakce rychlých elektronů na hliníkové folii



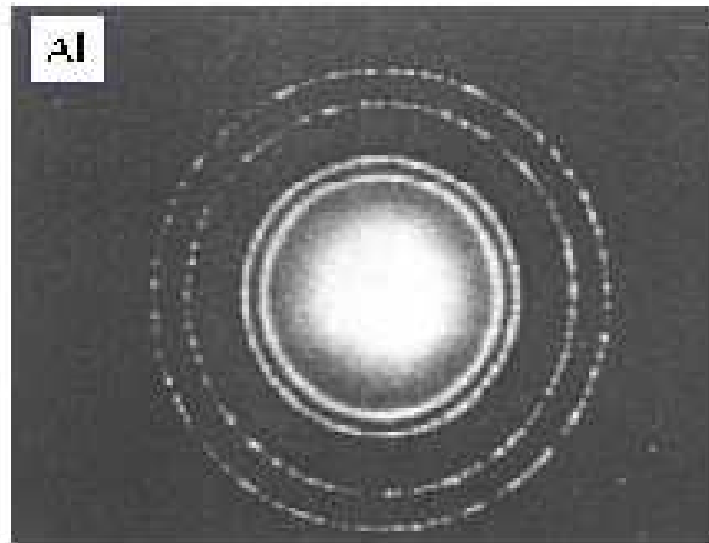
G.P. Thomson 1927

Difrakce rychlých elektronů na hliníkové folii

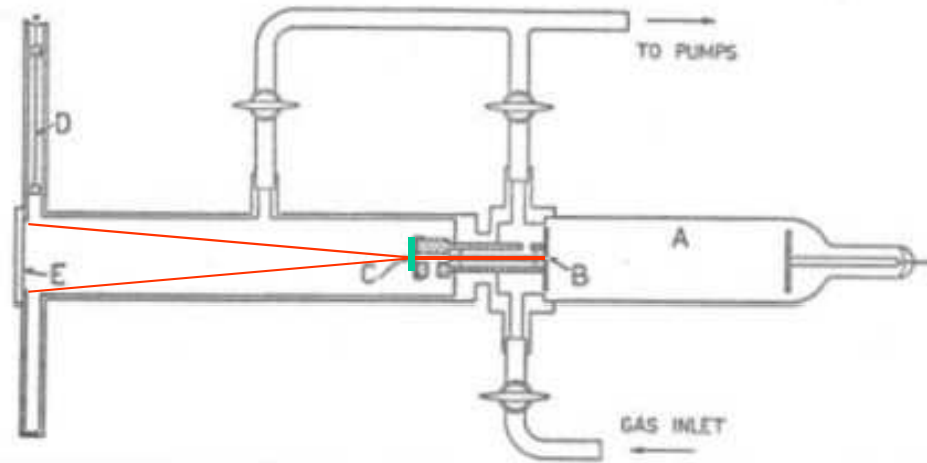


G.P. Thomson 1927 *NP*

elektrony



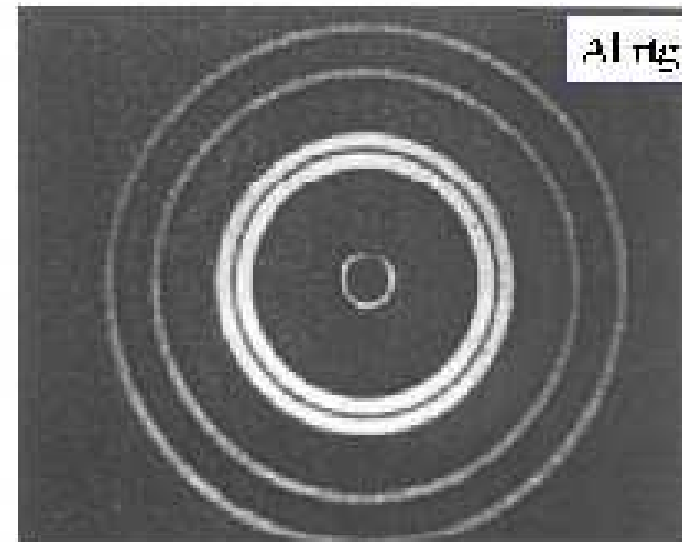
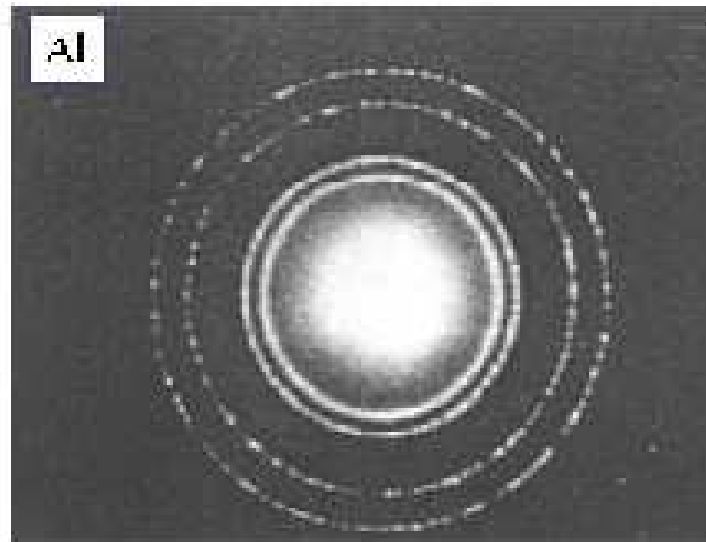
Difrakce rychlých elektronů na hliníkové folii



G.P. Thomson 1927 *NP*

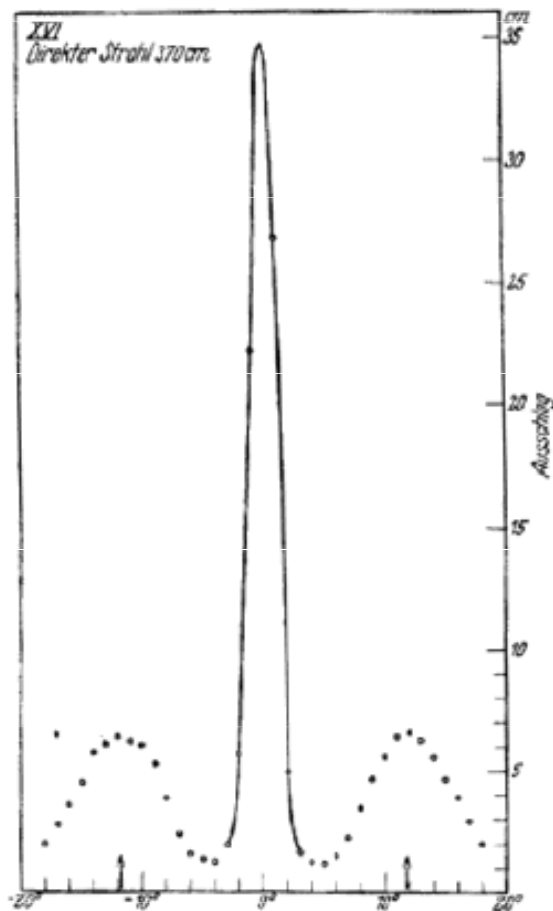
elektrony

Röntgenovy paprsky



Difrakce atomů helia na krystalu LiF

Esterling a Stern
1930



THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

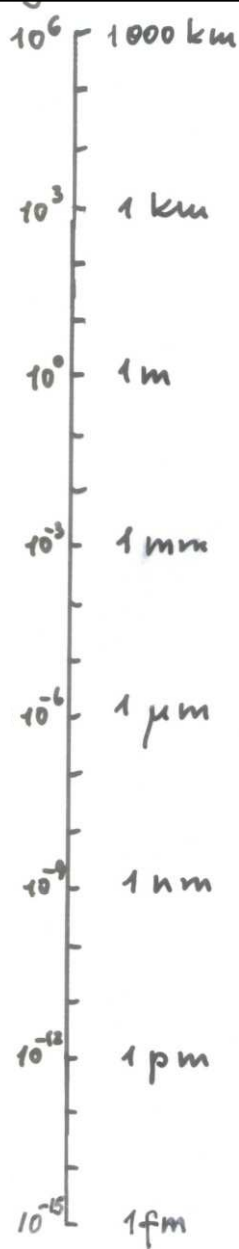
CLASSICAL DOMAIN



*Rozmazané rozmezí
klasického a kvantového světa*

**To jest:
makroskopické se nekryje s klasickým,
mikroskopické se nekryje s kvantovým**

Klasický a kvantový svět



KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium
BE kondensace v atom. oblacích
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické

kvantové multivrstvy, kvant. tečky,
vortexové struktury, qubity

mikroskopické

molekuly
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět
makrosvět



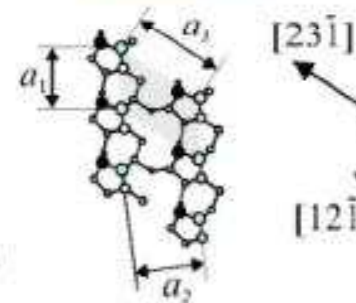
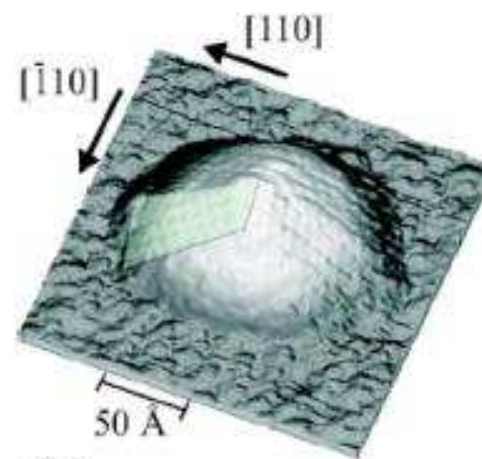
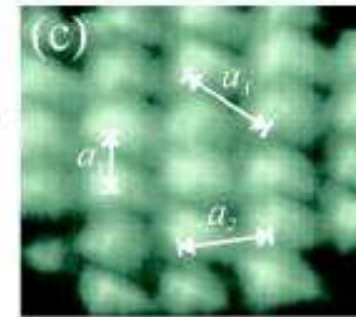
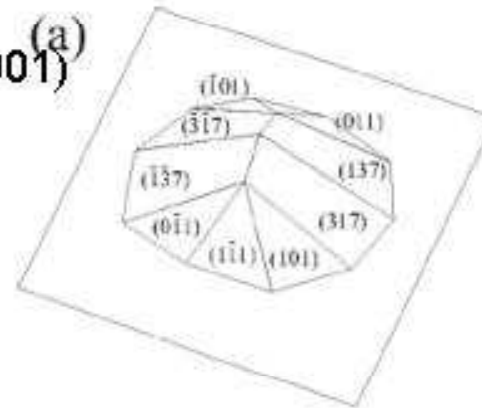
mesosvět

kvantový svět
mikrosvět

KVANTOVÉ ÚKAZY

- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

Kvantové tečky InAs na GaAs (001)
(STM)



$$a_1 = 6,5 \pm 0,1 \text{ \AA}$$

$$a_2 = 9,0 \pm 0,3 \text{ \AA}$$

$$a_3 = 10,5 \pm 0,2 \text{ \AA}$$

$$\angle(a_1, a_2) = 82,4^\circ \pm 0,7^\circ$$

(d)

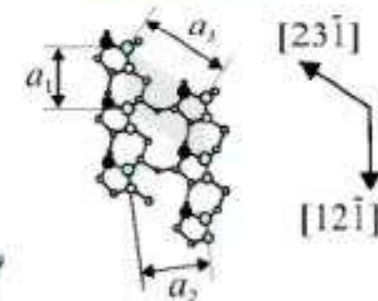
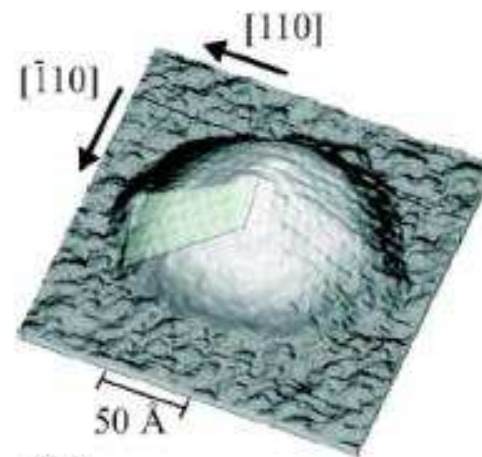
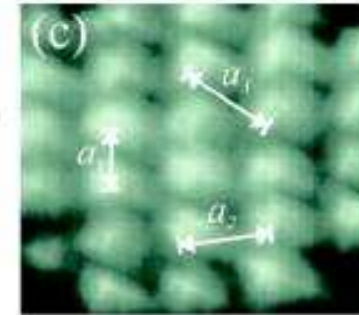
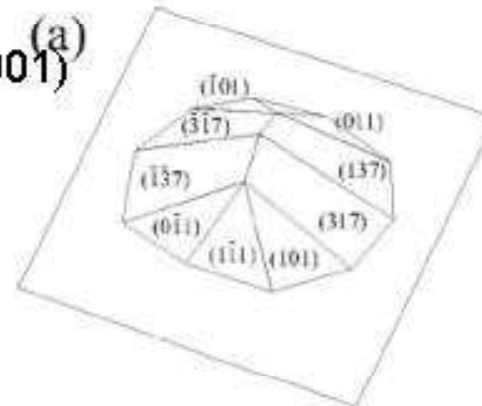
Kvantové tečky

Kvantové tečky InAs na GaAs (001)
(STM)

UMĚLÉ ATOMY
(dimense 0)

průměr tečky 10 nm
průměr atomu 0.3 nm

elektrony jsou v
resonančních
vlnových stavech
s kvantovanou
energií



$$a_1 = 6,5 \pm 0,1 \text{ \AA}$$

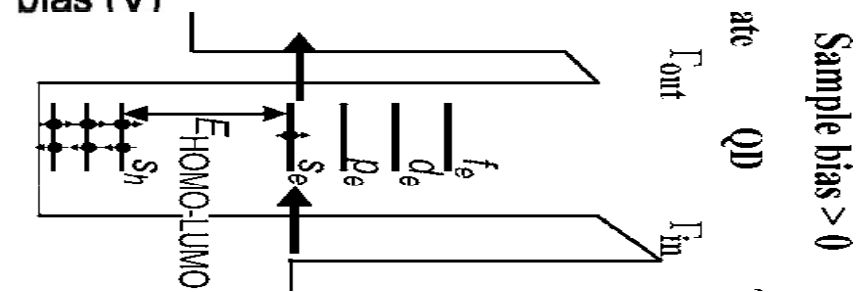
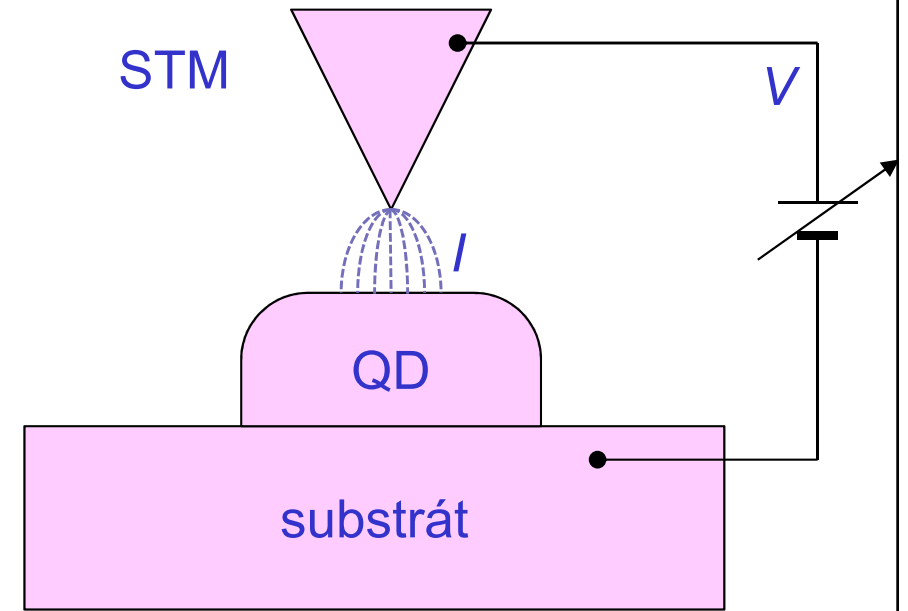
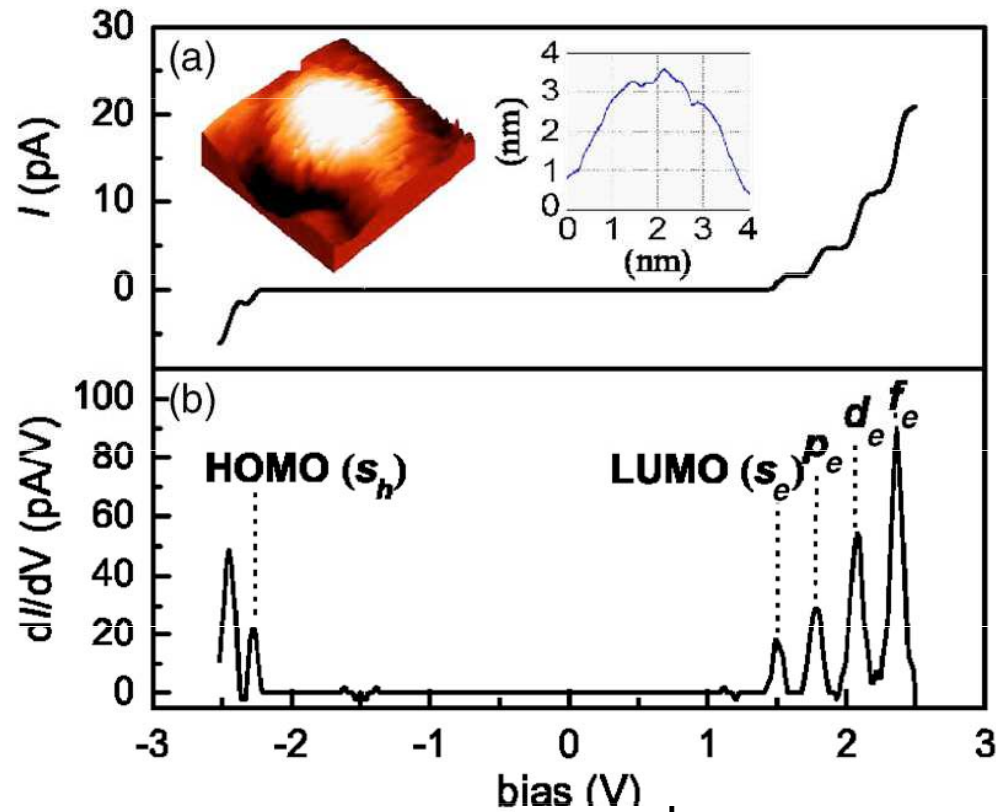
$$a_2 = 9,0 \pm 0,3 \text{ \AA}$$

$$a_3 = 10,5 \pm 0,2 \text{ \AA}$$

$$\angle(a_1, a_2) = 82,4^\circ \pm 0,7^\circ$$

(d)

Kvantová tečka v CdSe

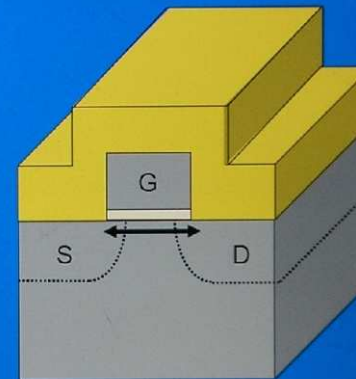
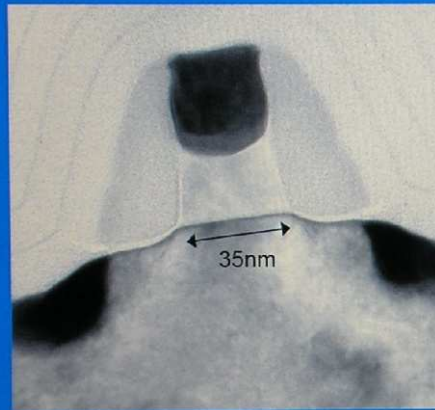


*Rozmazané rozmezí
klasického a kvantového světa*

V MOSFETech i při dnešním stupni
miniaturisace (ULSI) se elektrony řídí
(semi)klasickými zákony pohybu

Technologie 65 nm firmy Intel

NMOS with Enhanced Strain



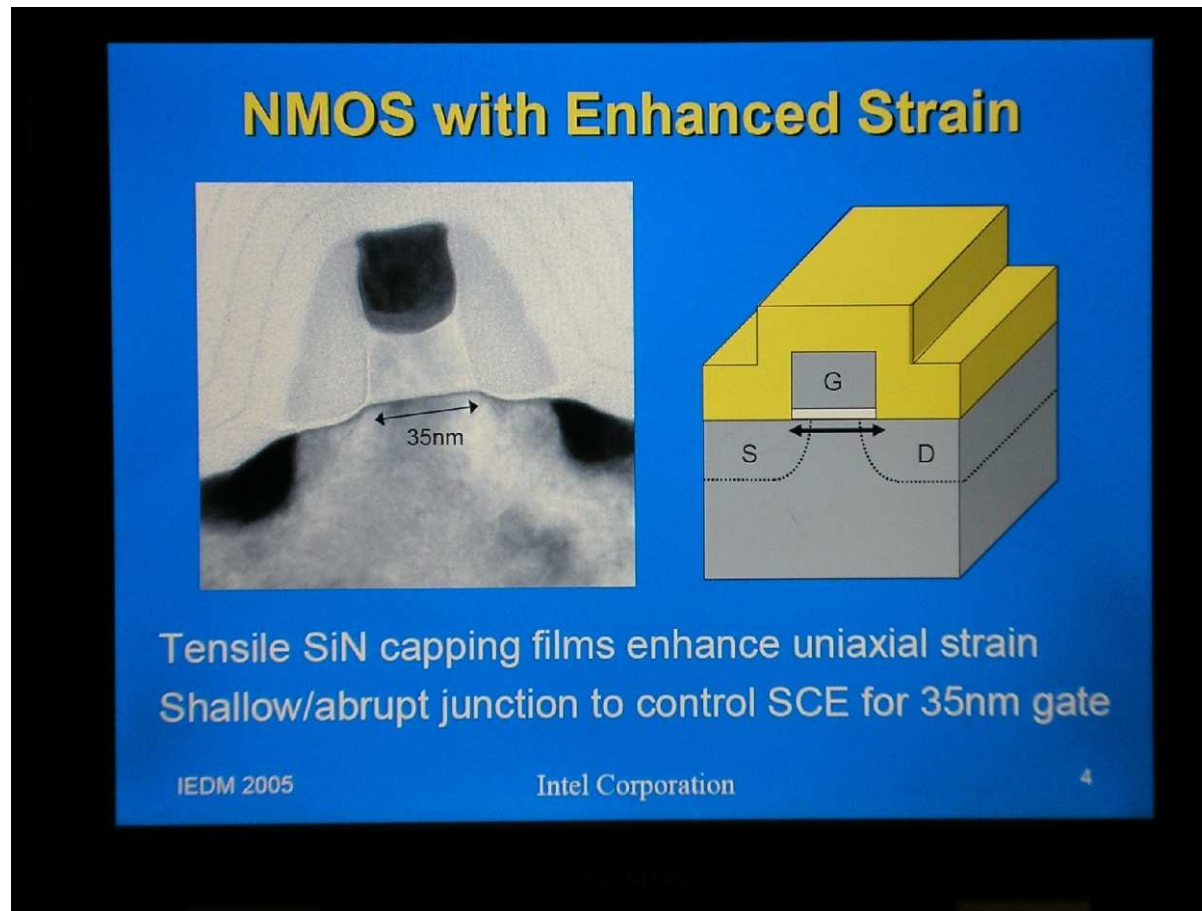
Tensile SiN capping films enhance uniaxial strain
Shallow/abrupt junction to control SCE for 35nm gate

IEDM 2005

Intel Corporation

4

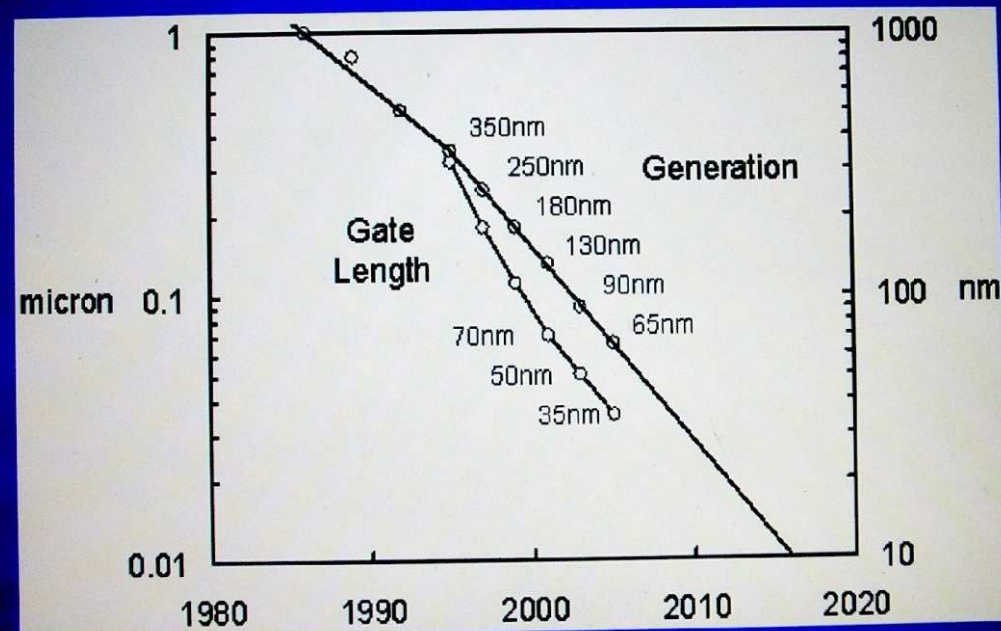
Technologie 65 nm firmy Intel



Elektrony jsou zde jako malé nabitě kuličky, které přenášejí proud

Technologie 65 nm firmy Intel

Logic Transistor Gate Length Trend



65nm continues aggressive gate length scaling

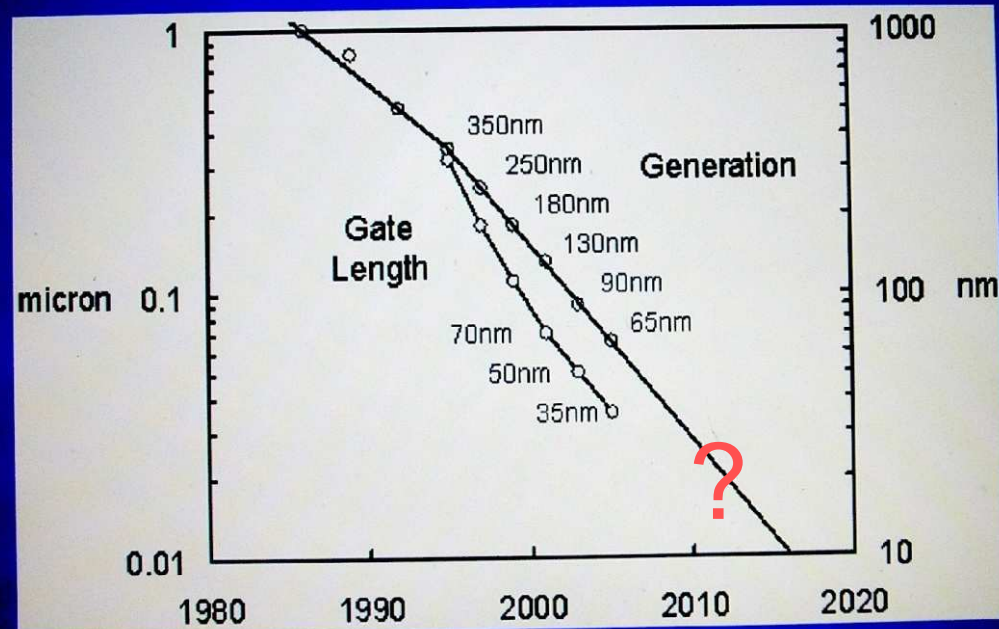
IEDM 2005

Intel Corporation

2

Technologie 65 nm firmy Intel

Logic Transistor Gate Length Trend



65nm continues aggressive gate length scaling

IEDM 2005

Intel Corporation

2

Postupné nenápadné přibližování ke kvantové limitě

THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

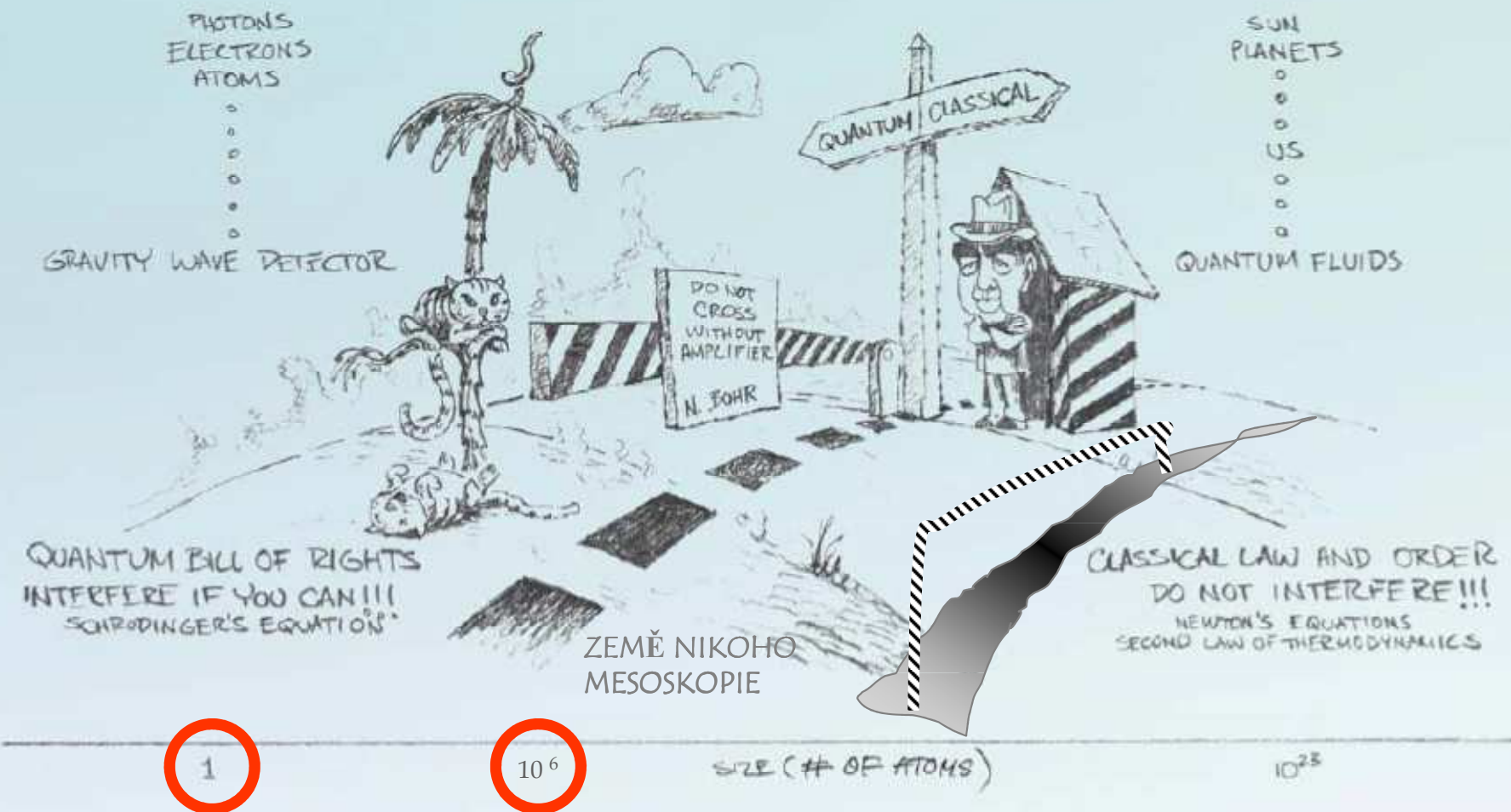
CLASSICAL DOMAIN



THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

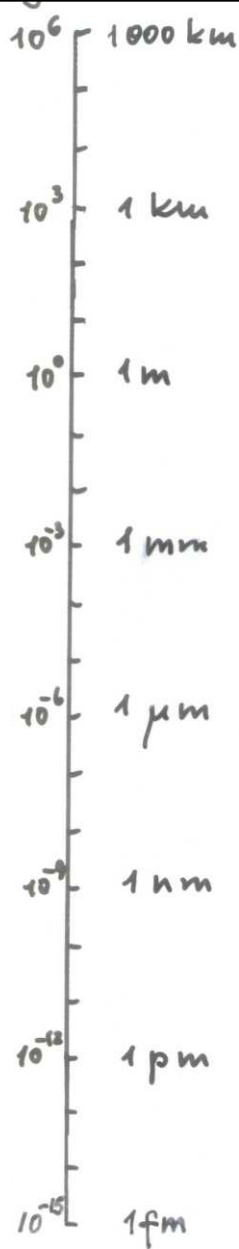
CLASSICAL DOMAIN



Kvantové objekty a úkazy v makroskopickém světě

**Ještě výrazněji:
makroskopické se nekryje s klasickým,
mikroskopické se nekryje s kvantovým**

Klasický a kvantový svět



KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium
BE kondensace v atom. oblacích
kohese a chem. vazba v látkach

meso("nano")skopické
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,
vortexové struktury, qubity

mikroskopické
molekuly
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět
makrosvět

mesosvět

kvantový svět
mikrosvět

KVANTOVÉ ÚKAZY

- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

Obláček atomů (alkalických kovů) za extrémně nízkých teplot přejde do zvláštního stavu – BE kondensátu, ve kterém všechny atomy se pohybují naprosto shodně, koherentně a dohromady vytvoří makroskopickou vlnovou funkci

objeveno 1995

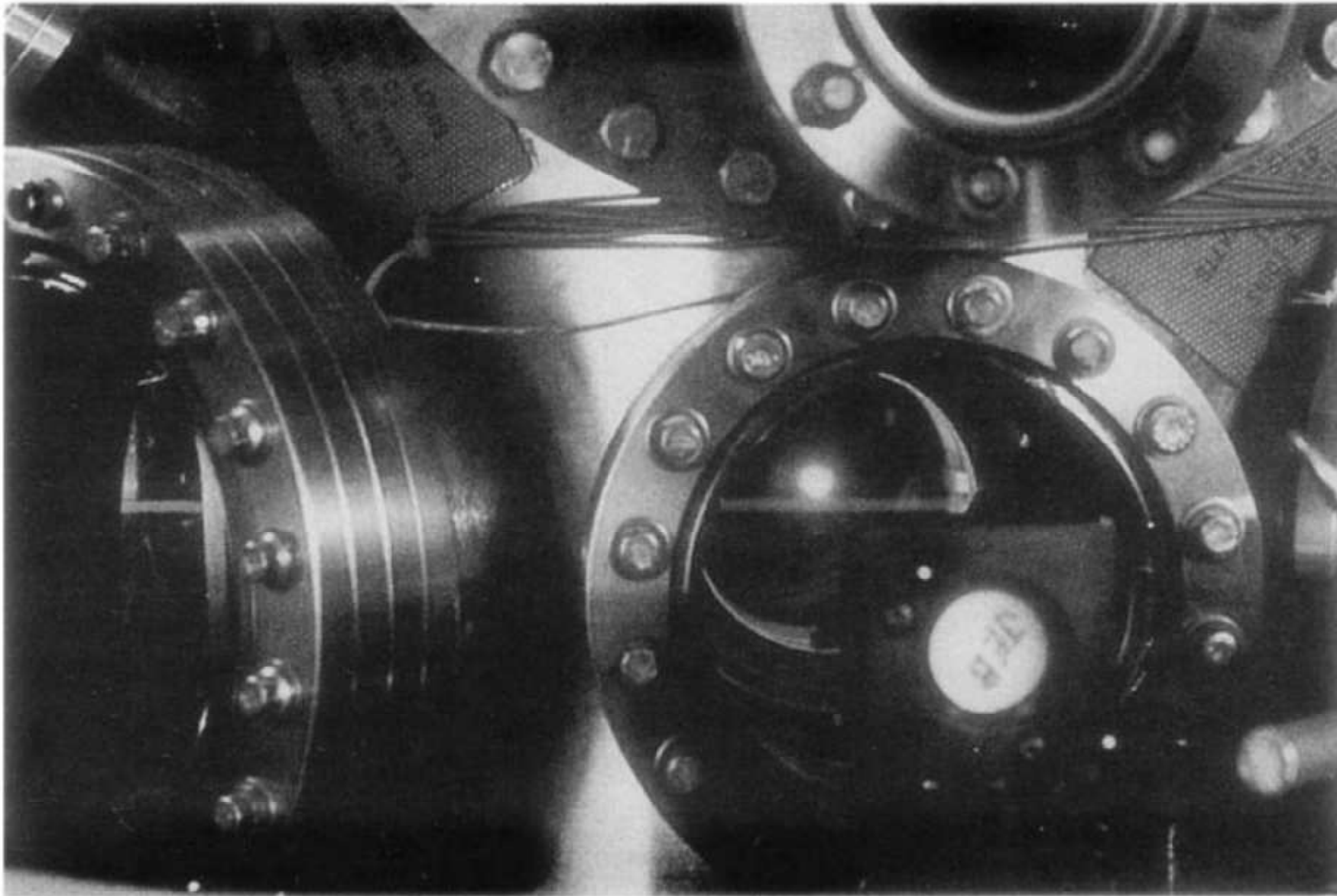
Nobelova cena 2001

Příbuzný jev – supratekutost znám v kapalném heliu od 30tých let

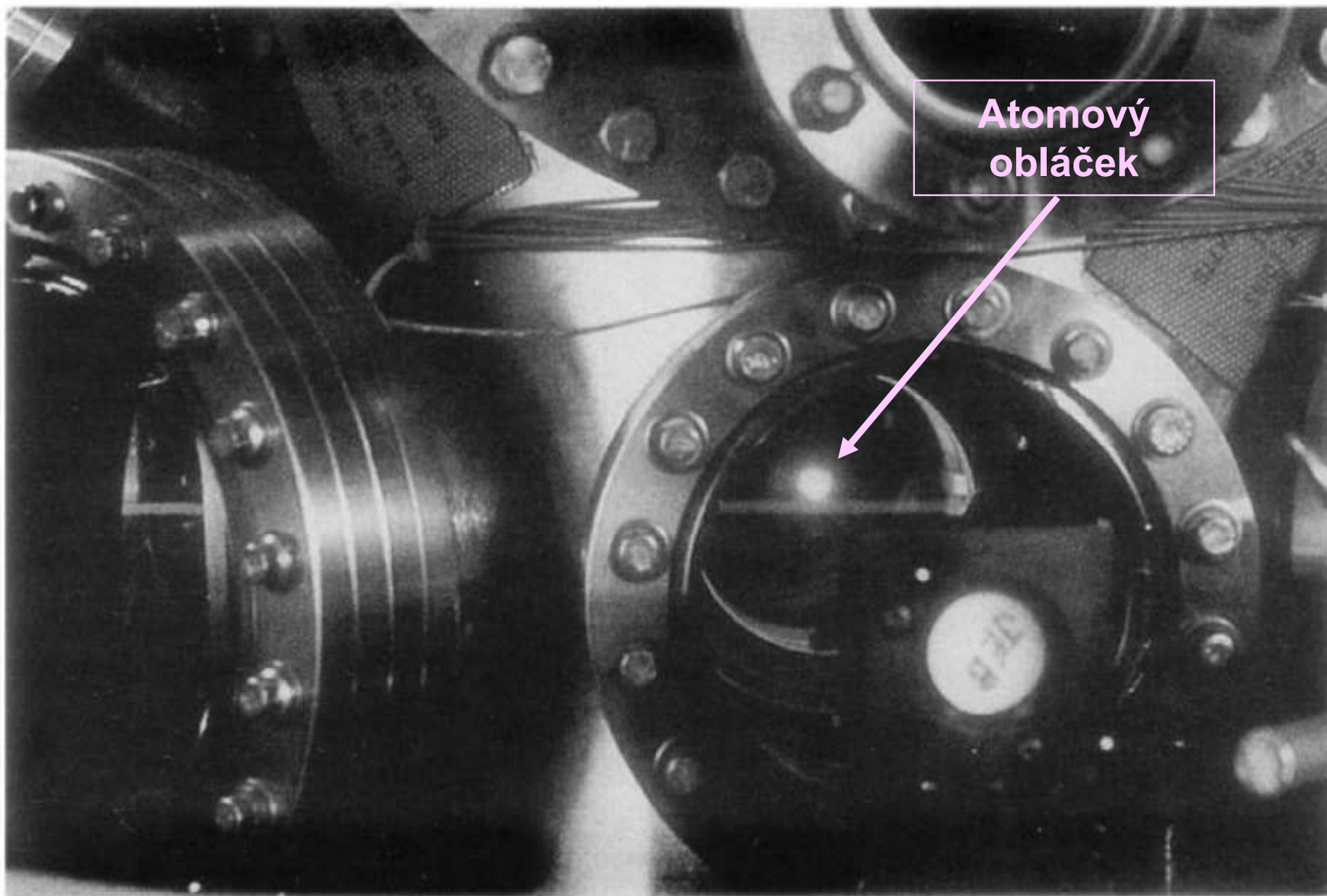
PŘIBLIŽNÉ ÚDAJE KRITICKÝCH TEPLIT

system	M	n	T_c
He liquid	4	2×10^{28}	1.47 K
Na trap	23	2×10^{20}	1.19 μ K
Rb trap	87	2×10^{17}	3.16 nK

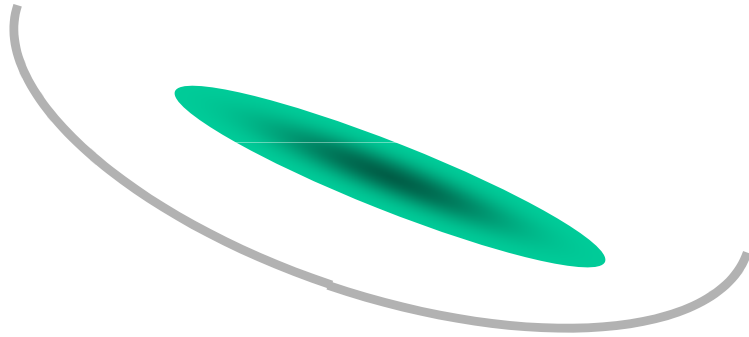
Atomový obláček



Atomový oblaček



Princip experimentu s interferencí atomů



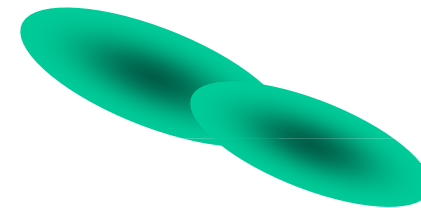
1. Atomový obláček vytvořený v pasti



2. Rozdělen na dvě části laserem



3. Past a laser vypnuty



4. Oba obláčky se roztékají, pronikají navzájem a interferují

Interference atomů BE zkonzensovaných v pastech

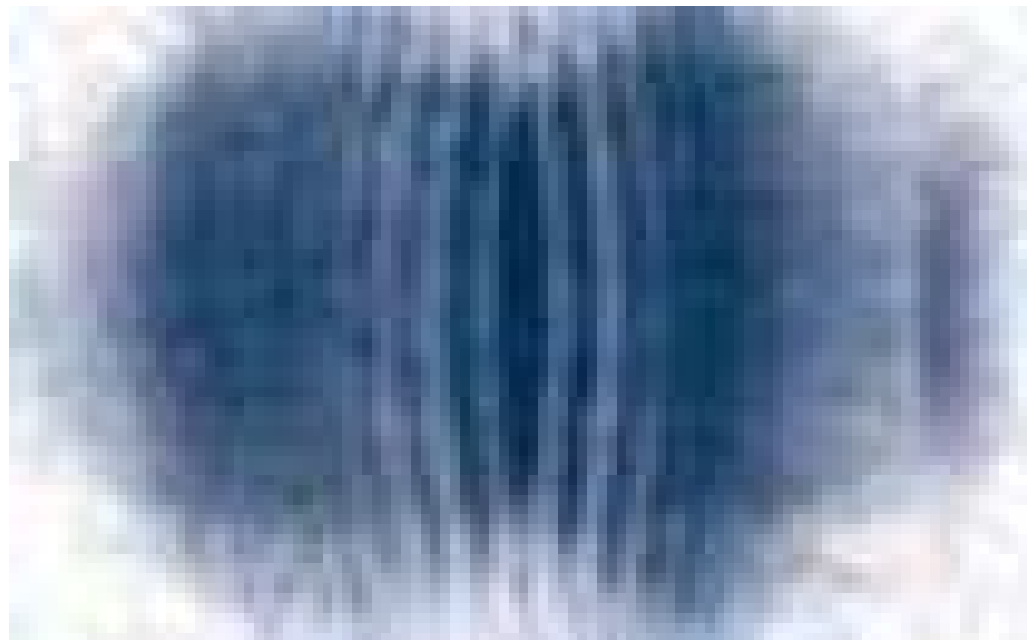
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

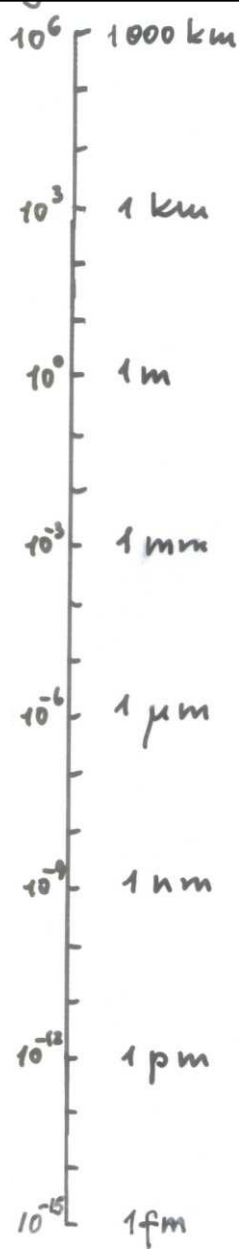
Dvě části obláčku rozdlené a opět se prolínající spolu interferují. Jsou to tedy koherentní (makroskopické) vlny

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.



Klasický a kvantový svět



KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium
BE kondensace v atom. oblacích
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické

kvantové multivrstvy, kvant. tečky,
vortexové struktury, qubity

mikroskopické

molekuly
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět
makrosvět



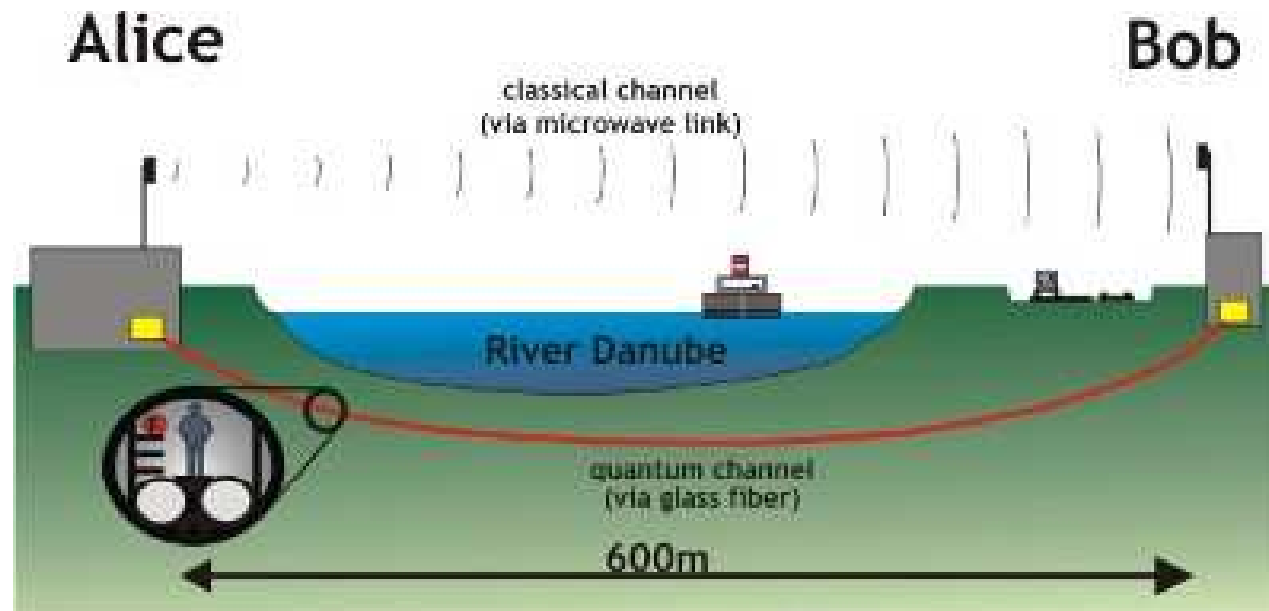
mesosvět

kvantový svět
mikrosvět

KVANTOVÉ ÚKAZY

- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

Kvantová teleportace fotonů

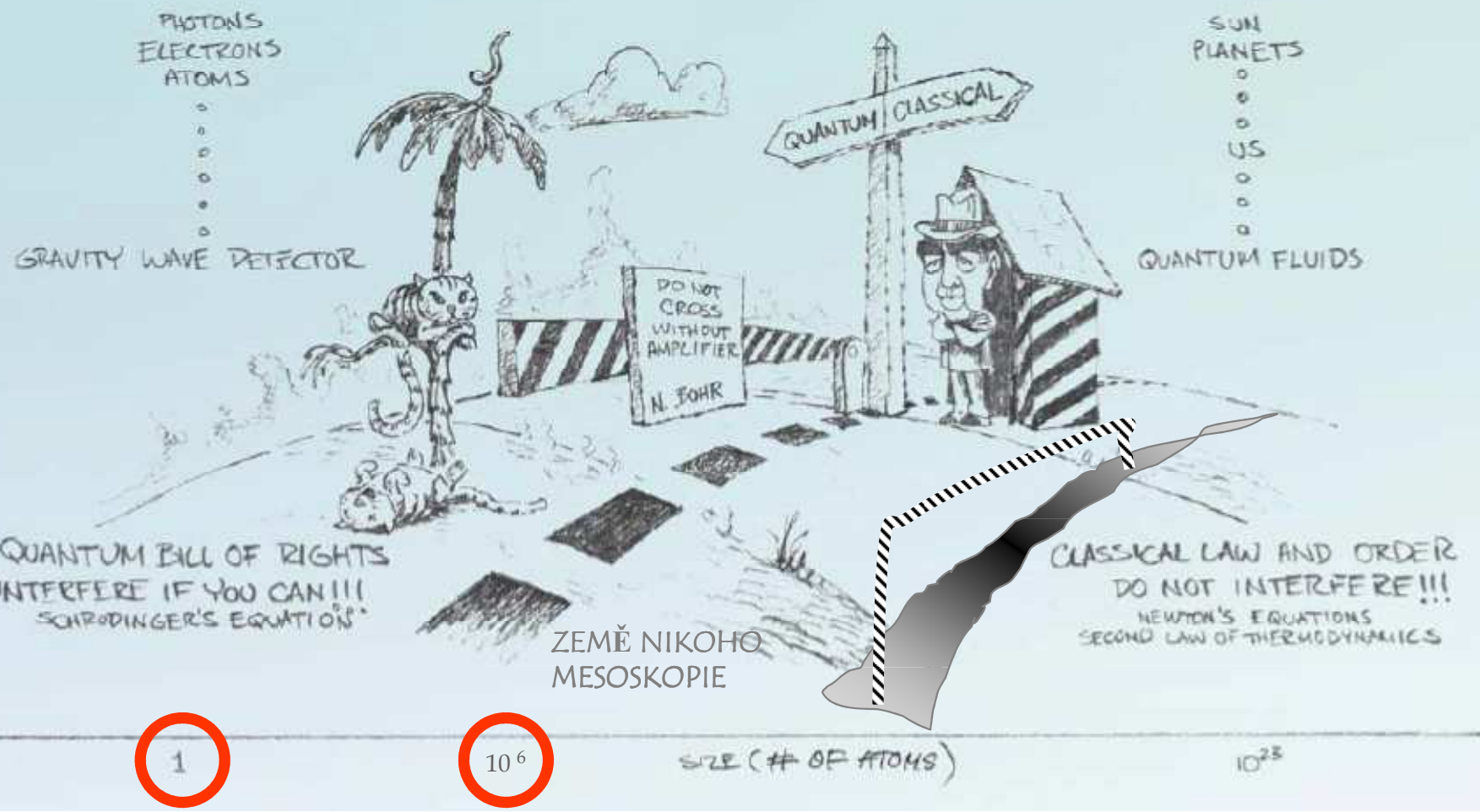


R. Ursin et.al: *Quantum Teleportation link across the Danube*, [Nature](#) **430**, 849 (2004)

THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

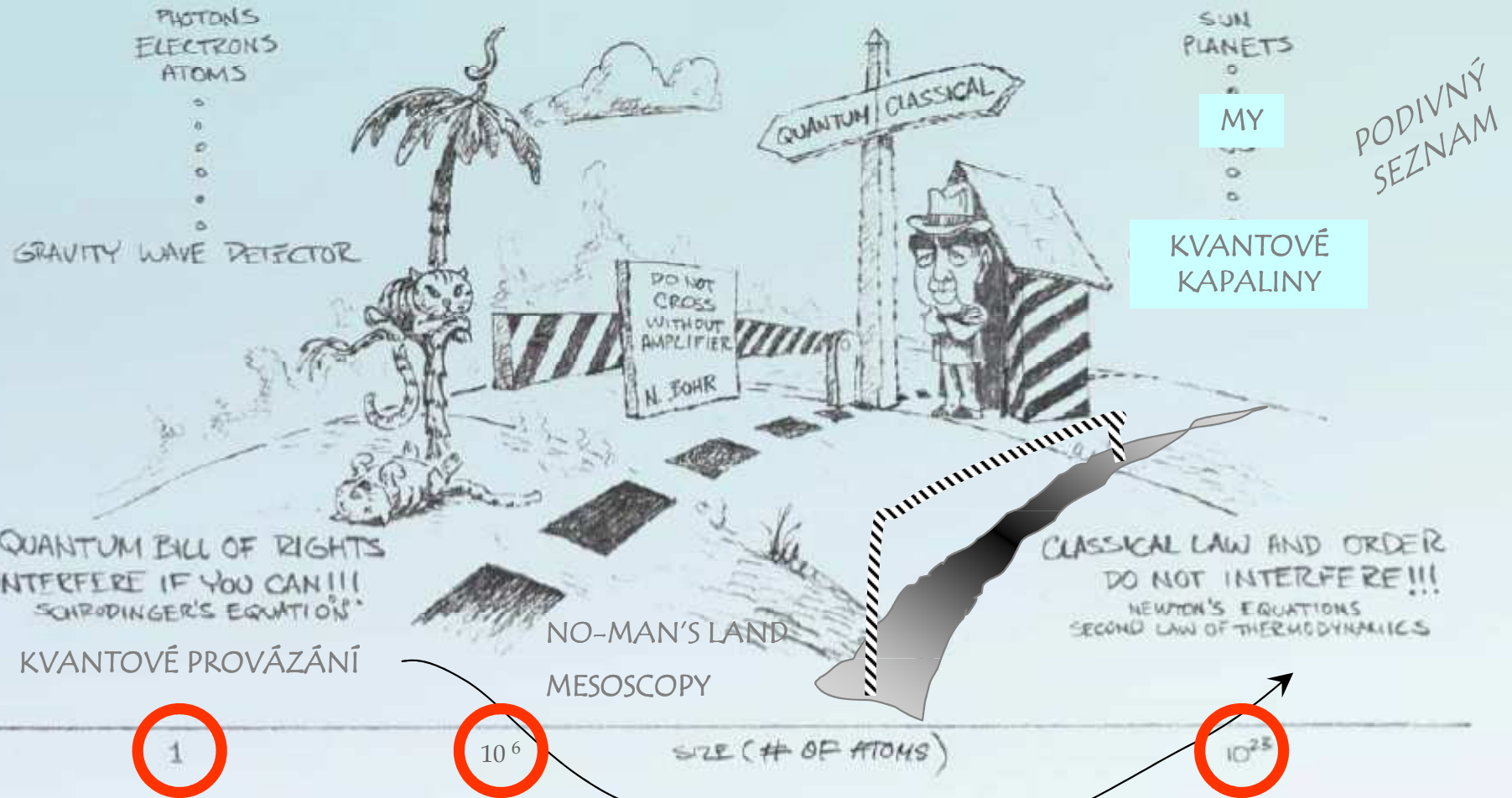
CLASSICAL DOMAIN



THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

CLASSICAL DOMAIN



Planckova konstanta

Samotná velikost objektů není tedy rozhodující pro jejich kvantové chování.

Obecné kritérium je spíše, jak důležitá je pro daný problém Planckova konstanta.

Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

- hodně malé číslo
- rozměr energie \times čas=akce=délka \times hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl $h = 2\pi\hbar$

Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1,05457168(18) \times 10^{-34} \text{ Js}$$

CODATA recomm. value

- hodně malé číslo
- rozměr energie \times čas=akce=délka \times hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl $h = 2\pi\hbar$
- dnes již známo s velkou přesností

Více rolí Planckovy konstanty

1. Jako převodní koeficient $E = \hbar\omega = h\nu$ Planckův vztah
2. Jako charakteristická mezní veličina $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ relace neurčitosti
3. V základních rovnicích $[x, p] = i\hbar$ $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$

Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1,05457168(18) \times 10^{-34} \text{ Js}$$

CODATA recomm. value

- hodně malé číslo
- rozměr energie \times čas=akce=délka \times hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl $h = 2\pi\hbar$
- dnes již známo s velkou přesností

Více rolí Planckovy konstanty

1. Jako převodní koeficient $E = \hbar\omega = h\nu$ Planckův vztah
2. Jako charakteristická mezní veličina $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ relace neurčitosti
3. ~~V základních rovnicích $[x, p] = i\hbar$ $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$~~

DNES NE, MÍSTO TOHO
BOHROVA TEORIE VODÍKU

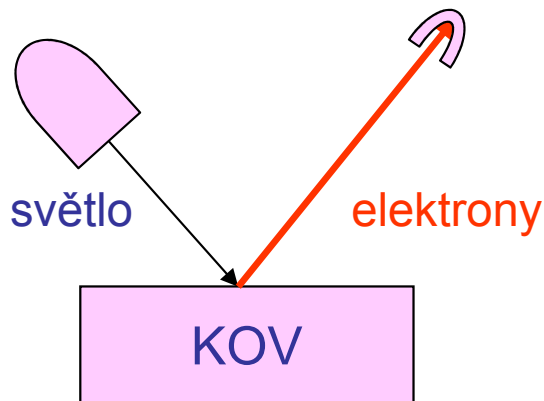
1. Planckova konstanta jako převodní koeficient

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad \text{Planckův vztah}$$

Překlad mezi jazyky dvou teorií ... most C \leftrightarrow Q

„Světlo o frekvenci ν je tvořeno fotony o energii E “

Tak uvažoval Einstein při vysvětlení **fotoefektu**



elektrony vyletují jen pro $\nu > \nu_0$

Důvod: $h\nu_0 \equiv W$ je **výstupní práce elektronu**

foton musí mít energii větší, aby ho vyrval.

Einstein 1905 ... NP

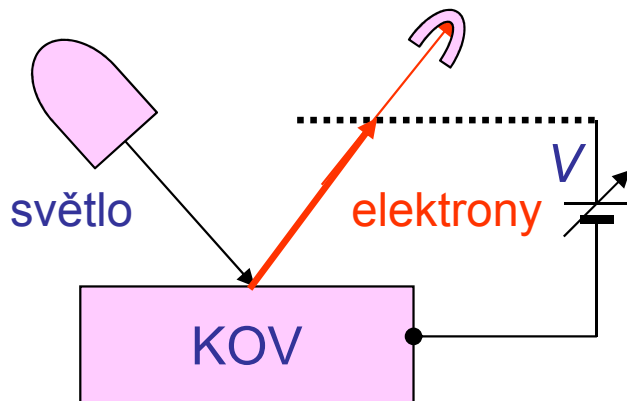
1. Planckova konstanta jako převodní koeficient

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad \text{Planckův vztah}$$

Překlad mezi jazyky dvou teorií ... most C \leftrightarrow Q

„Světlo o frekvenci ν je tvořeno fotony o energii E “

Tak uvažoval Einstein při vysvětlení **fotoefektu**



elektrony vyletují jen pro $\nu > \nu_0$

Důvod: $h\nu_0 \equiv W$ je **výstupní práce elektronu**

foton musí mít energii větší, aby ho vyrval.

Einstein 1905 ... NP

Experiment zejména Lenard NP

Určení energie elektronu ... brzdný potenciál

$$E_{\text{kin}} = h\nu - W = e \cdot V$$

elektronvolt

Odbočka: děsivé hodnoty a šikovní jednotky

Uvažme, že

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Je rozumné si zavést jednotky atomistice přiměřené.
Např. (v rámci zákonné soustavy SI)

nm, eV, fs

1 eV je energie, kterou elementární náboj získá při
průchodu potenciálním rozdílem 1 V,

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Pak vyjde neobyčejně šikovně

$$\hbar = 0.66 \text{ eVfs}$$

$$m_e = 5.7 \text{ eVfs}^2 \text{nm}^{-2}$$

Odbočka: děsivé hodnoty a šikovní jednotky

Uvažme, že

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Je rozumné si zavést jednotky atomistice přiměřené.
Např. (v rámci zákonné soustavy SI)

nm, eV, fs

1 eV je energie, kterou elementární náboj získá při
průchodu potenciálním rozdílem 1 V,

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Pak vyjde neobyčejně šikovně

$$\hbar = 0.66 \text{ eVfs}$$

$$m_e = 5.7 \text{ eVfs}^2 \text{nm}^{-2}$$

Ještě lepší je přejít k **přirozeným jednotkám**

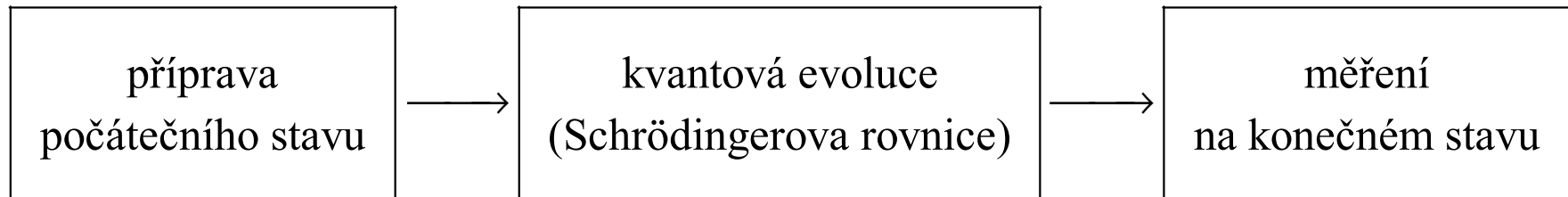
$$m_e = e = \hbar = 1 \quad \dots \text{ za chvíli}$$

2. Planckova konstanta jako hraniční hodnota

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad \text{relace neurčitosti}$$

Matematické vyjádření Heisenbergova principu

KVANTOVÝ EXPERIMENT



opakované měření souřadnice $\rightarrow x_\ell \rightarrow \frac{1}{N} \sum x_\ell \rightarrow \langle x \rangle$ střední hodnota
 $(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ neurčitost

opakované měření hybnosti $\rightarrow p_\ell \rightarrow \frac{1}{N} \sum p_\ell \rightarrow \langle p \rangle$ střední hodnota
 $(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$ neurčitost

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$$

Relace neurčitosti -- aplikace

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad \text{relace neurčitosti}$$

Propojíme prostorovou rozlehlost L a energii E vázaného stavu částice o hmotnosti m ... *kriterium ultrakvantového režimu*

1. krok kinetická energie částice ve vázaném stavu (v potenciál. jámě)

$$mE_{\text{kin}} \approx (\Delta p)^2$$

energie kvant. fluktuací

2. krok odhad z relace neurčitosti

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{\hbar}{L}$$

~ příznak ultrakvantového stavu

3. krok kinetická a celková energie stejného řádu

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2$$

Platí pro coulombickou interakci:

⇒ Stabilita atomů a hmoty vůbec

Relace neurčitosti -- aplikace

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad \text{relace neurčitosti}$$

Propojíme prostorovou rozlehlost L a energii E vázaného stavu částice o hmotnosti m ... *kriterium superkvantového režimu*

1. krok kinetická energie částice ve vázaném stavu (v potenciál. jámě)

$$mE_{\text{kin}} \approx (\Delta p)^2$$

2. krok odhad z relace neurčitosti

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{\hbar}{L}$$

3. krok kinetická a celková energie stejného řádu

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2$$

zkusíme pro atomy

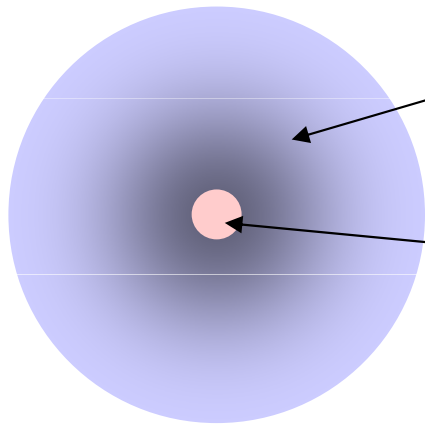
Velikost atomů

Jaké jsou empirické údaje o velikosti atomů

Jaké jsou teoretické důvody pro tyto údaje

Test pomocí relací neurčitosti

Opakování o atomech



OBAL
Z elektronů

JÁDRO
Z protonů
N=A-Z neutronů

atom ${}^A_Z X$

náboj jádra

$$Q = Z |e|$$

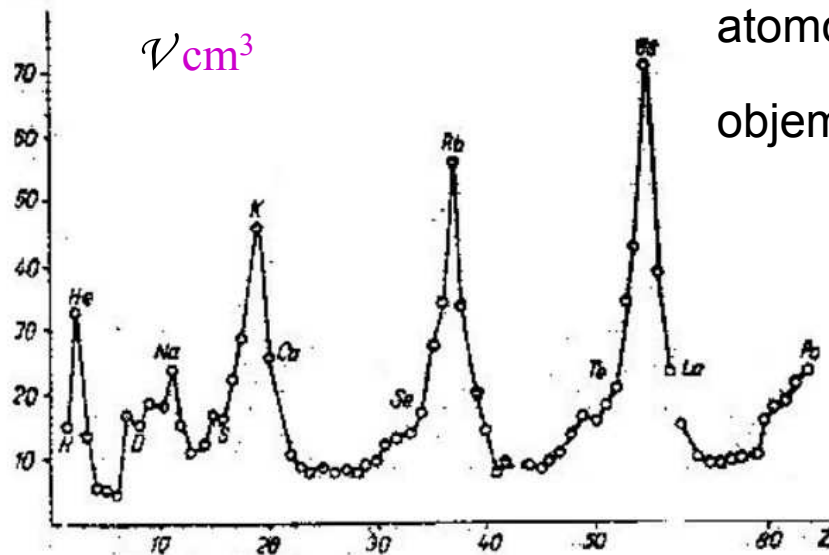
hmotnost atomu

$$M \sim A \text{ u}$$

poloměr jádra

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$$



atomový objem = rel. at. hmotnost $\text{g} / 10^3 \times$ hustota

objem na atom = atomový objem / Avogadr. číslo

$$V = 10^{-3} M / \rho$$

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \times V / N_A \right)^{1/3}$$

... odhad z empirických dat

Obr. 4. Závislost atomového objemu na atomovém čísle

Odhad ionizační energie atomu z relace neurčitosti

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2 \quad \text{obecný vztah}$$

$$m_e \cdot I \cdot r^2 \approx \hbar^2 \quad \text{odhad ionizačního potenciálu}$$

použijeme našich jednotek nm, eV, fs

$$\frac{\hbar^2}{m_e} = \frac{0,66^2}{5,7} \approx 0.076$$

Empirické poloměry atomů mají hodnoty v řádu 0,1 nm (1Å)

Energie valenčních elektronů v atomech pak vycházejí v řádu eV

Odhad ionizační energie atomu z relace neurčitosti

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2 \quad \text{obecný vztah}$$

$$m_e \cdot I \cdot r^2 \approx \hbar^2 \quad \text{odhad ionizačního potenciálu}$$

použijeme našich jednotek nm, eV, fs

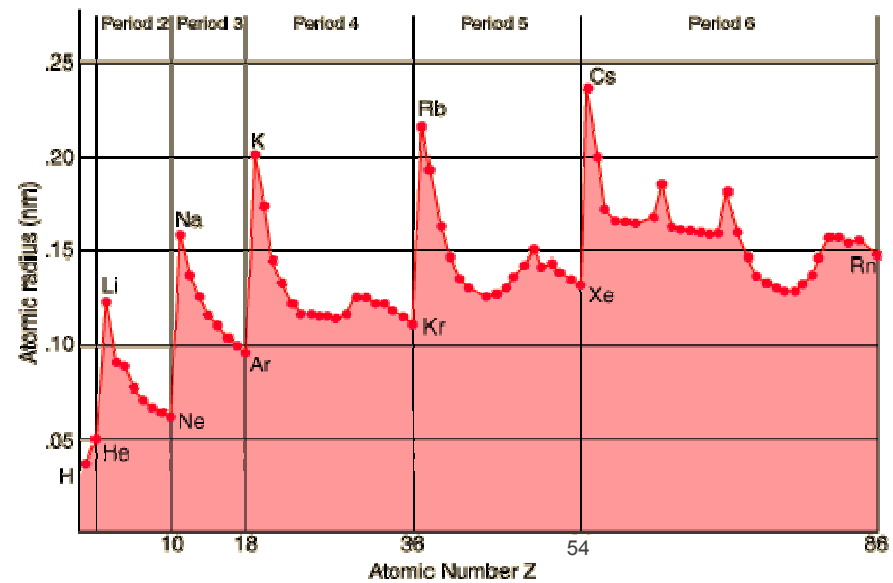
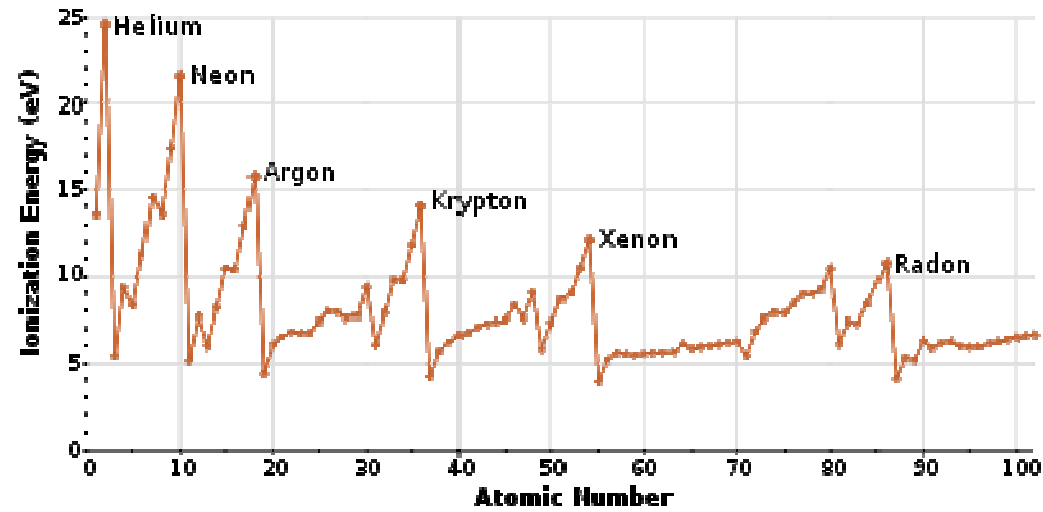
$$\frac{\hbar^2}{m_e} = \frac{0,66^2}{5,7} \approx 0.076$$

Empirické poloměry atomů mají hodnoty v řádu 0,1 nm (1Å)

Energie valenčních elektronů v atomech pak vycházejí v řádu eV

v tabulkách lze ověřit, že je to
správný odhad

Ionizační energie a poloměry prvků

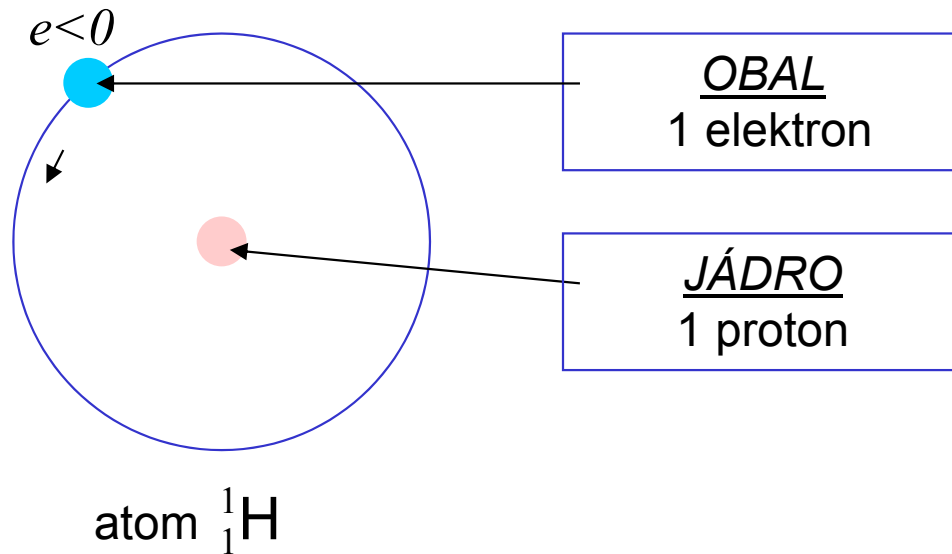


3. Planckova konstanta jako součást teoretického aparátu kvantové teorie

Jako příklad použijeme původní Bohrovy teorie
atomu vodíku.

Ta je teoreticky překonaná, ale všichni ji známe a
vykazuje charakteristickou strukturu, nad kterou se
zamyslíme

Semiklasický popis atomu vodíku podle Bohra



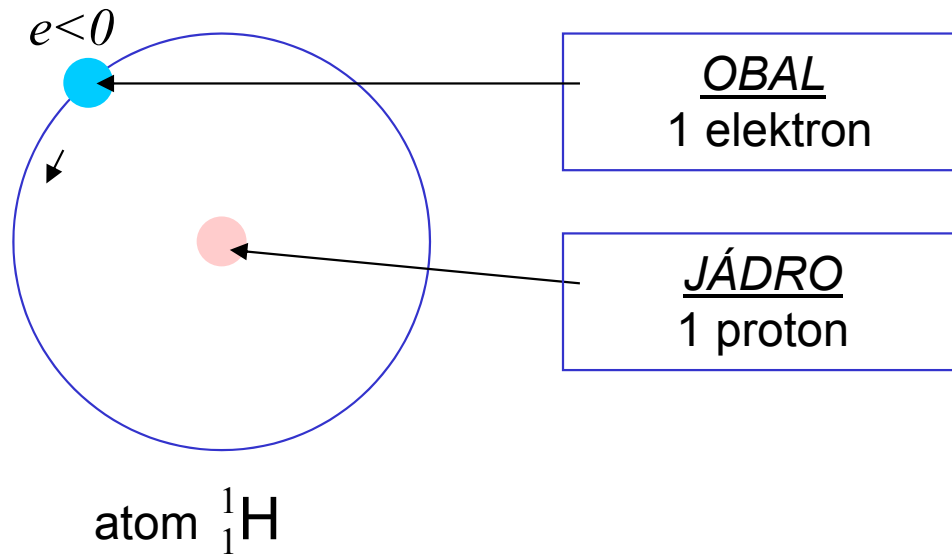
náboj jádra	$Q = e $
hmotnost atomu	$M \sim u \gg m_e$
poloměr jádra	$R = r_0 \ll r$
	$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$

- Elektron obíhá rychlostí v kolem nehybného jádra. Má hybnost $p = m_e v$, moment hybnosti $m_e v r$, odstředivá síla je $m_e v^2/r$... všechno klasické
- Přitahován je coulombickou silou

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \equiv \frac{e'^2}{r^2}$$

- Připojeno je kvantování, prostřednictvím *kvanta akce*, Planckovy konstanty \hbar .
- Veličina ke kvantování vhodná má rozměr akce. To je právě moment hybnosti.

Semiklasický popis atomu vodíku podle Bohra



náboj jádra	$Q = e $
hmotnost atomu	$M \sim u \gg m_e$
poloměr jádra	$R = r_0 \ll r$
	$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$

- Elektron obíhá rychlostí v kolem nehybného jádra. Má hybnost $p = m_e v$, moment hybnosti $m_e v r$, odstředivá síla je $m_e v^2/r$... všechno klasické
- Přitahován je coulombickou silou

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \equiv \frac{e'^2}{r^2}$$

- Připojeno je kvantování, prostřednictvím kvanta akce, Planckovy konstanty \hbar .
- Veličina ke kvantování vhodná má rozměr akce. To je právě moment hybnosti.

Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

odstř. síla = dostř. síla

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e'^2}{r^2}$$

Klasická podmínka

kvantování momentu hybnosti

$$m_e r v = k \cdot \hbar, \quad k = 1, 2, \dots$$

Kvantová podmínka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2},$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie
27,2 eV

Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

odstř. síla = dostř. síla

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e'^2}{r^2}$$

Klasická podmínka

kvantování momentu hybnosti

$$m_e r v = k \cdot \hbar, \quad k = 1, 2, \dots$$

Kvantová podmínka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2},$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie
27,2 eV

2x ionizační energie vodíku

Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

$$m_e v^2 = e^2$$

Klasická podmínka

o tyto výpočty nejde, důležité je podívat se na výsledek který je exaktní

kvantování

hka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2},$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie
27,2 eV

Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

$$m_e v^2 = e^2 / r$$

Klasická podmínka

o tyto výpočty nejde, důležité je podívat se na výsledek který je exaktní

kvantování

hka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2}$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie
27,2 eV

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}$$

shoduje se s odhadem
z relací neurčitosti

Přirozené jednotky

Rozměrové úvahy a zavedení
přirozených jednotek

jsou založeny na víře (dobře již osvědčené), že
rozměrová úvaha vede k výsledku, který se od
přesného liší jen numerickým faktorem v řádu
jednotek

Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

G Klasická mechanika a teorie gravitace

Gravitační zákon

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}$$

Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

G Klasická mechanika a teorie gravitace

c Teorie elektromagnetického pole
Maxwellovy rovnice, vlnová rovnice

$$\partial_{tt}\mathbf{E} - c^2 \Delta \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

G Klasická mechanika a teorie gravitace

c Teorie elektromagnetického pole

\hbar Kvantová teorie
Komutační relace, Schrödingerova rovnice

$$[x, p] = i\hbar$$

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi$$

Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

G Klasická mechanika a teorie gravitace

c Teorie elektromagnetického pole

\hbar Kvantová teorie
Komutační relace, Schrödingerova rovnice

$$[x, p] = i\hbar$$

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi$$

O této trojici za chvíli více

Další universální konstanty

Jiný typ universálních konstant – charakteristiky částic

		elektron	proton
vlastnosti částic	náboje	elektrické $-e$	$+e$
		gravitační m_e	m_p
	hmotnosti	m_e	m_p

Další universální konstanty

Jiný typ universálních konstant – charakteristiky částic

		elektron	proton	
vlastnosti částic	náboje	elektrické	$-e$	$+e$
		gravitační	m_e	m_p
	hmotnosti		m_e	m_p

SOUHRN -- ATOMOVÁ FYSIKA

univ. konstanty	G	c	\hbar	e'^2	m_e	m_p	e
			$\frac{h}{2\pi}$	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$			
bezrozměrné kombinace				$\alpha = \frac{e'^2}{\hbar c}$	$\frac{m_p}{m_e}$	$\alpha_p = \frac{Gm_p^2}{\hbar c}$	

Přirozené jednotky ve fyzice

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	G	c	\hbar	e'^2	m_e	m_p	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•)	(•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

VÝHODNÉ VLASTNOSTI PŘIROZENÝCH JEDNOTEK

1. **Fundamentální** -- nezávislé na lidské libovůli, přesnosti a stálosti etalonů
2. **Fundamentální** -- vystihují hluboké souvislosti fyzikálních zákonů
3. **Praktická** -- hodnoty měřených veličin mají příjemný rozsah a jsou snadné k interpretaci
4. **Praktická** -- rovnice se zjednoduší, mají bezrozměrné koeficienty, zpravidla malých celočíselných hodnot nebo zlomků jako $\frac{1}{2}$
5. **Fundamentální&Praktická** -- výpočty zůstávají v platnosti i po zpřesnění hodnot univerzálních konstant

Atomové přirozené jednotky

Jsou nejvhodnější pro atomární soustavy
... relativní jednotky, kde
jeden elektron, jeden proton, jeden atom vodíku
slouží jako etalon

Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	G	c	\hbar	e'^2	m_e	m_p	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•	•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

Atomové jednotky

Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	G	c	\hbar	e'^2	m_e	m_p	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•	•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

Atomové jednotky

- Inspirace od *Bohra*(1913) **Rozměrová úvaha → relevantní veličiny**

Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	G	c	\hbar	e'^2	m_e	m_p	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•)	(•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

Atomové jednotky

- Inspirace od *Bohra*(1913) **Rozměrová úvaha** → **relevantní veličiny**
- Dvě podmínky pro Bohrovův poloměr a Hartreeho energii
(rozměrové kombinace ... kinetická energie a Coulomb. potenciál. energie)

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}, \quad E_0 = \frac{e'^2}{a_0}$$

Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	G	c	\hbar	e'^2	m_e	m_p	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•)	(•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

Atomové jednotky

- Inspirace od *Bohra*(1913) **Rozměrová úvaha** → **relevantní veličiny**
- Dvě podmínky pro Bohrovův poloměr a Hartreeho energii
(rozměrové kombinace ... kinetická energie a Coulomb. potenciál. energie)

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}, \quad E_0 = \frac{e'^2}{a_0}$$

- Výsledek

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2}, \quad E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

v plné shodě s
Bohrovou teorií

Atomové přirozené jednotky

zákl. konstanty	\hbar	e'^2	m_e
			e

$$\alpha = \frac{e'^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2}$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

$$\ell_0 = \hbar$$

$$p_0 = \frac{\hbar}{a_0} = \frac{m_e e'^2}{\hbar}$$

$$v_0 = \frac{p_0}{m_e} = \frac{e'^2}{\hbar}$$

$$t_0 = \frac{\hbar}{E_0} = \frac{\hbar^3}{m_e e'^4}$$

Atomové přirozené jednotky -- měřítko světa atomů

zákl. konstanty	\hbar	e'^2	m_e	e
-----------------	---------	--------	-------	-----

$$\alpha = \frac{e'^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2} = 4.36 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$\ell_0 = \hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$p_0 = \frac{\hbar}{a_0} = \frac{m_e e'^2}{\hbar} = 1.98 \times 10^{-24} \text{ m}$$

$$v_0 = \frac{p_0}{m_e} = \frac{e'^2}{\hbar} = 2.19 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$t_0 = \frac{\hbar}{E_0} = \frac{\hbar^3}{m_e e'^4} = 2.42 \times 10^{-17} \text{ s}$$

Atomové přirozené jednotky a relativita

zákl. konstanty	\hbar	e'^2	m_e	e
-----------------	---------	--------	-------	-----

$$\alpha = \frac{e'^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m} = \alpha^{-1} \cdot \frac{\hbar}{m_e c} \equiv \alpha^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \lambda_C$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2} = 4.36 \times 10^{-18} \text{ J} = \alpha^2 \cdot m_e c^2$$

$$\ell_0 = \hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$p_0 = \frac{\hbar}{a_0} = \frac{m_e e'^2}{\hbar} = 1.98 \times 10^{-24} \text{ m} = \alpha \cdot m_e c$$

$$v_0 = \frac{p_0}{m_e} = \frac{e'^2}{\hbar} = 2.19 \times 10^6 \text{ m/s} = \alpha \cdot c \quad \boxed{c = 137 \text{ a.u.}}$$

$$t_0 = \frac{\hbar}{E_0} = \frac{\hbar^3}{m_e e'^4} = 2.42 \times 10^{-17} \text{ s}$$

Planckovy přirozené jednotky

Byly první a zdály se hodně divné,
ale ...

Planckovy "přirozené" jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	G	c	\hbar	e'^2	m_e	m_p	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•)	(•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

Planckovy jednotky

- Sestavíme veličiny o rozměru **délka, hmotnost, čas**
- To jsou Planckovy jednotky, historicky první *přirozené jednotky* ... jak je navrhl 1899, sotva svou konstantu zavedl, ještě bez dnešní interpretace
- Hodnoty Planckových jednotek jsou poněkud zarážející

$$\ell_P = \left(\hbar G / c^3 \right)^{\frac{1}{2}} = 4.13 \times 10^{-35} \text{ m}$$

$$m_P = \left(\hbar c / G \right)^{\frac{1}{2}} = 5.56 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

$$t_P = \left(\hbar G / c^5 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.38 \times 10^{-43} \text{ s}$$

Hlubší pohled na Planckovu volbu: $(c\hbar G)$ schéma

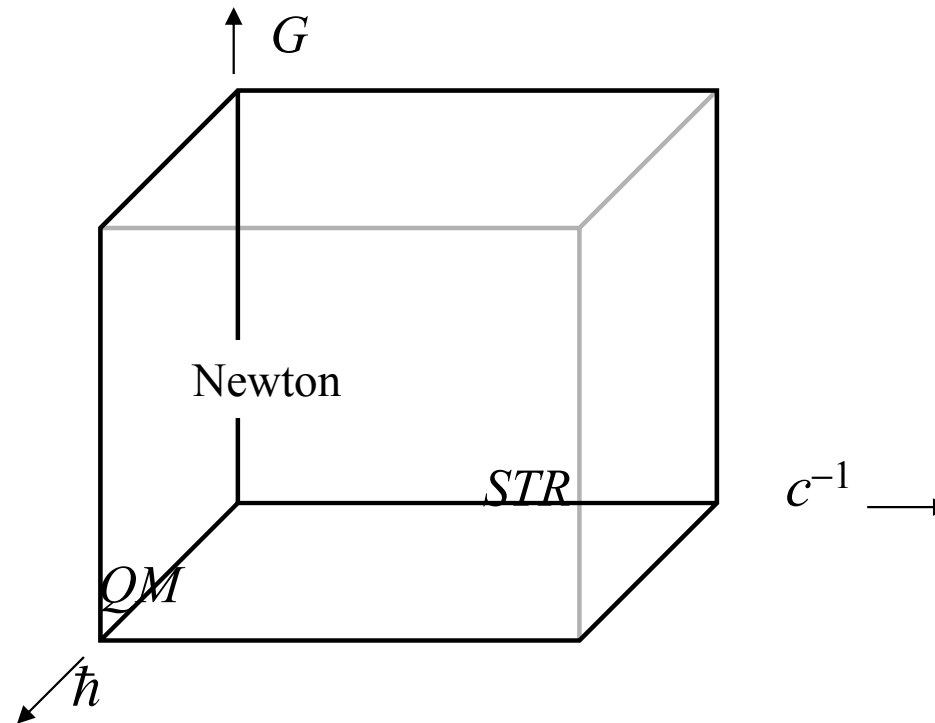
V atomové fyzice jsou jádra neměnná tělíska (téměř).

Působí dvě universální interakce: gravitační a elektromagnetická

Podmínky jejich působení lze znázornit v $(c\hbar G)$ schématu, které má Newtonův svět v počátku, tři hlavní teorie na osách.

Příklady: STR je důležitá, jestliže typická rychlost $v \approx c, v/c \approx 1$, atd.

QM — " — , kvantum akce \hbar není zanedbatelné



Hlubší pohled na Planckovu volbu: ($c\hbar G$) schéma

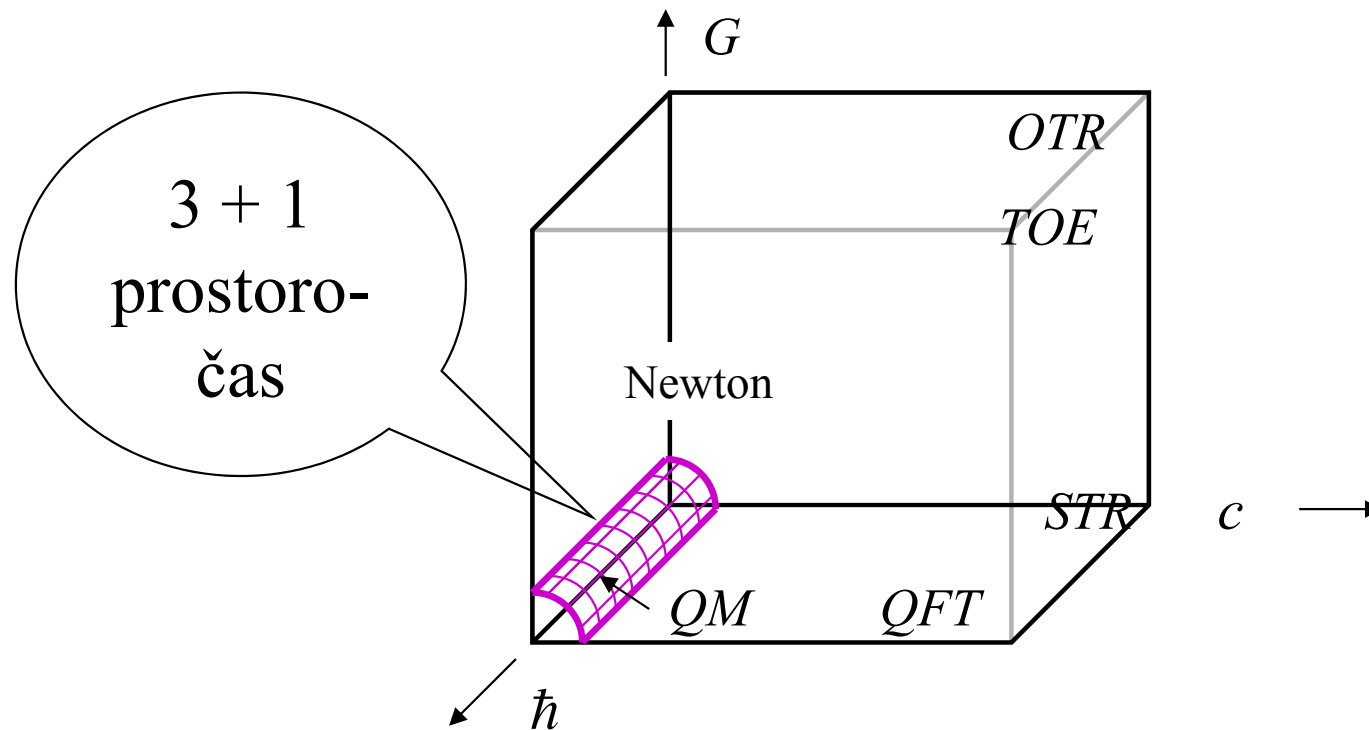
V atomové fyzice jsou jádra neměnná tělíska (téměř).

Působí dvě universální interakce: gravitační a elektromagnetická

Podmínky jejich působení lze znázornit v ($c\hbar G$) schématu, které má Newtonův svět v počátku, tři hlavní teorie na osách.

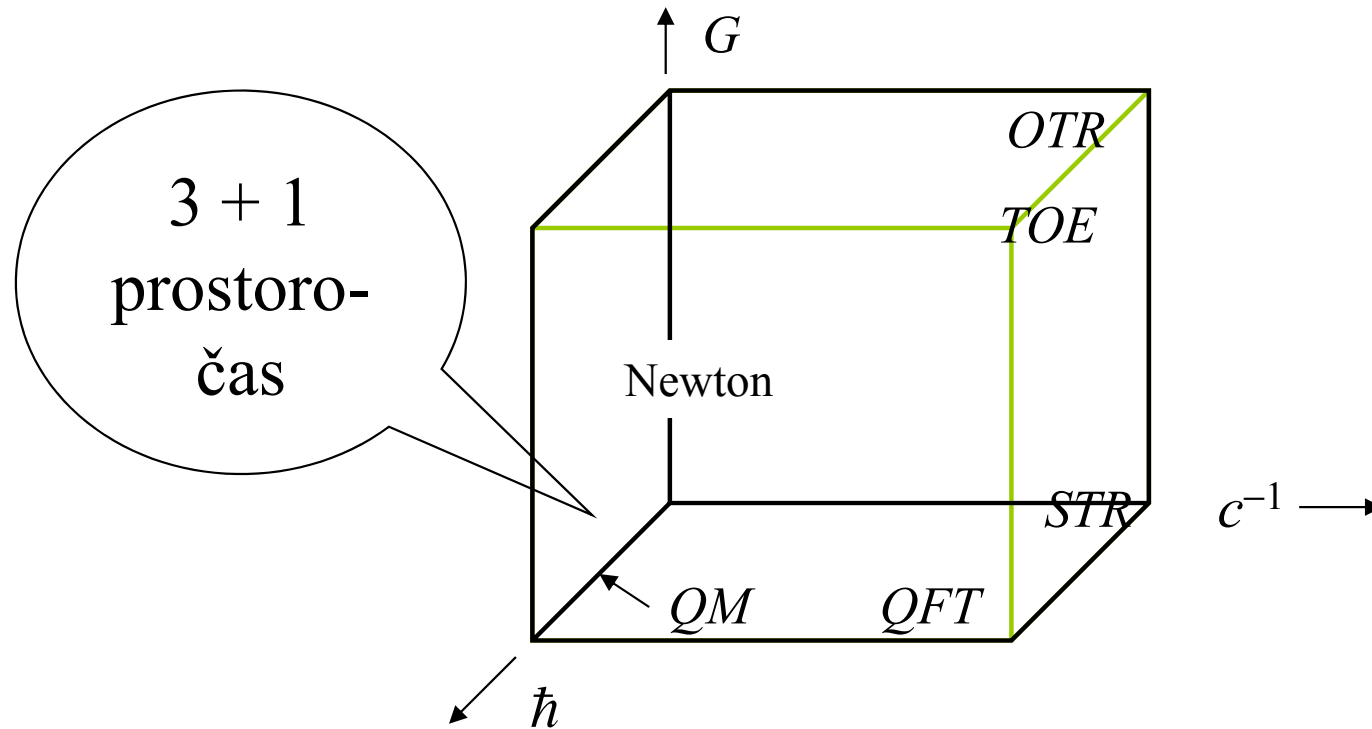
Příklad: STR je důležitá, jestliže typická rychlost $v \approx c, v/c \approx 1$, atd.

U atomové fyziky je gravitace slabá (Newtonova), jedná se o kvasirelativistickou limitu, zato **kvantové efekty jsou započteny plně**.



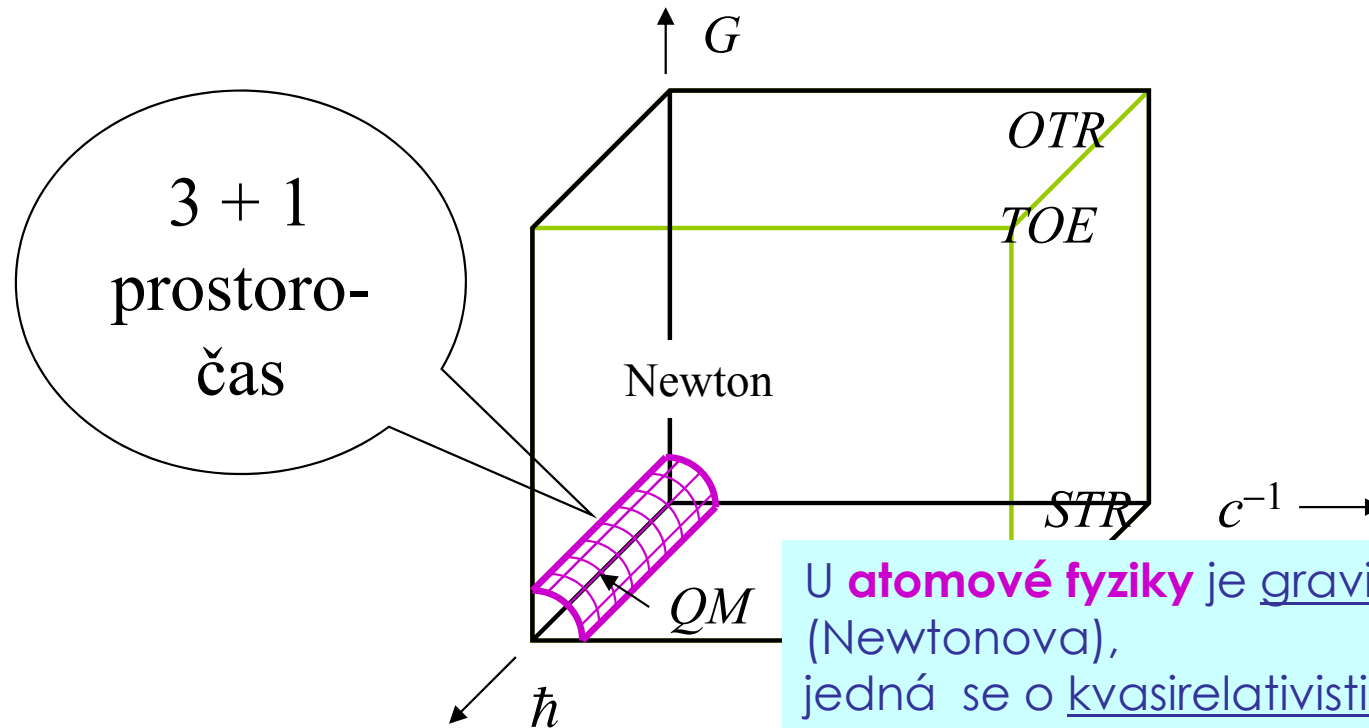
Hlubší pohled na Planckovu volbu: ($c\hbar G$) schéma

	G	c^{-1}	\hbar
Newtonova gravitace	•		
speciální relativita		•	
NR kvantová mechanika			•
obecná relativita (teorie gravitace)	•	•	
kvantová teorie pole (včetně QED)		•	•
teorie všeho (kvantová gravitace)	•	•	•



Hlubší pohled na Planckovu volbu: ($c\hbar G$) schéma

	G	c^{-1}	\hbar
Newtonova gravitace	•		
speciální relativita		•	
NR kvantová mechanika			•
obecná relativita (teorie gravitace)	•	•	
kvantová teorie pole (včetně QED)		•	•
teorie všeho (kvantová gravitace)	•	•	•



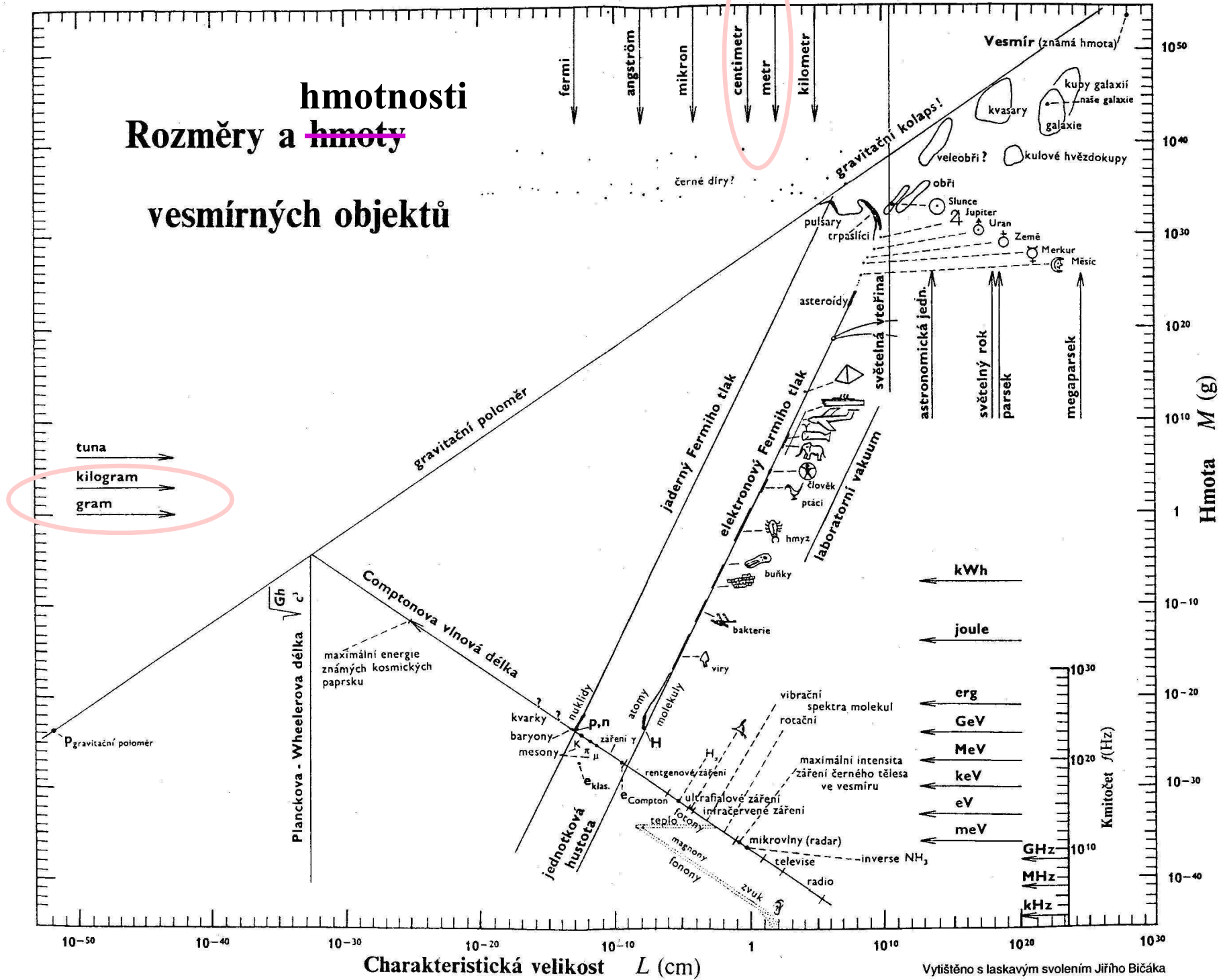
U **atomové fyziky** je gravitace slabá (Newtonova), jedná se o kvasirelativistickou limitu, zato **kvantové efekty jsou započteny plně**.

Bičákov diagram

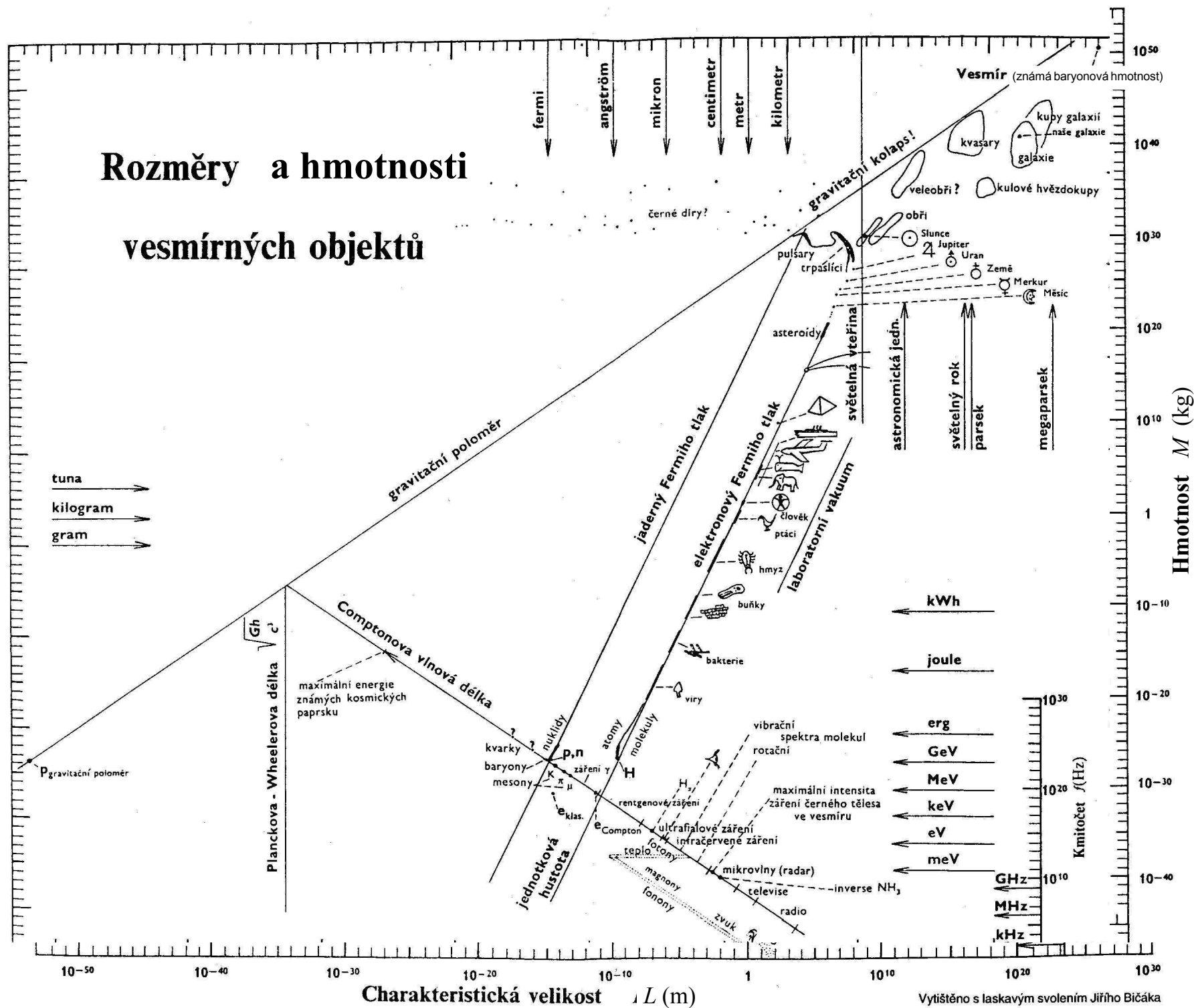
Zveřejněný již před mnoha lety ve
Žlutém časopisu (Čs. čas. fys.)
mírně zastaralý,
ale stále inspirující.

My se podíváme z hledisek důležitých pro
atomistiku

hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů



Rozměry a hmotnosti vesmírných objektů



Dvojlogaritmické měřítko

$$Y = K \cdot X^{\alpha}$$

se zobrazí jako

$$\log Y = \log K + \alpha \cdot \log X$$

Dvojlogaritmické měřítko

$$Y = K \cdot X^\alpha$$

se zobrazí jako

$$\log Y = \log K + \alpha \cdot \log X$$

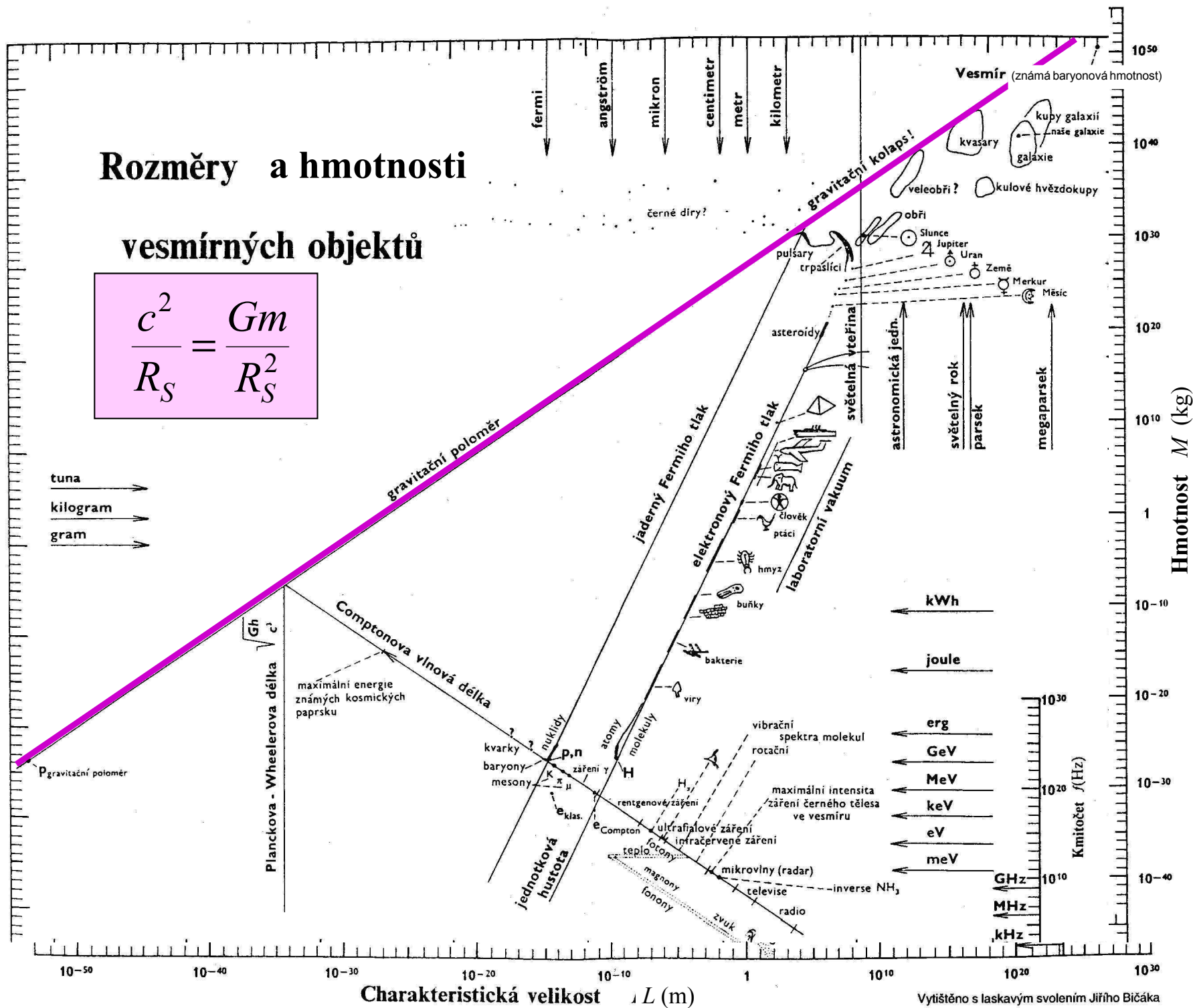
Krásné, ale ošidné:

logaritmus se mění pomalu

Rozměry a hmotnosti

vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

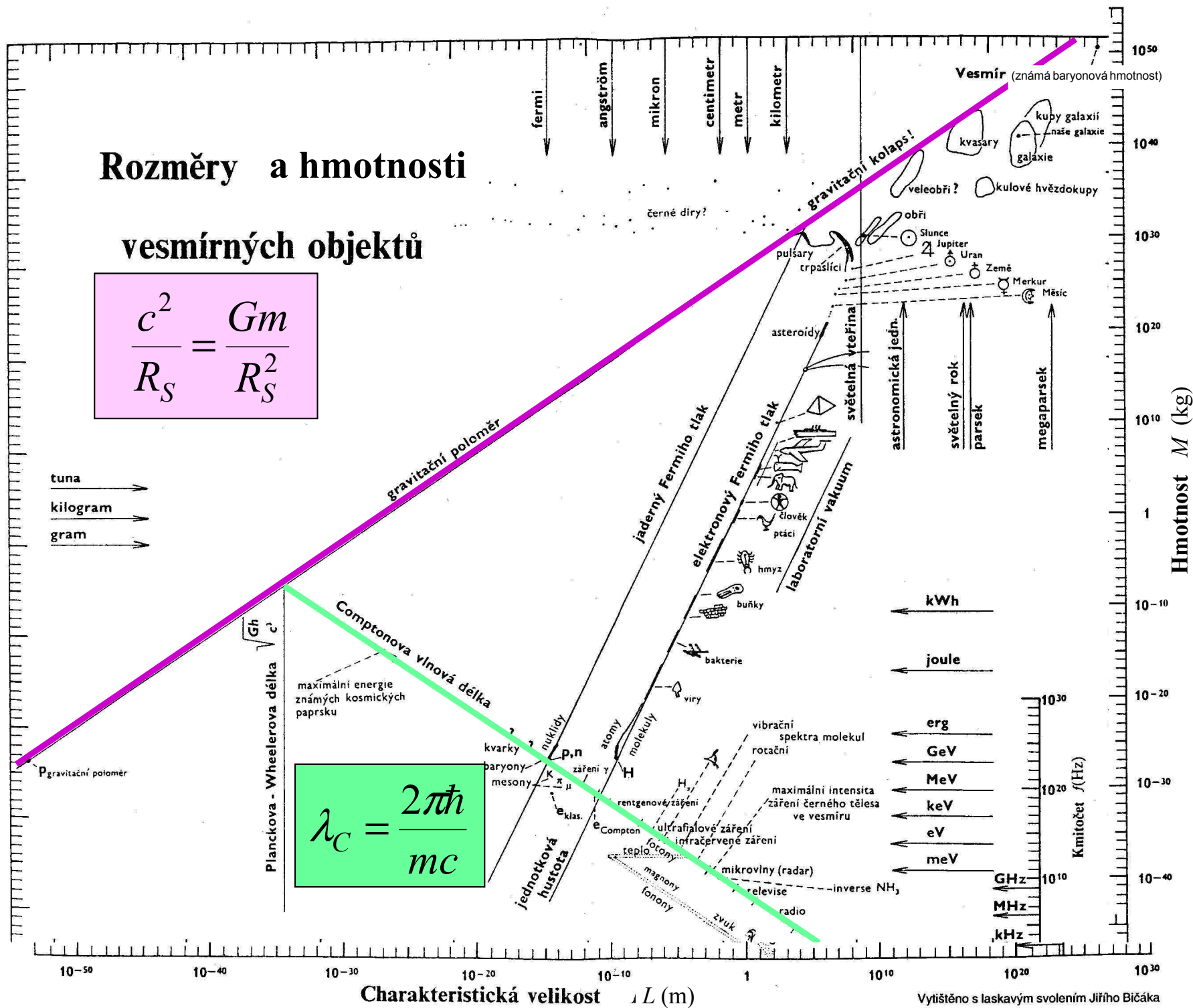


Rozměry a hmotnosti

vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna
kilogram
gram



Rozměry a hmotnosti

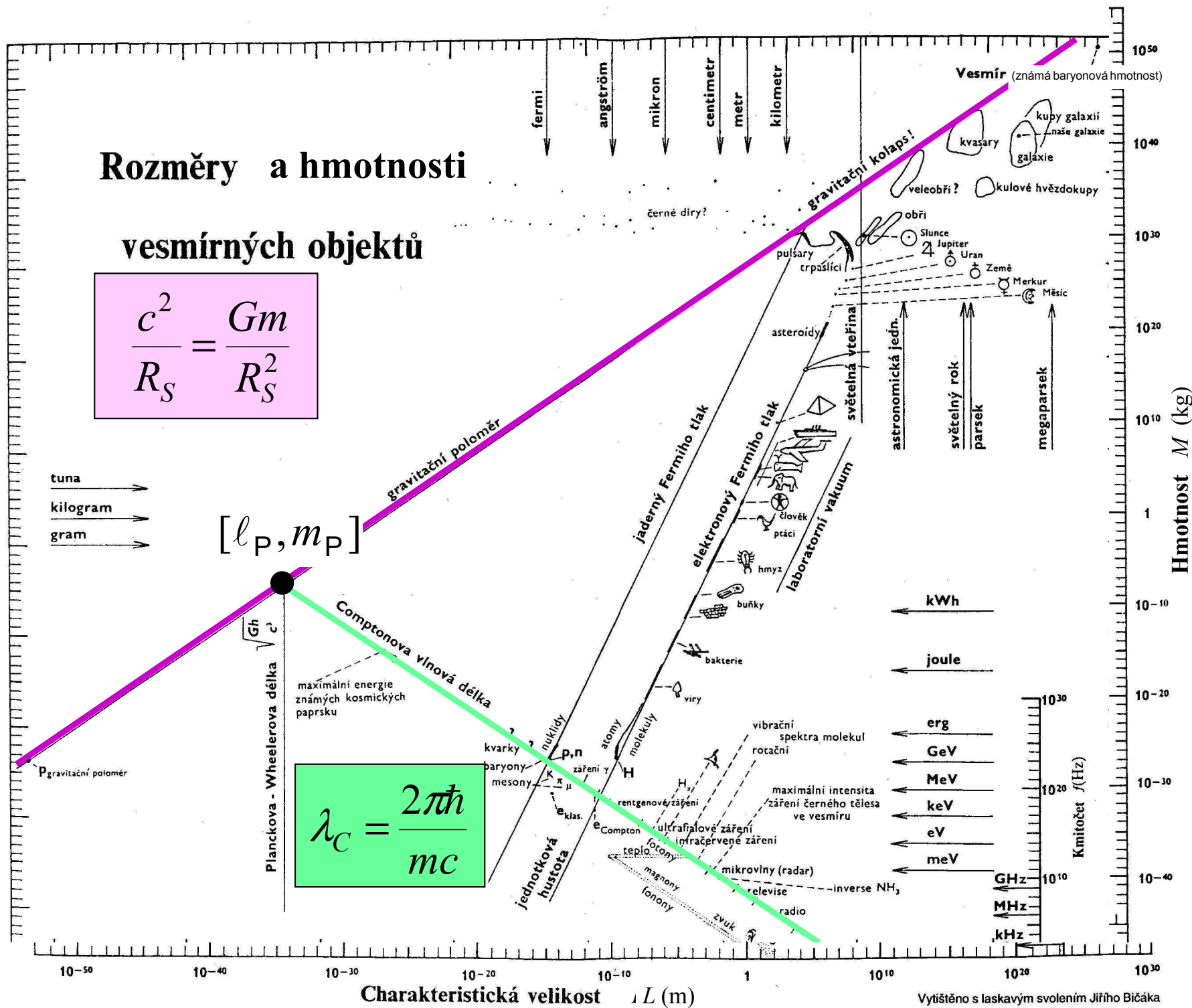
vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna
kilogram
gram

$[l_P, m_P]$

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



Rozměry a hmotnosti vesmírných objektů

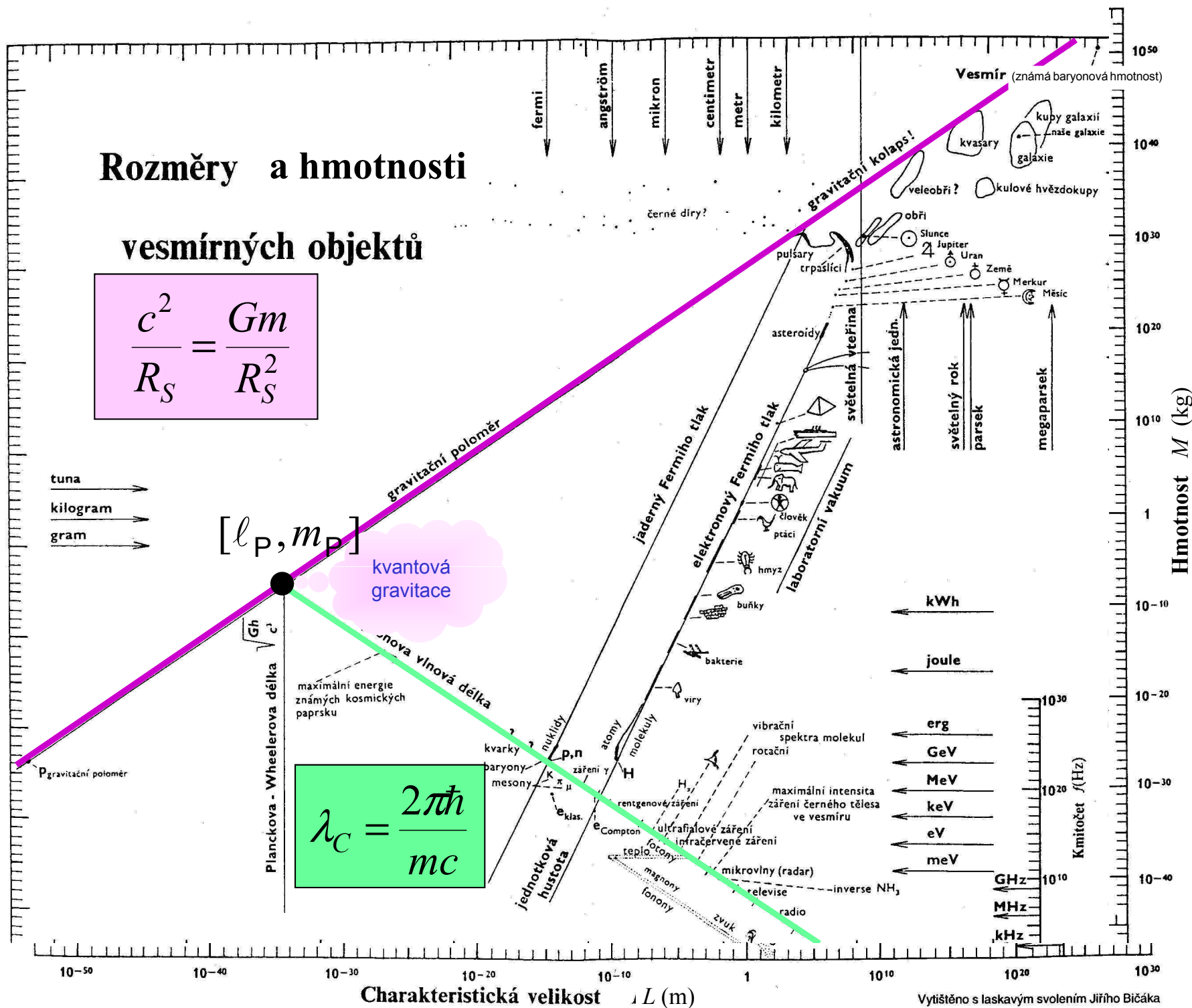
$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna
kilogram
gram

$[l_P, m_P]$

kvantová gravitace

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



Rozměry a hmotnosti

vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna
kilogram
gram

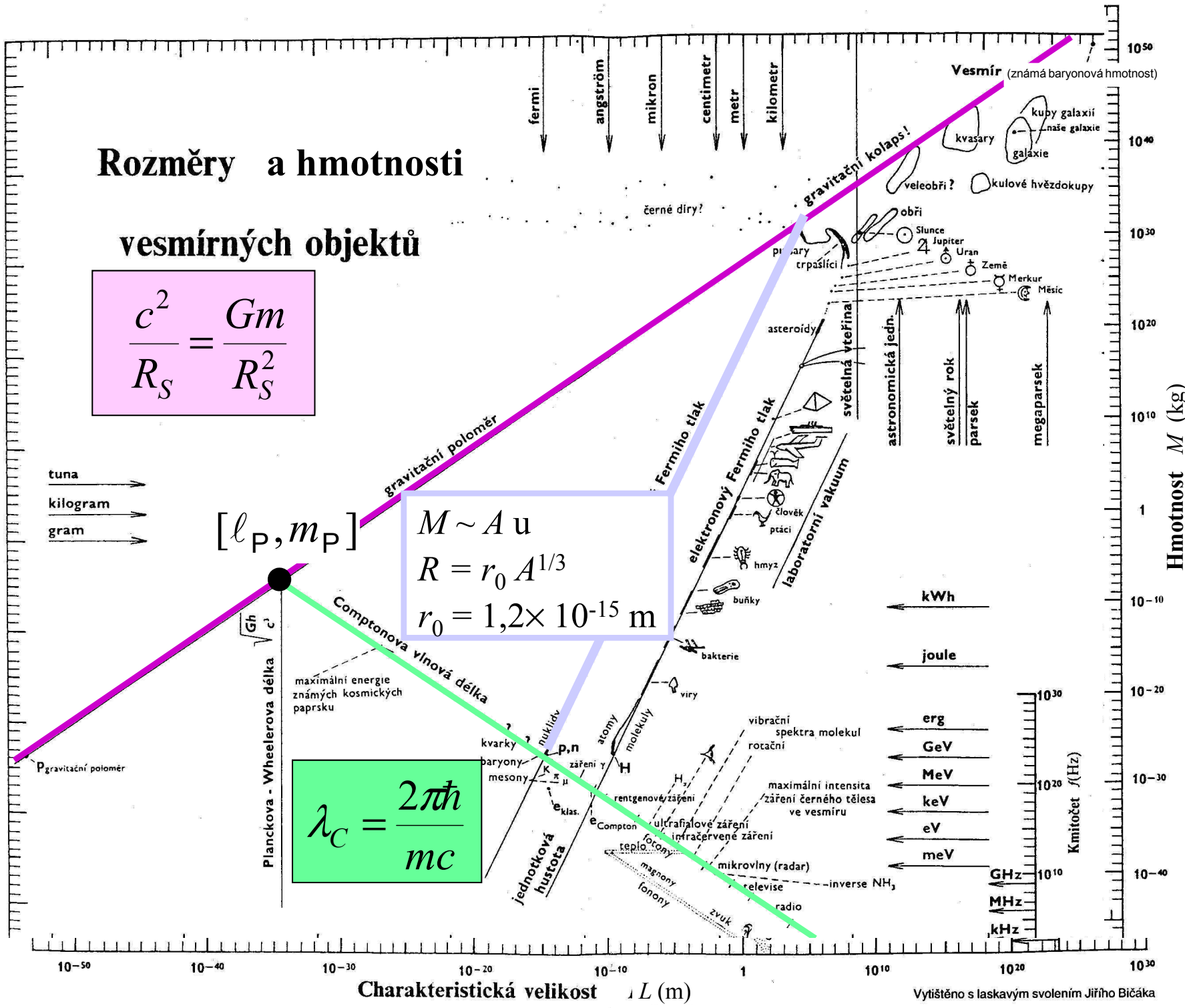
$[l_P, m_P]$

$$M \sim A u$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



Charakteristická velikost L (m)

Hmotnost M (kg)

Vytištěno s laskavým svolením Jiřího Bičáka

Rozměry a hmotnosti

vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

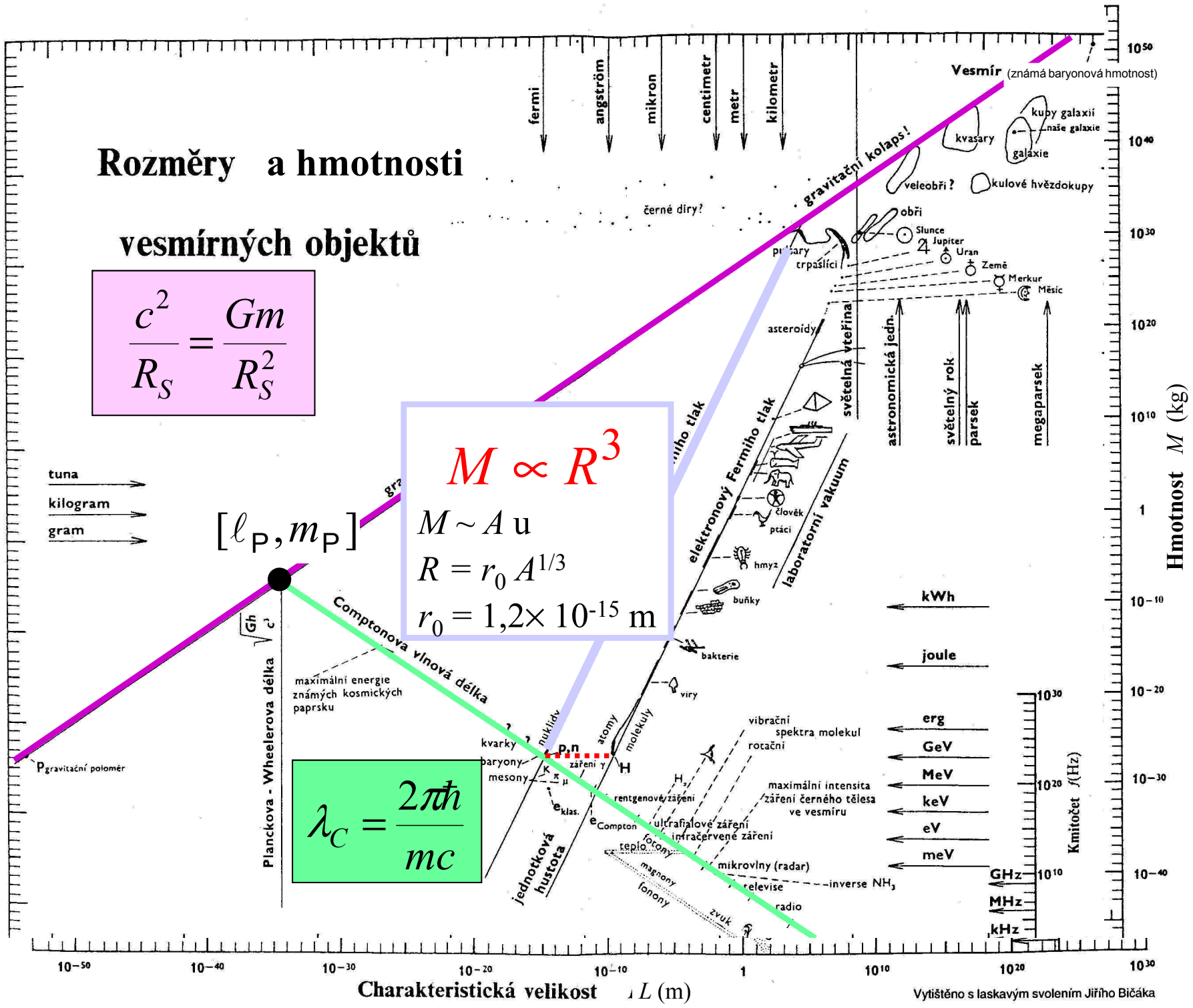
$$M \propto R^3$$

$$M \sim A u$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



Vytištěno s laskavým svolením Jiřího Bičáka

Rozměry a hmotnosti

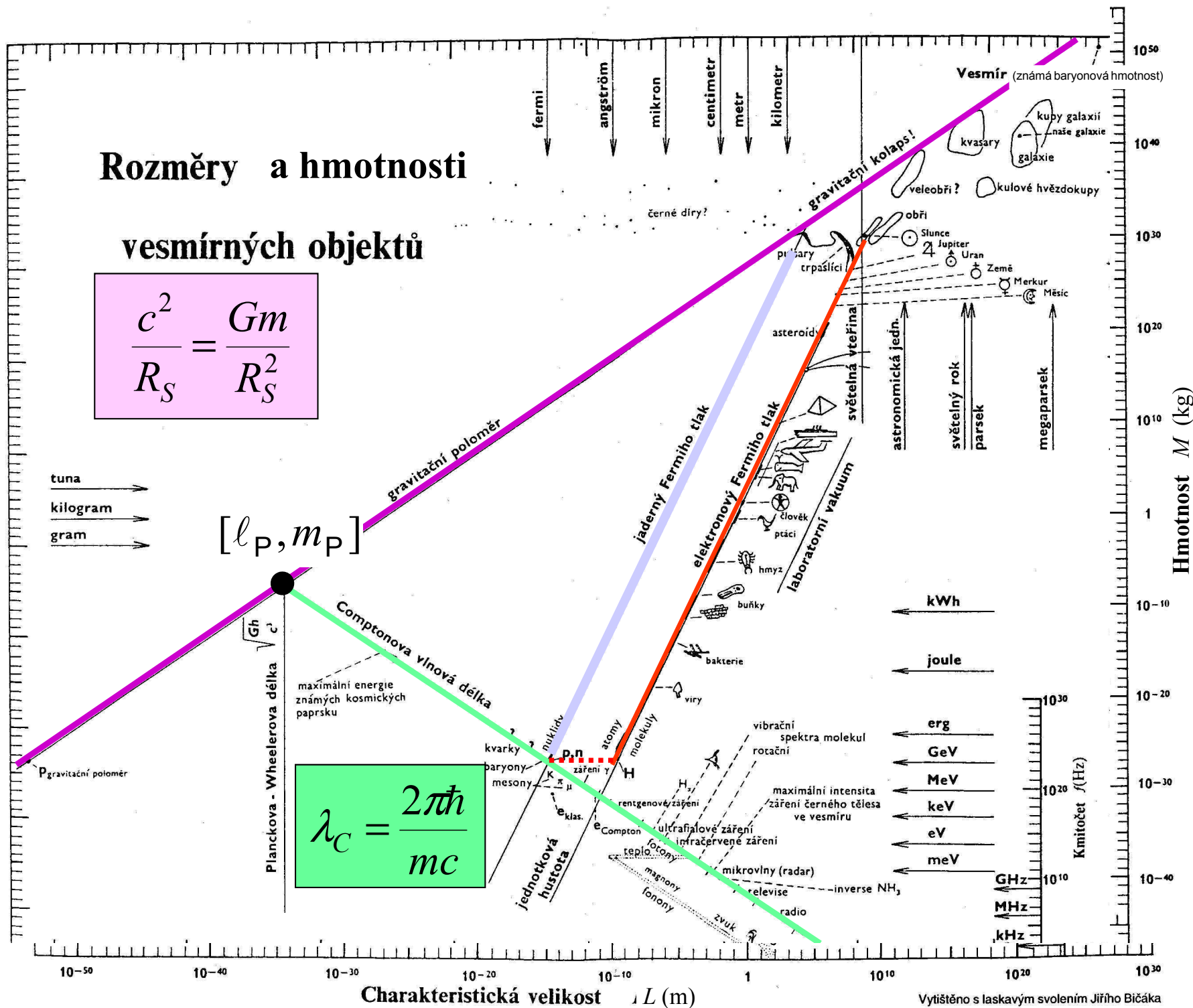
vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna
kilogram
gram

$[l_P, m_P]$

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



Rozměry a hmotnosti

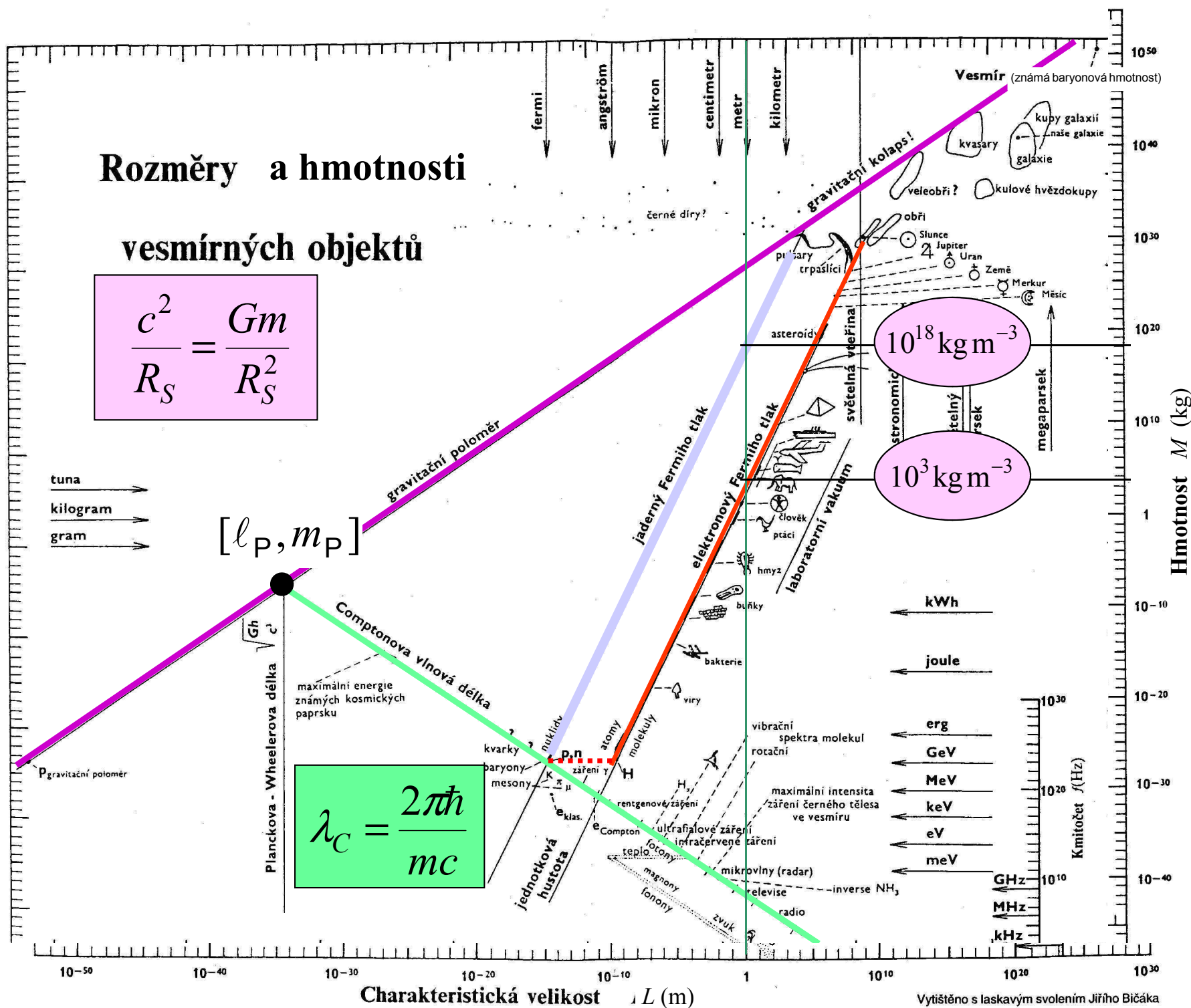
vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna
kilogram
gram

$[l_P, m_P]$

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



The end